Ed. Irr. 56,1871C

N III
18|w

See Vol III.

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI, FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS PRIMUS.

Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, *&* ANALYSIM, *tam* FINITORUM *quam* INFINITORUM *complectitur.*

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.



GENEVÆ,
Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.
MDCCXLIII.

WELLCOME HISTORICAL MEDICAL LIBRARY

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

DOMINO,

WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI

CATTIMELIBOCI, DECIÆ, ZIEGENHAINÆ,

NIDDÆ ET SCHAUMBURGI, &c. &c.

EXERCITUS EQUESTRIS FOEDERATI BELGII

GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO

PRÆFECTO BELLICO, &c. &c.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

SERENISSIME PRINCEPS,
DOMINE CLEMENTISSIME,

S*Cientiæ Mathematicæ Imperatoribus, Regibus & Principibus ab omni ævo in pretio fuere, ut non modo munificentia ſua eas promoverint, ſed & ipſimet animum ad eas excolendas applicaverint. Non opus eſt, ut de* ALPHONSO X *Caſtellæ ac Legionis Rege, &* ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS MAGNI *nepote, Aſtronomiæ inſtauratoribus, de* MATTHIA *Hunga-*

Hungariæ Rege inventorum mathematicorum inſigni remuneratore, de FRIDERICO II *Daniæ & Norwegiæ Rege atque* RUDOLPHO II *Imperatore* TYCHONIS *Mecænatibus, de* FERDINANDO, *magno Etruriæ Duce*, GALILÆI *Protectore, de* CAROLO II & LUDOVICO XIV *Angliæ & Galliæ Regibus, Societatum Scientiarum conditoribus, de Duce* BURGUNDIÆ, *Elementorum Geometriæ ſcriptore, & de pluribus aliis Principibus ſummis dicamus: Eccur enim e longinquo petenda ſunt exempla, ubi domeſtica proſtant? Cur ad vetuſta provocandum, ubi præſentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ* WILHELMUS IV. *Haſſiæ Landgravius ſucceſſu feliciſſimo, quo* TYCHONI, *Phœnici illi Aſtronomorum, judice* HEVELIO, *palmam dubiam reddidit; Aſtronomiæ & Mechanicæ inſtaurandæ gratia Caſſellis molitus eſt. Et Orbis univerſus admiratur, quæ Magnus Parens Tuus*, CAROLUS, *Sapientis cognomen inſtar* ALPHONSI *dudum meritus, in omni Matheſi ac Philoſophia experimentali præſtitit, atque munificentiam tanto Principe dignam deprædicat, qua Artes mathematicas & Naturæ cognitionem promovet. Tu*, PRINCEPS SERENISSIME, *qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroem in bello, Regnatorem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis Mathematicis magno æſtimandis ſecundus. Quare cum Elementa mea Matheſeos univerſæ multo auctiora novoque habitu induta, ut Opus plane novum exiſtimari debeant, denuo in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam & praxin ſternitur, veræque methodi leges, ad accurate & utiliter philoſophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime neceſſariæ, animo Lectoris ſenſim ſenſimque inſtillantur; nullus dubitavi*, PRINCEPS SERENISSIME, *ad pedes*

Tuos ea deponere, certo perſuaſus Tibi non improbatum iri meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis ſtudium. Deus Te ſervet, Principum Haſſiæ Decus! Ita vovet,

SERENISSIME PRINCEPS,

DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

MARBURGI d. 8.
Martii 1730.

Humillimus cultor
CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆ-

PRÆFATIO.

ETSI nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint Viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti, divina illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum Veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ in dies magis magiſque excolantur & exploſa loquaci ſophiſtica in Scholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad Philo-

ſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in Scientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium † autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam; non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui conviciis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant, quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum HOROCCIO * loquar) *pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant:* cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quominus evincam, non eſſe Mathematicos

† Autor ſum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus* MELANCHTHON, vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed Philoſophicis, ſed Theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis* VOGELINI Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quaſdam hinc inde adſpergemus, conſenſum *Philippeorum* cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram MELANCHTHON: *Scio*, inquit, *has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quaſdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.*

* In *Aſtronomia* Kepleriana *defenſa atque promota*, c. 1. p. 23.

maticos (liceat mihi denuo HOROCCII verbis ‡ uti) *tam perfrictæ frontis, ut abſurdas quaſvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium breviſſimo inanis gloriæ ſtatu intumeſcant & inter inconditos plaudentium ſtrepitus placide ſibi adulentur*; multo minus ita dibuccinare laudes ſuas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis eſt, qui Scientias mathematicas & rerum evidentia ac ſublimitate, & demonſtrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe ſuperiores mentem perficere negare auſit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non diſtinguit; qui denique culmen perfectionum non proſpicit, ad quod menti pervenire datum eſt. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, ſi non modo clara ab obſcuris, diſtincta a confuſis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus diſcernere valebis, ſed & ipſemet fueris exactus & perſpicuus in definiendo, ſolers & circumſpectus in obſervando, ingenioſus & accuratus in experimentando, ſeverus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonſtrando, patiens & profundus in meditando, ſagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæſo, comparantur habitus tam præclari? Non niſi crebro exercitio. Multus ergo ſis neceſſe eſt in notionibus evolvendis, in demonſtrationibus concipiendis, in problematibus reſolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda eſt opera. Cum adeo diſciplinas, quæ huic ſcopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui

** 2 Mathe-

‡ In *Prolegomen.* p. 8.

mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; ſtudium mathematicum ad acuendum judicium apprime neceſſarium pronunciamus & ſine eo ad ſolidam rerum cognitionem perveniri poſſe negamus. *

Equidem non ignoro, homines quoſdam, cum ſint in Matheſi hoſpites ac plane rudes; ſe jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Matheſi alienis peſſime judicantes: veruntamen quod ad tam inconſiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) ſane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, ſibi rem cum Mathematico fuiſſe. Quid ſi Agrimenſorem viderit, aut Architectum, aut Conſpicillorum politorem, aut Inſtrumentorum fabrum, aut Virum, cui data eſt docendi quidem, ſed non ſciendi Matheſin poteſtas? Quis enim adeo inſanus eſt, ut unumquemque cenſeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non inſolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheſeos apprime peritum, quem Profeſſores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam poſt fata mactant, idem tamen a Mathematicis ſummis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheſeos imperitus appelletur. Enimvero etiamſi hoc demus, Artis noſtræ oſorem audiviſſe Mathematicum de rebus ad Matheſin non ſpectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim niſi judicaret qui ingenii

* MELANCHTHON, loc. cit. *Si qui non totos ſe huic ſtudio dedent, tamen his ad judicia formanda --- opus eſt cognitione Elementorum Geometriæ.* Idem paulo ante: *Cum demonſtrationes Geometriæ maxime ſint illuſtres; nemo ſine aliqua cognitione hujus artis perſpicit, quæ ſit vis demonſtrationum, nemo ſine ea erit artifex methodi.*

ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo ſapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret diſcrimen; nec concedendum erat, in Matheſi cum laude verſatis res quaslibet profundius ſcrutari datum eſſe. Denique ſi vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad ſe non pertinentibus male judicaſſe; hinc ſaltem colliges, ipſum occaſione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non ſemper familiare, ſtatuiſſe.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata ſibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, ſi qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes ſe ſolos eſſe principia veritatis; ſed quod Matheſeos cultura reliquis ſtudiis præmiſſa efficiat, ut alias diſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſcio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reipublicæ præſunt, caverent ne ad cetera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reipublicæ faciem contueremur †. Ut enim taceam, quæ a doctrina in Eccleſiam

 &

† MELANCHTHON, loc. cit. *Jacent deſertæ & neglectæ Artes mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas* (quidni & noſtra?) *juventutem ab hac vera Philoſophia ad inſulſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e Scholis, annitendum erat, ut pura & nativa Philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reipublicæ perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.*

& Rempublicam redundant, emolumenta, plurimum refert, ſi, qui ob eruditionem utrique præficiuntur ſint aſſidui, conſiderati, moderati & veritatis amantes, quos Matheſeos ſtudium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet uſum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoſcere ſtudent earumque uſum ſcrutari geſtiunt, eos ad Mathematum culturam invitamus. Oſtendet Algebra atque Geometria ſublimior, nihil eſſe tam abditum, quin detegatur: docebit Aſtronomia cum Geographia, nihil eſſe a ſenſibus hominum tam remotum, quin id ſatis diſtincte cognoſcere & accurate dimetiri valeamus: teſtabitur Calculus aſtronomicus, quanta certitudine futura Cœli phænomena prædicere liceat, etſi Genius nullus motuum, quibus ſidera feruntur, leges Aſtronomis revelaverit: Optica cum Aſtronomia diſcrimen inter repræſentationes rerum in intellectu & in imaginatione monſtrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analyſis regulas generales ſuppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum ſenſibus compeſcatur imaginatio, ne meditationes turbet: Methodus denique mathematica rectum rationis uſum manifeſtabit.

Quanta ſit vis Mathematum in Scientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydroſtatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Aſtronomia & Geographia abunde perſpicitur: quæ omnes argumenta quædam Phyſica ſolidius atque profundius pertractata exhibent, quam ſine Matheſeos principiis fieri poterat. Nonne enim Phyſici eſt explicare motum, gravitationem corporum, proprietates aëris, Phænomena viſus, ſtructuram Univerſi, naturam & pro-

proprietates corporum Mundi totalium? Quod ſi vero quæ de motu ſolidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydroſtatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aëre in Aërometria, de viſu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Aſtronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iiſdem argumentis in Phyſicorum ſyſtematibus occurrunt, demtis præſertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus deſcripta ſunt; quantum deſcriminis intercedat inter doctrinas phyſicas principiis mathematicis ſuperſtructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc deſiderant, illicò conſtabit. Unde non miramur *Robertum* BOYLIUM, de Scientia naturali experimentando præclare meritum, ita ſcribentem: † *De Mathematica nonnihil tibi propoſiturus ſum, eum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) ſeducaris Philoſophorum iſtorum modernorum autoritate, qui cum Phyſici objectum ſit materia, mathematicas diſciplinas, tanquam abſtractis ſaltem quantitatibus & figuris occupatas, ſtudio naturali obeſſe magis, quam prodeſſe contendunt. Quamvis enim opinionem ipſius* KEPLERI, *trium Imperatorum Mathematici aliorumque Aſtronomorum recentium abſurdam, hominibus perſuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius abſolvendum non omnino idoneum reddere poſſit, reſtabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in ſpecie Mechanicis, Mathe-*

† In *Conſiderationibus circa utilitatem Philoſophiæ naturalis experimentalis*, Exercitat. VI. §. 1. & 2. p. m. 483.

Mathematicæ in Phyſica uſum ingentem mihi demonſtrantibus, ſæpe jam exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & ſtudium Algebræ ſpecioſæ, quam puer ferme addidici, majorem impendiſſem partem temporis & induſtriæ, quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me integrum Tractatum ſcripſiſſe memini) aliiſque practicis Mathematicæ partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: * *Vereor, implorandam eſſe à Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, ſi in Matheſi magis pollerem, accuratius tractaſſem.* Alibi nimirum oſtendi †, tum demum in Scientia naturali ad certudinem ſeu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, ſi Matheſis ad Phyſicam applicetur.

Niſi utilitates, quas Matheſis ad vitam affert, ſponte ſua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Hydraulicæ uſus in Oeconomia ampliſſimus facile oſtendi, ſed etiam evidenter demonſtrari poſſet, maximam felicitatis humanæ partem Matheſi ſuperſtructam: ut taceam commoda, quæ Matheſis præſtat abſolutis ſtudiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, ſi in illa fuerint hoſpites ac peregrini.

Cum adeo diſciplinarum mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, deſiderari adhuc Matheſeos univerſæ Elementa, quæ ad illas conſequendum ſufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheſeos univerſæ publici

* In Præfat. ad *Nova Experimenta Phyſico-Mechanica de vi Aëris elaſtica.*
† In Præfat. ad *Elementa Aërometriæ*, A. 1709. ſeorſim edita.

blici juris feci, in quibus ea potiſſimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermiſi, quarum non adeo manifeſtus eſt uſus. Dum liber adhuc ſub prælo ſudabat, contigit ut multi eundem expeterent †: quo ipſo adductus Bibliopola deſiderabat, ut eundem in ſermonem Latinum transfunderem. Hujus ego deſiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo deſtinaveram, cum conſultius mihi videretur, ſi theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus compoſito fieri par erat, ut Latinum ſcilicet etiam ſatisfaceret ad ſublimiora tendentibus. Quæ igitur ſermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt, novoque ordine digeſta ſunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus iſtiuſmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod ſex, minimum quinque per diem horas inſtituendæ juventuti Academicæ, cum in Matheſi, tum in Philoſophia impendam; varia obſtacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam ſumptus in editionem fecerat, inſtabat ut opus cœptum perficerem; ſingulas fere propoſitiones typis deſcribendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ eſſent, typothetis ſcilicet quotidie penſum ſemidiurnum a manu mea exſpectantibus. Quodſi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure diſplicent, ea nec mihi placere ſcias velim. Si totum diſplicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce

† Elementa iſta Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis reſcripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adſpexit.

utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem, non ſine operæ, ſumptuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: Ex his unuſquiſque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit: reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his Elementis etiam inſtar Lexici Mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex Euclide paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere. Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ, ipſis Calendis Octobris A. 1713.

Plato apud *Theonem Smyrnæum*, Cap. I. p. 20.

Adoleſcentibus eorumque ætati conveniunt Diſciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

MONITUM

MONITUM AUTORIS
DE EDITIONE NOVA.

NOvam horum Elementorum Editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in ſingulis diſciplinis ea adjecimus, quæ adhuc deſiderari poſſe videbantur & viam ad ulteriora ſternunt: quo ipſo contingit, ut diſciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in Editione priore per duos Tomos digeſta fuerant, in hac poſteriore quatuor Tomis complecti neceſſe fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ paſſim interſperſa ſunt, Arithmeticæ acceſſerunt Capita nonum & decimum integra, de fractionibus decimalibus & ſexageſimalibus; Geometriæ Caput ſecundum partis poſterioris de ſectione & ſitu planorum; Trigonometriæ & Algebræ Problemata varia, quæ vel utilitate ſeſe commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum inſinuata. Acceſſere etiam tum Geometriæ, tum Analyſi finitorum, tum Analyſi infinitorum figuræ novæ Tabulis æneis inciſæ. Et quoniam Philoſophiam certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capeſſendam animi defæcati præparentur,

nuperque in Opere Logico † methodum, quæ convenit doctrinæ ſolidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonſtrationum formam diſtincte expoſuimus; ideo demonſtrationes ita digeſſimus, ut exempla regulis ad amuſſim reſpondeant, & Elementa hæc manu aſſidua volventibus naturalis ratiocinandi modus ſua veluti ſponte ſeſe inſinuet, naſcanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis reſpondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his Elementis attenta mente perlegendis fuerint aſſidui fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum ſperamus, maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum, d. 11. Martii A. 1730.

† Prodiit A. 1728. in 4°.

MONITUM

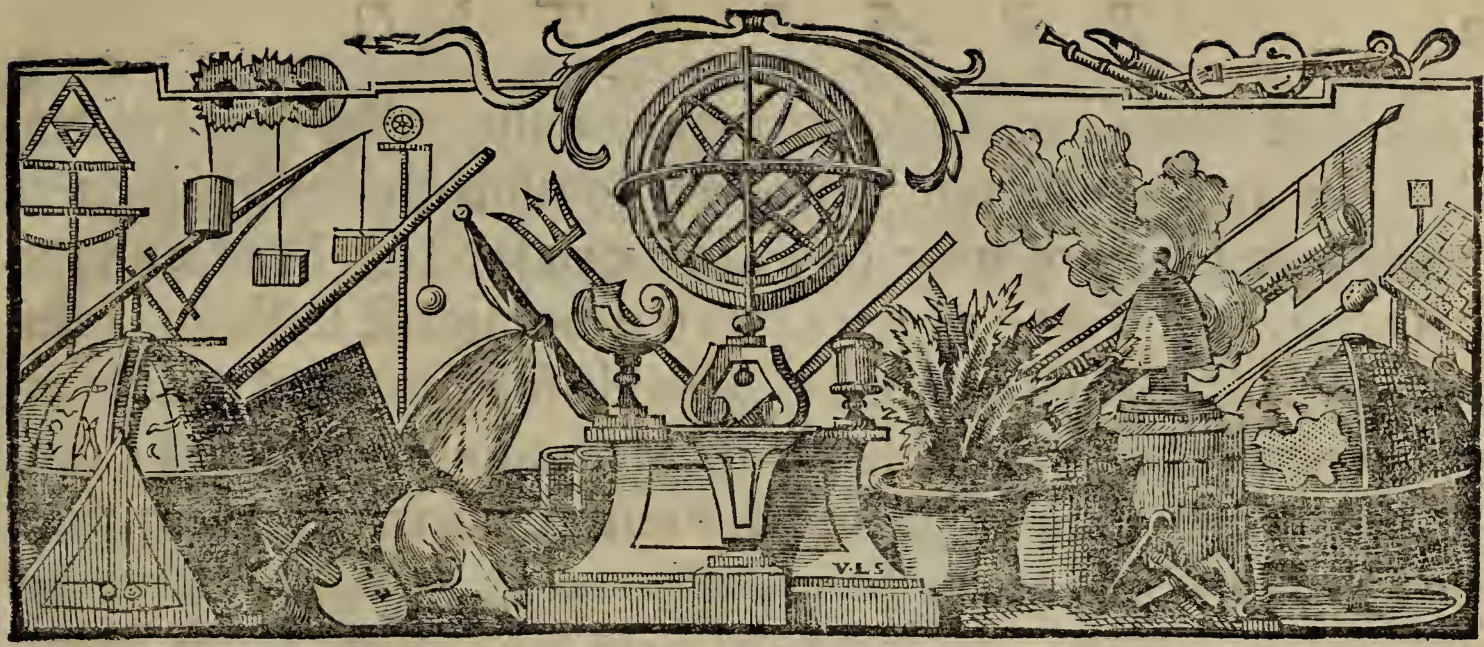
MONITUM AUTORIS
DE
EDITIONE NOVISSIMA.

ELEMENTA noſtra Matheſeos univerſæ abunde ſeſe commendarunt iis, qui brevi temporis ſpatio ac magno laboris compendio vel eos in Matheſi progreſſus facere decreverunt, ut ad præclara Summorum Mathematicorum inventa, quæ noſtro ævo magno numero proſtant & in dies augentur, pateret aditus. Quoniam vero in Editiones anteriores plurima irrepſerunt vitia typographica, nonnulla etiam, quæ feſtinanti calamo debentur; optandum omnino erat, ut correcta extaret Editio, ne quid utilitati eorum decederet. Nemo ignorat, quam vaſtum ſit illud reformandæ Philoſophiæ opus, quod condere cœpimus. Ea jam ſumus ætate, quippe in anno climacterico magno conſtituti, ut, ſi vel maxime Numen optimum vitam ac corporis animique vires diutiſſi-

me

me conſervet, eidem tamen abſolvendo non ſufficere videatur reſiduum adhuc temporis ſpatium, præſertim cum minimam ejus partem iſti labori impendere detur. Hortantur nos plurimi tam Exteri, quam Germani, ut tempus omne in Opere philoſophico continuando conſumamus, additis rationibus, quæ plurimum apud me valere debent. Nobis itaque conceſſum minime videbatur, ut correctam Elementorum Matheſeos Editionem daremus. Enimvero cum a primis, quod Græci ajunt, unguiculis ſtatuerimus non nobis vivere, ſed aliis, aliisque inſerviendo conſumi; Elementa noſtra revidere &, quæ irrepſerunt, errata emendare placuit, eorundemque Editorem hortati ſumus ut correctionem typorum committeret Mathematum perito & in iis corrigendis ſedulo. Quodſi tamen nonnulla forſan adhuc attentionem noſtram ſubterfugerint, ea Lector benevolus boni ac æqui conſulet.

DE



DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui Methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam, præter hanc unicam, cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent quot-

quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumque in finem ſtudium mathematicum tantopere commendant Viri docti ac intelligentes, quos inter (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHAUSIUM nominaſſe ſufficiat, quorum in Philoſophia rationali illuſtranda ſolertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de Methodo mathematica Commentationem, mole exiguam, ſed rerum ubertate gravem, Elementis Matheſeos univerſæ præmiſi, ne in iis deſiderari paterer induſtriam meam, quorum ad recte philoſophandum quam maxime neceſſaria eſt cognitio: (*d*) inprimis cum exiguus admodum ſit eorum numerus, quibus interiora methodi ſunt perſpecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc Commentatio de Methodo, ſingulari cum attentione perlegenda, &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa evolvuntur, præcepta methodi ſunt relegenda; tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis ſatisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudium vere acuet intellectum,

(*a*) In Tractatu *De directione ingenii* (qui inter *Opera poſthuma* idiomate Anglico *Londini* 1706, edita habetur) p. 30.

(*b*) *De inquirenda veritate*, lib. 6. c. 6. & 7.

(*c*) In *Introductione ad Matheſin & Phyſicam* Germanice conſcripta p. m. 17. & ſeqq.

(*d*) Uberius huc ſpectantia expoſuimus in Logica, ſeu Philoſophia rationali.

CON-

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus mathematica definitur §. 1, *& ejus forma generaliter deſcribitur* §. 2. *Hæc ut ſpecialius explicetur, docetur quid ſint Definitiones* §. 3, *& harum gratia traditur explicatio Notionum, tum in genere* §. 4, *cum in ſpecie clararum* §. 6, *obſcurarum* §. 7, *diſtinctarum* §. 8, *confuſarum* §. 9, *adæquatarum* §. 10, 11, *& inadæquatarum* §. 12. *Oſtenditur, quænam notiones in numerum Definitionum admittantur* §. 13, 14, 15. *Definitiones dividuntur in nominales & reales* §. 16, 17, 18. *Exponuntur quatuor modi inveniendi Definitiones nominales* §. 19, 20, 21, 22, *& quatuor alii inveniendi reales* §. 25, 26, 27, 28. *Indicatur quomodo innoteſcat, quod definitiones tam nominales* §. 23, 24, *quam reales* §. 29, *poſſibiles ſint. Declaratur indoles Axiomatum & Poſtulatorum* §. 30, 31, 33, *& abuſus quidam notantur* §. 32. *Diſſeritur quoque de Experientia* §. 34, 35, 36, 37. *Definitur Theorema* §. 38, *& diſtincte agitur de propoſitionis partibus, Theſi, atque Hypotheſi* §. 39, 40, 41, 42, *& de Demonſtratione* §. 43, 45, 47; *ubi etiam docetur uſus citationum Mathematicis in demonſtrationibus ſolennis* §. 44. *Similiter declaratur Problematum* §. 48, *Corollariorum* §. 49, 50, *Scholiorum* §. 51, *ratio. Aſſeritur Methodi mathematicæ univerſalitas* §. 52, *& ratio redditur, cur interdum Matheſis judicium acuere debeat* §. 53, *interdum minus* §. 54. *Denique reſpondetur ad objectiones, quæ contra Methodum mathematicam a nonnullis afferri ſolent* §. 55, 56, 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. PER *Methodum mathematicam* intelligo, Ordinem, quo in tradendis dogmatis ſuis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a Definitionibus: inde ad Axiomata & Poſtulata; in Matheſi mixta, ad Experientias, ſeu Obſervationes, progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata ſuperſtruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, ſi e re viſum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter ſe diſtinguuntur, & unde, quæ de ipſis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræſentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus diſtinctè tradidit ſagaciſſimus LEIBNITIUS (*a*): quæ quanti ſit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Eſt ſcilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam ſufficit; ex. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obſcura* eſt *notio*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam non ſufficit. Talis eſt, ex. gr. plantæ, ad cujus conſpectum dubitas, utrum ea ſit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui ſuevit.

§. 8. Clara *notio diſtincta* habetur, ſi notas recenſere valeas, ex quibus rem oblatam recognoſcis: ex. gr. quod circulus ſit figura, linea curva in ſe redeunte terminata, cujus ſingula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter diſtant.

§. 9. *Confuſa* eſt *notio* clara, ſi notas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, recenſere minime valeas, utut in tales ſit reſolubilis: qualis eſt, ex. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Diſtincta *notio adæquata* dicitur, ſi & notarum, ex quibus componitur, notiones diſtinctas habueris; ex. gr. notio circuli paulo ante tradita cenſetur adæquata, ubi curvæ in ſe redeuntis, puncti intermedii, diſtantiæ æqualis, & terminationis notiones diſtinctas habueris.

§. 11. In hac analyſi cum progredi liceat, donec ad notiones irreſolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifeſtum eſt, in præſenti tamen non explicandos. Sufficit monuiſſe, quod notiones quædam confuſæ admitti queant, quarum evolutio ad demonſtrationes non apprime neceſſaria. Ita EUCLIDES non reſolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi, & figurarum regularium ingrediatur. Propoſitiones enim, ad quarum demonſtrationem neceſſaria erat, facile ipſi ſine probatione concedi poterant; ex. gr. quod æqualia eidem tertio ſint æqualia inter ſe; quod figuræ ſibi mutuo congruentes ſint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta ſint æqualia, &c. Defectum ſcilicet analyſeos ſupplent propoſitiones, quæ per experientiam ſatis certæ ſunt.

§. 12. *Inadæquata* eſt *notio*, ſi notarum, quæ diſtinctam ingrediuntur, nonniſi confuſas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum mathematicarum non admittuntur niſi notiones diſtinctæ, &, quantum fieri poteſt, aut pro re nata ſufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in Definitionibus ſubſequentibus non utuntur vocibus, niſi vel ex antecedentibus, vel aliunde, ſatis intelligatur, quæ res iis ſubjiciantur.

§. 15. Et, ſi quando notione confuſa contenti ſumus, res, ad quam ſpectat, obvia.

(*a*) In *Actis Eruditorum*, An. 1684. p. 537.

obvia ſit, neceſſe eſt, ut vel præſentem quandocunque libuerit percipere, vel ſæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminiſci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas claſſes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* eſt enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis diſtinguendam ſufficientium. Talis eſt Quadrati, ſi figura quadrilatera, æquilatera, rectangula eſſe dicatur.

§. 18. *Definitio realis* eſt notio diſtincta rei geneſin, hoc eſt, modum quo fieri poteſt, exponens. Talis in Geometria eſt Circuli, ſi per motum lineæ rectæ circa punctum fixum deſcribi concipitur.

§. 19. Ad Definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, ſi ad rem præſentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Aſtronomis innotuit, Eclipſin Lunæ eſſe privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero diſtinguenda ſunt quæ diſtingui poſſunt; eaque fini ſingula primum ſigillatim conſiderari, mox inter ſe conferri debent, ut Definitio notio diſtincta evadat, qualis (*vi* §. 13) eſſe debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo inveſtigatas expendentes, varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omiſſis generaliores evadunt. Ex. gr. Si ex definitione Trianguli quod ſit ſpatium tribus lineis comprehenſum, linearum numerus expungatur; notionem Figuræ habebis, quod ſit ſpatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in Definitionibus obvias conſideres, alias iis geminas comminiſci datur: qua ratione Definitiones aliæ inveniuntur. Ex. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem ſubſtitue, ut Definitio Figuræ quadrilateræ, aut multilateræ cujuſcunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (*vi* §. 20) determinationes quædam omitti, ſic etiam novæ ſuperaddi poſſunt. Ex. gr. in definitione trianguli, ſpecies & ratio linearum, quam inter ſe habent, determinari poteſt. Ponamus nimirum lineas eſſe rectas; generalis notio trianguli in notionem Trianguli rectilinei abit. Ponamus porro eſſe latera omnia inter ſe æqualia; notio trianguli generalis in notionem Trianguli æquilateri degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam poſita. Quis enim, quæ actu exiſtere cognoſcit, utrum eſſe poſſint, nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ ſe percipere ſibi conſcius eſt: id quod valde abſonum. Ex.gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipſin pati poſſit, dubitare nequit. Idem de illis Definitionibus judicium eſto, quæ a poſſibilibus abſtrahuntur.

§. 24. Alia vero Definitionum, per methodum tertiam & quartam inventarum, eſt ratio. Utrobique enim arbitrium regnat; ſive, juxta tertiam, determinationes datas in alias ſimiles convertas;

vertas; ſive, juxta quartam, datis alias ſuperaddas: noſtrum autem arbitrium nullam rebus exiſtendi neceſſitatem imponit. Licet ex. gr. ſpatium tribus lineis rectis comprehendi poſſit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter ſe æquales eſſe poſſint. Tales itaque Definitiones poſſibiles eſſe demonſtrandum eſt: id quod Geometræ circa figuras præſtant, dum earum conſtructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales, vel a priori inveniuntur, vel a poſteriori innoteſcunt. A priori Definitiones reales inveſtigabis, ſi ex plurium poſſibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam poſſibile producis; ex. gr. ex combinatione machinarum ſimplicium machinam quandam compoſitam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo caſui perſæpe aliquid datur. Exemplo eſt compoſitio teleſcopii, per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante BORELLO.

§. 26. Difficilius idem præſtatur; ſi, ex data Definitione nominali, realis invenienda. Hoc enim in caſu notiones diſtinctas eorum evolvere tenemur quæ in iſta continentur; ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur: poſtea cognitiones jam ante acquiſitas mente recolere debemus, viſuri num talia ſuccurrant, per quæ rei formationem concipere licet. Ex. gr. datur in Aſtronomia Definitio nominalis Eclipſis Lunæ, quod ſcilicet ſit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda eſt Definitio realis ejuſdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi iſtud a Sole ſecundum lineas rectas in corpus lunare incidere, & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hiſce corporibus interpoſitam in locum Soli oppoſitum projicere umbram ſuccurrit; haud difficulter innoteſcit, Eclipſin Lunæ oriri, ſi ea umbram Terræ ingrediatur.

§. 27. A poſteriori Definitiones reales innoteſcunt, ſi rei formationi præſentes attendimus. Ex. gr. Si quis videat in campo circulum deſcribi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is geneſin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad Definitiones reales quoque pervenitur, dum compoſitum totum in ſuas partes ſimplices reſolvitur; quod in organicis potiſſimum locum habet. Hac ratione, ex. gr. ſtructuram machinæ jam extantis aſſequimur.

§. 29. Circa hoc Definitionum genus duo conſideranda ſunt, antequam de illarum poſſibilitate judicare licet; nempe 1°. utrum ea exiſtant, aut exiſtere poſſint, nec ne, quæ ad geneſin rei concurrere aſſumimus; 2°. num ab iis proficiſci queant, quæ in formatione rei iiſdem tribuimus; id quod ex natura Definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem, vel experientia, vel eorum quæ per conſequentias legitimas alio tempore deduximus, remi-

reminiſcentia conſequimur. Ita, ex. gr. in Definitione Circuli ſuperius (§. 27.) tradita, per experientiam claret lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi poſſe. Aſt, in Definitione Eclipſis lunaris, ratione, experientia licet ſtipata, aſſequimur Lunam Telluris umbram ingredi poſſe.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales, cum in ſe conſiderari, tum inter ſe conferri poſſunt. Quicquid ex conſideratione eorum, quæ in una Definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, ſi quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Poſtulatum* vero, ſi quid effici poſſe affirmet, vel neget. Ex. gr. Ex geneſi Circuli, liquet omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter ſe æquales eſſe, cum unam eandemque lineam in diverſo ſitu referant. Hæc adeo propoſitio in Axiomatum numero habetur. Aſt dum per eandem Definitionem intelligitur, ex quovis puncto, quovis intervallo, circulum deſcribi poſſe: id inter Poſtulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur Axiomatum & Poſtulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoſcitur, demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quam primum realitas Definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *Propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac Axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in Axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt ipſum EUCLIDEM, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in Axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ, aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet, per recordationem vel maxime confuſam eorum quæ olim ſæpius experti ſumus, aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus; immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes; quale ex. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe, item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. EUCLIDIS igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri Axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo, ſi verum fateri fas eſt, vera Axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum Axiomatibus & Poſtulatis etiam *Experientiæ* nonnunquam confunduntur. Experiri autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus: ex. gr. dum, accenſa candela, conſpicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares

gulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans caſum ſingularem in medium proferre tenetur, niſi vel ſenſui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Matheſi exactiſſime obſervatur. Neque enim, ex.gr. in Aſtronomia Solis orientis & occidentis Obſervationes recenſentur; utpote quotidianæ, ac omnibus ſatis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum Obſervationes, a diverſis Aſtronomis, tempore diverſo, diverſisque inſtrumentis celebratæ, fideliter referuntur; cum non in cujuſvis poteſtate exiſtant.

§. 36. Mathematici quoque Experientias a concluſionibus inde deductis accurate diſtinguunt; aliis ut plurimum has cum iſtis confundentibus. Ex. gr. quod, candela accenſa, corpora, quæ ante non apparebant, in conſpectum prodeant, per Experientiam innoteſcit. Quodſi vero perpendens, lumen in cauſa eſſe cur tenebris diſcuſſis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo ſe habentium eundem eſſe effectum, infero; Quicquid lumine colluſtratur, videri poteſt: hæc propoſitio non in Experientiarum, ſed concluſionum per legitimam conſequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Iſtiuſmodi concluſiones, omiſſis Experientiis, commemorantur, ſi modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perſpectus. Ex. gr. maximam Solis declinationem non immediate metimur, ſed ex data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis in ſolſtitio invenimus. Proprias igitur de ea obſervationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in ſolſtitio obſervatam annotet opus eſt; ſed ſufficere poteſt, ut ipſam declinationem ſtatim indicet. Si enim conſtet, quantam elevationem æquatoris aſſumſerit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod ſi vero non appareat, quomodo propoſitio data ex prævia quadam Experientia eliciatur; caſus ſingularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari poſſit. Quod enim aliquid perceperis cum demonſtrare nequeas; ut credatur jure poſcis: ſed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini ſubſit, ut fides deductis habeatur ſine ratione flagitas.

§. 38. Propoſitio theoretica ex pluribus Definitionibus inter ſe collatis eruta *Theorema* appellatur. Ex. gr. Si, in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipſis eorundem Definitionibus, partim ex aliis ipſorum proprietatibus jam ante erutis infertur; Parallelogrammum eſſe Trianguli duplum: ea propoſitio in Theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem ſunt, quæ in omni Theoremate attentionem merentur, *Propoſitio* nempe atque *Demonſtratio*. Iſta quidem enunciatur, quid rei cuidam ſub certis conditionibus convenire poſſit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipſi convenire concipere valet.

§. 40. Abſolute poſſibile non eſt niſi Ens a ſe: reliqua vero omnia tantum admiſſo alio poſſibilia eſſe intelliguntur, hoc eſt, nil eorum eſt ſine quadam conditione. Hæc igitur in Propoſitione una exprimenda. E. gr. triangulum eſt dimidium parallelogrammi, ſi baſes & altitudines fuerint ſigillatim æquales. In Propoſitione itaque, tam baſium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet Propoſitio in *Hypotheſin* & *Theſin* commode diſtinguitur; quarum iſta conditiones recenſet, ſub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur quod, vel affirmatur, vel negatur. Ex. gr. in Propoſitione allata, Hypotheſis eſt, *ſi triangulum & parallelogrammum ſuper æquali baſi & ejuſdem altitudinis exiſtant;* Theſis autem, *illud hujus dimidium eſt.*

§ 41. Notandum vero, ſi in ipſa rei Definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, Hypotheſin diſtincte non exprimi. Ex.gr. ſi tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; Hypotheſi carere videtur Propoſitio: quæ tamen ſtatim comparet, ſi pro voce trianguli definitionem ejus ſubſtituas. Ita enim habet Propoſitio: ſi quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim ſumtos duobus rectis æquales. En Hypotheſin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in Propoſitione affirmativa neceſſarius nexus inter Hypotheſin atque Theſin; in negativa autem nullus concipi poteſt, ſed hæc illi repugnat. Quoniam ſcilicet in ſubjecto deprehenditur, quod Hypotheſis involvit; ei quoque convenire debet, quod in Theſi continetur. E. gr. in hoc Theoremate, quod *triangulum ſit dimidium parallelogrammi ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus baſin & altitudinem baſi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein aſſerimus, quod ſit parallelogrammi dimidium. Poſterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter Theſin & Hypotheſin in Propoſitionibus affirmativis, repugnantiam in negativis, *Demonſtratio* manifeſtat. Eorum igitur Definitiones, quæ in Hypotheſi ac Theſi continentur, eorundemque proprietates, ex iſtis derivatæ, aut aliunde cognitæ, Demonſtrationum principia exiſtunt. Quoniam vero in Matheſi principia non admittuntur, niſi quæ ante fuerunt evicta; Definitiones ac Propoſitiones, quibus Demonſtrationes ſuperſtruuntur, citari ſolent; partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris conſtet, unde ipſorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes Definitionum, Axiomatum, Poſtulatorum, Theorematum & Problematum non exiguum habent uſum; nec ſine ratione in Matheſi ſingulis cogitationum generibus ſingula nomina imponuntur. Demonſtratio namque non convincit, niſi principiis demonſtrandi extra dubitationis aleam poſitis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera ſupponenda ſint, antequam

veritatis propoſitionis datæ convinci poſſis. Et quoniam Definitiones primi conceptus exiſtunt, Axiomata vero ex iis immediate deducuntur, Theoremata vero, vel immediate, vel mediate, ex iiſdem derivantur; ex nomine veritatis cujuſlibet, ad quam in Demonſtratione provocatur, ſtatim addiſcitur, utrum multa ſupponenda ſint, nec ne, & quo ordine ſit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem Definitionum, Axiomatum & Poſtulatorum, Theorematum & Problematum, dijudicandam peculiaribus artificiis opus ſit; nomina veritatum citatarum ſimul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonſtrandi perſuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero eſt ratio ex principiis concluſiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de ſyllogiſmo agitur, dudum expoſita. Sunt enim Demonſtrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi ſyllogiſmorum concludantur, omiſſis ſaltem præmiſſis, quæ vel ſponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut ſit Demonſtratio, præmiſſæ ſyllogiſmorum novis ſyllogiſmis tamdiu probandæ ſunt, donec perveniatur ad ſyllogiſmum, in quo præmiſſæ ſunt, vel Definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, vel Propoſitiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonſtratu haud difficile foret, (*a*) genuinam Demonſtrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non poſſe, niſi cogitationes noſtræ juxta regulas ſyllogiſticas dirigantur; his tamen ambagibus in præſenti opus non eſt. Cum enim de quæſtione facti diſputemus; exempla allegaſſe ſufficit. Scilicet non ignotum eſt, CLAVIUM Demonſtrationem Propoſitionis primæ Elementi primi EUCLIDIS in ſyllogiſmos reſolviſſe: immo HERLINUM atque DASIPODIUM ſex priora Elementa EUCLIDIS & HENISCHIUM integram Arithmeticam per ſyllogiſmos in forma exhibitos demonſtraſſe.

§. 47. Equidem non ignoro eſſe, hac noſtra præſertim ætate, non paucos qui ſibi perſuadent Demonſtrationum mathematicarum formam a legibus ſyllogiſmorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; ſed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, ſed & attentione magis ſevera utentibus; quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & ſic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoſcerem. Fatetur certe LEIBNITIUS (*b*), Vir in Matheſi & omni eruditione reliqua ſummus, *firmam eſſe demonſtrationem, quæ præſcriptam a Logica formam ſervat.* Similiter *Johannes* WALLISIUS, Mathematicus profundus (*c*), agnoſcit, *id, quod in Matheſi proponitur probandum, ſyllogiſmi unius pluriumve ope deduci.* Immo

(*a*) Oſtendimus id in *Logica* §. 551, & ſeqq.

(*b*) *Acta Erudit.* A. 1684, p. 541. Conf. *Eſſais de Theodicée* p. 37, 40, 41, 73. (*c*) *Operum Mathem.* Vol. 3, f. 180, hoc eſt *Logic.* lib. 3, c. 22.

Immo ingenioſiſſimus etiam HUGENIUS (*d*) obſervavit, *paralogiſmos in Matheſi ſæpius vitia formæ exiſtere.* Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*e*) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum Virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu ſcilicet in Matheſi verſamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inſpectione non minus quam ex aliarum propoſitionum citatione, multæ præmiſſæ ſyllogiſmorum ſupplentur: ad quod ſi non ſatis attendatur, quam ſancte in Demonſtrationibus mathematicis leges ſyllogiſmorum cuſtodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus conſtant, *Propoſitione* ſcilicet, *Reſolutione*, ac *Demonſtratione.* In Propoſitione, quid fieri debeat, indicatur. In Reſolutione ſinguli actus ordine decenti recenſentur, quibus efficitur quod erat faciendum. Denique in Demonſtratione evincitur, factis iis, quæ Reſolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonſtrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypotheſin Reſolutio, Theſin vero Propoſitio conſtituit. Generalis enim omnium Problematum demonſtrandorum (ut jam innuimus) tenor hic eſt; Factis iis quæ Reſolutio præcipit, illud quoque efficitur quod erat faciendum. Quare non opus eſt, ut de Problematibus plura dicantur.

(*d*) *Acta Erudit.* A. 1711. p. 477.
(*e*) Vide eas in *Logica* §. 551, & ſeqq.

§. 49. Rationes ſubinde non deſunt, cur ad caſus ſpeciales applicentur Propoſitiones generales, & ex quibuſdam Propoſitiones ſæpe alias prona conſequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur Propoſitiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum Corollariorum genus demonſtratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in univerſum caſibus demonſtratum fuit, de hoc, vel iſto, in ſpecie ut denuo demonſtretur opus non eſt. Ex. gr. ubi de omnibus triangulis oſtenſum, tres angulos eorum una ſumtos duobus rectis æquari; idem in ſpecie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Aſt alterum Corollariorum genus demonſtrationem requirit. Quotieſcunque nimirum ex aliis Propoſitionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. Ex. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc Corollarium ſubjungatur; *in triangulo rectangulo unus ſaltem actu rectus angulus eſſe poteſt*: ratio illationis non negligenda, quod ſcilicet, poſitis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique, tam Definitionibus, quam Propoſitionibus, earumque Corollariis, ſubjungi ſolitis, obſcura declarantur, ad dubia reſpondetur, uſus doctrinarum indicatur, hiſtoria ac fontes inventionum deſcribuntur, &, ſi qua alia ſcitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inſeruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus univerſalitatem haud dubie agnoſcet; nec

 diffi-

diffitebitur ſine ea ad ſolidam rerum cognitionem perveniri haudquaquam poſſe. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo ſæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc uſque Mathematici fere ſoli, in Geometria inprimis, ejus leges ſancte cuſtodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis diſciplinis applicare ſtuduerunt; conatui tamen ipſorum eventus minime reſpondit. Etenim nunc notiones non ſatis evolverunt; nunc ſine probatione aſſumſerunt quæ maxime probari debebant; nunc per ſaltum ratiocinati ſunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poſſunt.

§. 53. Explicatæ Methodi legibus cum ex aſſe ſatisfiat, in Matheſi præſertim pura; non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant; hoc eſt, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoſcendam animum appellunt, accuratius, quam alii ſolent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale Demonſtrationum mathematicarum meditatio cenſeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex ſtudio Matheſeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quaſdam mathematicas, aliaſque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri ſolitas, addiſcunt. Licet enim in vita communi utiles exiſtant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non niſi a ſeria Demonſtrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Supereſt ut ad objectiones duas reſpondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre ſolent; præſertim cum ſatis prævideam non defuturos, qui eaſdem contra Elementa mea Matheſeos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1°. quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent: 2°. quod ordinem, quo generaliora & ſimpliciora ſpecialibus & compoſitis præponi neceſſe eſt, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco abſolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut ſatisfiat, explicandum eſt, quando Definitiones ſint ſuperfluæ, & quales eſſe debeant Propoſitiones ut probatione non indigeant: id quod ex fine Definitionum, atque indole Demonſtrationum redditur manifeſtum. Definitiones nimirum hunc habent uſum, ut vel ſubſequentibus aliis intelligendis inſerviant, vel principia demonſtrandi præbeant. Oſtendant igitur adverſarii Euclidem, aut Geometram alium, ullam dediſſe Definitionem qua, nec ad ſubſequentes explicandas, nec in Propoſitionibus demonſtrandis utuntur. Quamdiu vero exempla iſtiuſmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere deſinant, quod nimii ſint in definiendo, & ſuum potius errorem agnoſcant, quod Definitionibus non alium tribuant uſum, niſi qui in rebus definitis agnoſcendis & ab aliis diſtinguendis conſiſtit. Diximus porro ſuperius, præmiſſas ſyllogiſmorum tamdiu contiNUAN-

nuan-

nuandas eſſe, donec ad Definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, & Propoſitiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur niſi Propoſitiones identicæ, ac Experientiæ claræ, in quibus Notiones primæ fundantur. Reliquæ Propoſitiones omnes ſunt demonſtrandæ. Oſtendant igitur adverſarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, Propoſitiones identicas, & Notiones in Experientiis claris fundatas demonſtraſſe. Quamdiu vero hujuſmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere deſinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipſis videntur, & potius diſcant, quod in demonſtrando nunquam nimis accurati eſſe poſſimus; præſertim ubi extra Matheſin verſamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonſtrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo ſine in demonſtrando accurati eſſe nequimus. Eo nimirum ordine ſingula proponenda ſunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum ſatis experiamur, id fieri minime poſſe, ſi in unum cumulum congerantur, quæ de ſubjecto eodem cognoſci poſſunt; *Ordo ſcholæ* Philoſophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliiſque, quibus res profundius meditari datum eſt, *Ordo naturæ* retinendus.

ELEMENTA

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

NON dubito fore aliquos, qui mirabuntur quod Elementa Matheſeos univerſæ conſcribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero, quam perperam nonnulli Matheſin univerſalem appellant, eam ego ab ARITHMETICA diverſam non agnoſco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea conſiderant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio eſt, cur non aliæ ipſarum quam numerorum ſint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Matheſi univerſali vulgo tractari ſolent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potiſſimum doctrina ſpectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare ſolent, non integrum trado, quia in demonſtrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reſervatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus ſolius demonſtro, quia cum rigore demonſtrandi, quem mihi obſervandum propoſui, ea demonſtrandi ratio non ſubſiſtit; utpote in qua multa communiter ſine probatione aſſumuntur, quæ & a Veteribus demonſtrata, nec mihi ſine probatione concedi poſſe viſa ſunt, ubi ſolidam doctrinam cordi habueris. Veram autem

autem MATHESIN UNIVERSALEM in deſideratorum numero colloco; eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam menſuras convenientes præſcribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda neceſſaria ſunt; ea ad Analyſin rejeci. Tyrones, ſub initium, praxes arithmeticas ſolas, cum definitionibus, ſibi familiares reddere debent; theorematibus problematumque demonſtrationibus omiſſis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent; ut non modo eorum ſenſum clare perſpiciant, ſed eadem quoque memoriæ firmiter inſigant, quo in promptu ſint, quoties iis, vel ad demonſtrandum, vel ad inveniendum opus eſt. Iis intellectis, problematum demonſtrationes expendere, ac his perceptis inoffenſo pede ad theorematum demonſtrationes progredi licebit. Abſit autem, ut quis arbitretur omnibus calcandam eſſe hanc ſemitam. Quorum enim eſt major mentis acies, congenita vel aliis ſtudiis acquiſita, & facilius conſervatur attentio; illi Elementa integra eo ordine perlegere poſſunt, quo conſcripta ſunt. Uſus Arithmeticæ per diſciplinas reliquas omnes ſe diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiſcenda eſt. Quantus Arithmeticæ in vita civili uſus ſit, experientia loquitur: quantus in Phyſicis & aliis Philoſophiæ partibus, experientur quotquot, Matheſi abſoluta, ſolidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu poſſit, in ipſa pertractatione hinc inde annotavimus, &, ſi quis culturam convenientem ſtudio arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magiſtra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

1. ARITHMETICA eſt Numerorum ſcientia. Pars ejus *practica* eſt ſcientia computandi, hoc eſt, ex quibuſdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut ſi fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim ſumtis æqualis eſt.

SCHOLION.

2. *Patet adeo, Arithmeticam practicam eſſe methodum inveniendi ſpecialem. Ab ea igitur, ſi rite meditemur, regulas inveniendi generales abſtrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium conſiſtit. Dederunt aliqua huc ſpectantia* CARTESIUS, *cum in Tractatu* De methodo, *tum in iis, quæ* De ingenii directione *inter poſthuma habentur; &* R. P. MALEBRANCHIUS *in egregio opere* De inquirenda veritate. *Plura, quamvis paucis, nos damus infra* (§. 125).

DEFINITIO II.

3. *Unum* eſt, quod ita eſt aliquid, ut aliud præterea idem eſſe nequeat. Illuſtris LEIBNITIUS unum ſic definit: Si A ſit B, nec præterea D ponatur B, niſi A & D idem ſint, ponetur B unum.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* eſt abſtractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eædem* ſunt, quæ per eandem notionem agnoſcuntur: *diverſa* ſunt, quæ agnoſcuntur per diverſas.

SCHOLION.

6. *Ponamus ex. gr. A eſſe globum lapideum, B ſimiliter eſſe globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed ſi A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diverſæ. Quodſi A, B & C tantum ut globos conſideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO V.

7. Si A ſit unum, B ſit unum, C ſit unum, D ſit unum &c. nec tamen B, C, D &c. ſint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura*, ſeu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* eſt abſtractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A ſit idem cum B, C & D ſimul ſumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C, & D dicentur ejus *Partes*; & intuitu partis B, reliquas C, & D, &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

11. *Nempe ſi pro unitate linea recta ſumatur, numerus quoque exprimi poteſt per rectam: id quod infra in* Geometria *&* Analyſi *abunde patebit.*

SCHOLION II.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut ſub eadem definitione numeros, cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales, comprehendere valeamus.*

DEFINITIO IX.

13. *Numerus determinatus* eſt, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* eſt, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas.*

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodſi quæſiveris, quanta ea ſit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium aſſumit, & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diverſa unitate aſſumta per diverſum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum diſtincte intelligitur.*

DEFINITIO X.

15. *Æqualia* ſunt, quorum unum alteri ſalva quantitate ſubſtitui poteſt. *Inæqualia* ſunt, ſi pars unius alteri toti ſubſtitui poteſt.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti ſubſtitui poteſt; quod vero alteri, ſalva nempe quantitate, ſubſtitui poteſt, alteri æquale eſt (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis eſt.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte ſubſtitui poſſit (§. 15): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. *Signum æqualitatis eſt* $=$.

SCHOLION.

19. *Hoc ſigno primus uſus eſt* HARIOTUS Anglus (*a*), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* CARTESIO *adhibent Signum ſequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Autores* HARIOTO *antiquiores nullum æqualitatis ſignum occurrit.*

DEFINITIO XI.

20. *Majus* eſt, cujus pars alteri toti æqualis eſt: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis ſit (§. 16), & viciſſim B æquale parti ipſius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus eſt (§. 20).

HYPOTHESIS II.

22. *Signum majoritatis eſt* $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus uſus eſt* HARIOTUS (*b*). *Eum ſecuti Celeberrimus* WALLISIUS (*c*) *&* R. P. LAMY (*d*). *Aliis alia placent: pleriſque nulla ſunt.*

DEFINITIO XII.

24. *Similia* ſunt, in quibus ea eadem ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debebant. *Diſſimilia* ſunt, in quibus ea diverſa ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debent. Atque adeo *Similitudo*

(*a*) In *Artis Analyticæ praxi*, Sect. 1. f. 10.
(*b*) Loc. cit. (*c*) Vide *Arith.* c. 35. f. 186. Vol. 1. Oper. Mathem. (*d*) *Element. Geometriæ.* lib. 3. ſect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

militudo eſt identitas; *Diſſimilitudo* diverſitas eorum, per quæ res a ſe invicem diſcerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero; modo ſit iſtiuſmodi ut ſine alio aſſumto intelligi poſſit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas ſine alio aſſumto per ſe non intelligi, ſed tantum dari poſſit (§. 13, 14); Similia, ſalva ſimilitudine, quantitate differre poſſunt (§. 25), atque adeo quantitas eſt diſcrimen internum ſimilium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem diſtinctam primus eruit* LEIBNITIUS. *Dixit nempe* Similia, quæ non poſſunt diſtingui, niſi per compræſentiam. *Quoniam vero terminus* compræſentiæ *pleriſque obſcurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem ſubſtituere libuit. Ceterum res* compræſentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, ſi in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorſus inter ſe ſimilia eſſe. Illorum unum poſſideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodſi* Cajus *in præſentia* Grachi *horologium ſuum depromat; næ is attonitus ſibi perſuadebit horologium ſuum eſſe, quod* Cajus *manu tenet; at diverſum a ſuo agnoſcet, ubi & ſuum depromit, hoc eſt horologium* Caji *a ſuo diſtinguit* Grachus *per compræſentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed ſi locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia ſimilia interjectum menti una cum ipſis exhibetur; vel ſi dimenſiones templorum aut ſtatuarum ſimilium ad ſtaturam noſtram aut menſuram datam aliam referimus; ſimilia animo compræſentia ſiſtuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum ſimilitudinis eſt* $\backsim$.

SCHOLION.

29. *Commendatur in* Miſcellaneis Berolinenſibus (*e*). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota* eſt, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* eſt, quæ repetita aliquoties ſemper vel major, vel minor eſt toto.

DEFINITIO XIV.

31. *Commenſurabilia* ſunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum eſt pars aliquota alterius. *Incommenſurabilia* ſunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ* ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt, ſeu quarum una ab altera vel ſemel, vel aliquoties ablata, tandem vel nihil, vel ſe minus relinquit. *Heterogeneæ* vero ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare nequit.

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans* eſt, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* eſt, cujus unitas denotat certam quandam entis ſpeciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. Ex. gr. *Si quis ſimpliciter dicat,* ſex; *is non determinat, quænam ſint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra ſi quis dixerit cum addito,* ſex globi aurei; *is ſpeciem entium de-*

 termi-

(*e*) Part. 3. pag. 139.

terminat, quæ numerat, adeoque utitur numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abſtractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO XVII.

35. *Numeri inter ſe homogenei* ſunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diverſas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc diviſio numerum numeratum potiſſimum reſpicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem ſupponit* (§. 10). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando reſpicimus* (§. 5). *Ex. gr. ea globi proprietas eſt, qua ab aliis corporibus diſtinguitur, quod ſingula puncta ſuperficiei a centro æqualiter diſtent. Quodſi igitur hanc unitatis notam conſtituas; ſingula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, ſuntque unitates eædem, quatenus ſub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodſi vero globos porro diſtinguas, ex. gr. per materiam ex qua conſtant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos ſpectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diverſæ evadunt. Hinc tres globi aurei & ſex globi aurei ſunt numeri homogenei inter ſe; ſed tres aurei & ſex argentei ſunt inter ſe heterogenei.*

DEFINITIO XVIII.

37. *Nnmerus integer* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. *Numerus fractus* eſt, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. *Numerus rationalis* eſt, qui unitati commenſurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. *Numerus rationalis integer* eſt, cujus pars aliquota eſt unitas.

DEFINITIO XXII.

41. *Numerus rationalis fractus* eſt, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis eſt.

DEFINITIO XXIII.

42. *Numerus rationalis mixtus* eſt, qui conſtat ex integro & fracto, ſeu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. *Numerus irrationalis*, ſive *ſurdus* eſt, qui unitati incommenſurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, niſi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus eſt ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in Hypotheſi tradimus, ubivis (quantum conſtat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adſuevimus, indiſpenſabilis neceſſitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus WEIGELIUS *in Arithmetica tetractyca oſtendit, fieri quoque poſſe, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; ſed & Illuſtris* LEIBNITIUS (*f*) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonniſi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem, ac numerorum proprietatibus inveſtigandis aptam: cujus aliquod ſpecimen dedit Cl.* DANGI-

(*f*) *Hiſtoire de l'Academie Royale des Sciences*, An. 1703. p. 175. & ſeqq. Edit. Amſtel.

Dangicourt *circa progreſſiones arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica dyadica duabus tantum notis utitur, leges progreſſionum numerorum dyadice expreſſorum facillime omnium deteguntur. Et* Carolus XII, *Rex Sueciæ, calculum ſexagenarium excogitavit, referente* Emanuele Suedenborgio (h), *novis charaⅽteribus & numeris, noviſque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum ſatis verſati.*

Definitio XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, ſunt, *Unum*, *Duo*, *Tria*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem.* Iidem numeri generali *Unitatum* nomine inſigniri ſolent, nec opus eſt ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti.* Ex decem unitatibus componitur una *Decas.* Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; ſex *Sexaginta*; ſeptem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta.* Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejuſque quævis multipla, dicentur *Articuli.*

Scholion.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum, &c. utimur ad confuſionem in numeris magnis evitandam, quorum diſtinctis notionibus formandis inſerviunt.*

Hypothesis V.

49. *Notæ numericæ conſtituantur novem ſequentes*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Ut vero non ſolum unitates, ſed & decades, centenarios, millenarios, &c. indigitare poſſimus, valor ipſis tribuatur localis; ita ut ſolitariæ, vel in loco dextimo poſitæ, unitates ſive digitos, in ſecundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ ſcilicet ſit* Nullitatis *nota.*

Corollarium I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine ſe invicem excipiunt:

Unitates	
Decades	Simplices.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Millionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Billionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Billionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Trillionum.
Centenarii	
Unitates	
Decades	Millenariorum Trillionum &c.
Centenarii	

Scholion I.

51. *Charaⅽterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent* Georgius Henischius *in libello* De numeratione multiplici, vetere & recenti, *atque* Guil. Beveregius *in* Arithmeticæ chronologicæ *libro primo*

(g) In *Miſcellaneis Berolinenſ.* p. 336. & ſeqq.
(h) *Obſervat. miſcellan.* part. 5, p. 1. & ſeqq.

mo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo ſunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime abſolvi poteſt. Quod autem notæ nunc uſitatæ reliquis præſtent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur ſubinde cyphræ, quamvis uſitatius ſit ut hoc nomen ſoli notæ nullitatis imponatur; quem morem nos ſequimur. Ab Arabibus *inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* Wallisius *(i), quod* Alsepadi *Arabs in Commentario ad-*Tograi *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam* Indis *tribuat. Idem refert (k), quod* Saraceni *eas in Hiſpaniam attulerint; & quod ex Hiſpania in Galliam pervenerint ſtudio* Gerberti, *monachi Floriacenſis in Gallia, qui a variis dignitatibus Eccleſiaſticis tandem ad Pontificatum maximum, nomine* Sylvestri II, *circa* A. C. *999 evectus, ex ipſis ejus Epiſtolis* A. *1636 Pariſiis recuſis probat.* Joannes Fridericus Weidlerus, *Mathematum apud Wittebergenſes Profeſſor clariſſimus (l), ex MSC.* Boethii *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ aſſervatur, & in quo Noſter characteres numerorum arabicis ſimiles expreſſos vidit, probare nititur, eos jam* Boethio *fuiſſe cognitos, quem* A. C. 524 *vitam finiiſſe conſtat.* Wallisius *(m) non ignoravit, in* Boethii. Bedæ, *aliorumque antiquiorum editionibus figuras iſtiuſmodi comparere; ſed id in vetuſtioribus MSC. contigiſſe negat. Quamobrem cum* Weidlerus *MSC., cujus authoritate nititur, ſeculo quarto non junius exiſtimet; criticorum eſt ſtatuere, num tanta illius antiquitas admittenda ſit.*

Scholion II.

52. *Ex collatione diverſarum figurarum numeralium diſcant velim, qui Artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo ſitum ſit, ut Ars characteriſtica perficiatur.*

Corollarium II.

53. Quodſi notis numericis ſubſtituantur litteræ ad arbitrium electæ, iiſque idem tribuatur valor, qui illis tribui ſolet (§. 49); numerum occulte ſcribere licet.

Scholion III.

54. Ex. gr. *Denotent litteræ infra ſcriptæ in ſecunda ſerie eoſdem numeros, quos deſignant notæ ſuperiores ſupra ſcriptæ in prima.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad deſignanda mercium pretia in ſchedulis affixis.*

Problema I.

55. *Numerum ſcriptum enunciare; hoc eſt, cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.*

Resolutio.

1. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima claſſis tertiæ notetur lineola transverſa apici adſcribenda; dextima claſſis quintæ duabus; dextima ſeptimæ tribus &c.
3. Comma ſolitarium per millenarios, lineola transverſa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero ſiniſtima claſſis uniuſcujuſque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

Ex. gr. Numerus ſequens.

$2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597$

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadrin-

(i) *Arithmet.* Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (k) In Tract. *De Algebr.* c. 4. f. 11. & ſeqq. Vol. II. Oper. Mathem. (l) In Diſſertatione *De characteribus numerorum vulgaribus, & eorum ætatibus,* An. 1727. publice ventilata, §. 8. & ſeqq. p. 17. & ſeqq. (m) In Tract. *De Algebr.* loc. cit.

quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum uſus in rebus diſtincte concipiendis, ſeu ex confuſione extricandi, vires intellectus humani extendat; abunde perſpicient oculatiores, ſi ad præſens Problema fuerint ſatis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus uſus eſt* VIETA (n) : *minores introduxit* HARIOTUS (o), *quem mox imitatus eſt* CARTESIUS (p), *& nunc ſequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola ſubſcribitur. Eorum inferior, ſeu* Denominator, *indicat unitatem, ſeu totum in partes diviſum; ſuperior vero, ſeu* Numerator, *numerat partes in caſu propoſito datas.* Ex. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam eſſe in tres partes æquales diviſam; numerator 2 vero duas iſtiuſmodi partes aſſignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator ſubſcribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41).

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio* eſt inventio alicujus numeri, ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim ſumtis æqualis eſt. Numeri dati dicuntur *Summandi*; quæſitus autem *Summa*, vel *Aggregatum*.

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejuſdem numeri additio eſt inventio numeri alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis eſt* +, *quod per* plus *efferri ſolet.* Ita 3 + 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur, 3 plus 4.

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis eſt. Numerus, qui ſubducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo ſubtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Reſiduum*.

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum ſubtractionis eſt* —, *quod per* minus *efferri ſolet.* Ex. gr. 7 − 3 denotat Differentiam inter 3 & 7, pronunciatur, 7 minus 3.

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæſitus *Factum*, item *Productum*. In ſpecie, factorum alter, qui aliquoties ſumitur,

(n) In variis ſcriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (o) In *Artis Analyticæ praxi*. (p) In *Geometria*.

ſumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat quoties ille ſumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis (§. 66), iſtiuſmodi autem inventio non eſt niſi iterata additio (§. 62); multiplicatio eſt iterata ejuſdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis eſt punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco poſitum, quod per* multiplicatum *effertur*. Ex. gr. 4. 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9, factum, cujus factores ſunt 7, 5 & 9. *Litteræ ſine ullo ſigno junguntur*. Ex. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d*, factum cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit diviſio, *Diviſor*; qui denique indicat, quoties diviſor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & diviſione opus non eſt, ut numeri dati ſint homogenei, quemadmodum in additione & ſubtractione requirebatur* (§. 61, 64). *Cum enim in additione, ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum* (§. 61, 9); *omnes omnino ſummandi ad eandem unitatem referri* (§. 10), *conſequenter homogenei inter ſe eſſe debent* (§. 35). *Quoniam vero porro liquet ſummam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipſis unitatem referri; conſequenter iiſdem homogeneam eſſe* (§. *cit.*); *in ſubtractione vero numerus minuendus reſpondet ſummæ, ſubtrahendus & reſiduus aggregandis ſeu ſummandis* (§. 61, 64): *ulterius patet, in ſubtractione etiam minuendum, ſubtrahendum, & reſiduum numeros inter ſe homogeneos eſſe debere. In multiplicatione contra, multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, ſicut in diviſione, diviſor ad unitatem rationem dividendi ad quotum; adeoque opus non eſt, ut multiplicator multiplicando & facto, diviſor dividendo & quoto ſit homogeneus. Quodſi diviſor conſideretur tanquam pars dividendi; ex dictis conſtat diviſorem eſſe dividendo homogeneum: ſed tum quotus, qui indicat quoties pars iſta ex ſuo toto auferri poteſt, nec dividendo, nec diviſori homogeneus. Singula ſuo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum diviſionis ſunt duo puncta* (:), *quæ per* diviſum *efferri ſolent*. Ex. gr. 8 : 4 denotat quotum ex diviſione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* eſt quotus ex diviſione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par* eſt, qui bifariam ſive per 2, dividi poteſt; ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar* eſt, qui a pari unitate differt; ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXXII.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, ſi eum ita dividit, ut quotus ſit numerus integer ſine fractione, vel ſi fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFI-

Definitio XXXIII.

75. *Numerus primus in ſe* eſt, quem ſola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

Definitio XXXIV.

76. *Numerus compoſitus* eſt, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

Definitio XXXV.

77. *Menſura numeri* eſt numerus, qui ipſum metitur. Ita 2 & 4 ſunt menſuræ numeri 8. *Menſura maxima numeri* eſt numerus maximus, qui ipſum metitur. Ita 4 eſt menſura maxima numeri 8.

Definitio XXXVI.

78. *Menſura communis duorum pluriumve numerorum* eſt numerus, qui ſingulos ſigillatim metitur. Ita 3 eſt communis menſura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, ſi fuerit numerus maximus qui omnes metitur. Ita 12 eſt communis menſura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

Definitio XXXVII.

79. *Numeri primi inter ſe* ſunt, qui nullam communem menſuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 ſunt numeri primi inter ſe.

Definitio XXXVIII.

80. *Numeri compoſiti inter ſe* ſunt, qui, præter unitatem, communem menſuram aliam habent. Ita 12 & 15 ſunt compoſiti inter ſe.

Axioma I.

81. *Idem eſt æquale ſibimet ipſi.*

Scholion.

82. *Hujus axiomatis ampliſſimus eſt in Analyſi uſus.*

Axioma II.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales ſunt, aut inæquales* (§. 15).

Theorema I.

84. *Totum eſt majus qualibet ſua parte.*

Demonstratio.

Cujus pars alteri toti æqualis eſt; id ipſum altero majus eſt (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc eſt, ſibi ipſi æqualis eſt (§. 81). Ergo totum qualibet ſua parte majus eſt.

Scholion.

85. *En exemplum analyſeos perfectæ! Continetur enim demonſtratio ſyllogiſmo, cujus altera præmiſſa eſt definitio, altera vero propoſitio identica. Id vero analyſeos perfectæ indicium eſt* (§. 45, de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propoſitiones oblique univerſales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus ſyllogiſmi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonſtrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonſtrandum erit, lineam AB eſſe majorem linea AC: id quod fit ſequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis eſt, illa linea altera major eſt (§. 20). Sed lineæ AB pars [nempe AC] alteri lineæ AC toti [nempe ſibimet ipſi] æqualis eſt. Ergo linea AB linea AC major [nempe totum AB parte AC majus] eſt. *Quod erat demonſtrandum.* *Fig.* 1.

Theorema II.

86. *Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.*

Demonstratio.

Cum idem ſit æquale ſibimet ipſi (§. 81); quod idem eſt cum partibus totius ſimul ſumtis, id iiſdem æquale eſt.

Sed totum idem eſt cum omnibus partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 9) : ergo iiſdem æquale eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ æqualia ſunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea ſunt æqualia inter ſe.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = C$ & $B = C$; dico eſſe $A = B$. Quoniam enim $B = C$, *per hypotheſim*, B ſalva quantitate ſubſtitui poteſt ipſi C (§. 15). Subſtituatur adeo B ipſi C in caſu priore, ubi $A = C$: habebimus $A = B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro ſit $A = B$ & præterea $C = A$, $D = B$; dico eſſe $C = D$. Quoniam enim $A = B$ & $C = A$, *per hypotheſim*, erit $B = C$, *per caſ.* 1. Quare cum porro ſit $D = B$, *per hypotheſim*, erit quoque $C = D$, *per caſ.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas; aggregata ($A + C$ & $B + D$) ſunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

$A + C = A + C$ (§. 81). Sed quoniam $C = D$, *per hypotheſim*, poterit D ſubſtitui pro C (§. 15) : quo facto, habemus $A + C = A + D$. Porro $B + D = B + D$ (§. 81). Sed $A = B$, *per hypotheſim*. Ergo A ſubſtitui poteſt pro B (§. 15) : quo facto, habemus $B + D = A + D$. Quare $B + D = A + C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus eſt, etiam altero æqualium majus vel minus eſt.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = B$ & $C \triangleright A$; dico eſſe $C \triangleright B$. Quoniam enim $C \triangleright A$, *per hypotheſim*, A parti ipſius C æquale eſt (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum ſit $A = B$, *per hypotheſim*, erit etiam $P = B$ (§. 87). Ergo $C \triangleright B$ (§. 20). *Quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C \triangleleft A$, dico eſſe $C \triangleleft B$. Quia $C \triangleleft A$, *per hypotheſim*, parti hujus æquale eſt (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo ſit $P + C = A$ (§. 86) & $A = B$, *per hypotheſim*; erit quoque $P + C = B$ (§. 87). Eſt itaque C parti ipſius B æqualis (§. 9); conſequenter $C \triangleleft B$ (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C), vel æqualia addas; aggregatum prius ($B + C$) majus eſt, poſterius vero ($A + C$) minus. Quodſi majori (B) majus (C), & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius ($B + C$) majus eſt, poſterius ($A + D$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A \triangleright B$, *per hypotheſim*, parti hujus æquale eſt (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, eſtque adeo $B = P + A$ (§. 86). Quare cum etiam ſit $B + C = P + A + C$ (§. 88); erit $A + C$ pars ipſius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P + A + C \triangleright A + C$ (§. 84), conſequenter $B + C \triangleright A + C$ (§. 89). *Quod erat unum.*

Quoniam $B \triangleright A$, *per hypotheſim*, erit

B+C

$B+C > A+C$, *per demonſtrata.* Similiter quia $C > D$, *per hypotheſim*, erit $A+C > A+D$, *per demonſtrata.* Ergo cum $A+D$ ſit pars ipſius $A+C$ (§. 20); erit multo magis $B+C > A+D$ (§. 84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) ſubtrahas; quæ relinquuntur (C–A & D–B) æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

$C-A=C-A$ (§. 81). Sed quoniam $A=B$, *per hypotheſim*, ſalva quantitate B pro A ſubſtitui poteſt (§. 15). Quod ſi ergo ſubſtituatur, habebimus $C-A = C-B$. Similiter $D-B = D-B$ (§. 81). Sed quia $C=D$, *per hypotheſim*, ſalva quantitate C pro D ſubſtitui poteſt (§. 15). Quodſi ergo ſubſtituatur, habebimus $D-B = C-B$. Quamobrem $C-A = D-B$ (§. 87).

THEOREMA VIII.

92. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C), vel æqualia ſubtrahas; reſiduum prius (A – C) majus eſt, poſterius (B–C) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale eſt (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A = P+B$ (§. 86), conſequenter $A-C=P+B-C$ (§. 91). Sed $B-C$ eſt pars ipſius $P+B-C$ (§. 9), conſequenter $P+B-C > B-C$ (§. 84). Ergo & $A-C > B-C$ (§. 89). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

93. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (m A & n B) æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia $A=B$, *per hypotheſim*, erit etiam $A+A=B+B$, ſeu in genere $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. (§. 88). Jam cum multiplicatio ſit iterata ejuſdem numeri additio (§. 67), ſi m & n fuerint multiplicatores, erit $A+A+A+A$ &c. $= mA$ (§. 67, 68). & $B+B+B+B = nB$ (§. §. *cit.*). Quare cum in eo caſu, ubi $A+A+A+A$ &c. $= B+B+B+B$ &c. ſit $m=n$; erit etiam $mA = nB$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

94. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas; quoti (A: C & B:D) æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:C = A:C$ (§. 81). Sed quia $A = B$, *per hypotheſim*, ſalva quantitate B pro A ſubſtitui poteſt (§. 15). & ſic $A:C=B:C$. Ob eandem rationem $B:D = B:C$. Quare $A:C = B:D$ (§. 87). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum ſuperfluum talia demonſtrari, quorum caſus ſingulares, in numeris præſertim rationalibus, per ſe evidentes videntur. Ego vero has demonſtrationes maximi facio, tum quia prima & ſecunda (id quod ſupra §. 85 annotavimus)* Analyſeos perfectæ; *tum quia reliquæ* Calculi univerſalis *ideam animo ingenerant, in talium ſubſtitutione conſiſtentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonſtrando verſemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Matheſin demonſtrationes mathematicæ certitudinis dare conati ſunt:) hic, ſi tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani ſubſidium.*

CAPUT II.

De ſpeciebus Arithmeticæ in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei ſub homogeneis ſcribantur, hoc eſt, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis, &c. reſpondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & ſumma earum ipſis ſubſcribatur.
4. Quodſi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero ſumma ſub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum ſeries continuata, habebitur ſumma quæſita.

Ex. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: *3* & 4 ſunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 ſub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (ſc. *decas*) & *6* (*decades*) ſunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt *9*; additis porro 7, habentur 1*6* (*decades*). Collocentur *6* ſub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc eſt, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) *6* &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 ſub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc eſt, 1 millenarius addatur *3* (*millenariis*) datis, ſummaque 4 ſub iis ſcribatur. Ita prodit ſumma quæſita 41*6*5.

3578	A
524	B
*6*3	C
41*6*5	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum ſunt partes eorumdem (§. 50); idem ſunt cum omnibus numeris datis ſimul ſumtis (§. *9*). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compoſitum eſſe ex omnibus unitatibus, decanibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compoſitus ergo eſt ex omnibus numeris datis ſimul ſumtis, conſequenter ipſis æqualis (§. 8*6*); adeoque ſumma eorundem eſt (§. *6*1). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

97. *Unitates numerorum ſingulæ tamdiu per digitos repræſentantur & eorum ope additio abſolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, ſi unitates quotlibet cuicunque numero addas, ex. gr. quod* $3 + 2 = 5$, $9 + 5 = 14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM I.

98. Quoniam ſeriei ſiniſteriori tot unitates accedunt, quot decades ex ſummatione in proxime dexteriore emergunt (§. *96*); additio minore tædio abſolvetur, ſi ex qualibet numerorum ſerie tot decades deleantur, quot ex iis colligi poſſunt, reſiduum infra lineam ſcribatur, & numerus decadum abjectarum ſeriei proxime ſiniſteriori connumeretur.

Ex. gr.

Ex. gr. Si numeri addendi fuerint A,B,C, ita procedendum : cum 7 & 3 ſint 10; reſiduus numerus 5 ſcribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 ſunt 10 ; 2 & 1 ſunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum.

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

Quoniam vero 7 & 2 ſunt 9, porro 9 & 1 ſunt 10; adde 1 ſeriei millenariorum & reſiduum 1 ſcribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 ſunt 10 millenarii, ſeu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero ſunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

SCHOLION II.

99. *Modus hic addendi eſt maxime naturalis (§. 49) : nec abſimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex ſerie nimirum ſpeciei minoris toties colligitur valor ſpeciei proxime majoris, quoties fieri poteſt, & pro unoquoque unitas reponitur in ſerie proxime majore. Ex. gr. ſint expenſæ :*

Januarii	45 thal.	16 groſs.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit ſumma	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant groſſum, in ſerie nummorum additis 6 & 6 , itemque 3 & 9, valor groſſi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur ſeriei groſſorum. Similiter quoniam thalerus 24 groſſis conſtat, in ſerie groſſorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco groſſorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in Corollario aut Problemate peraguntur.

COROLLARIUM II.

100. Si omnes numeri dati unitatum inſtar conſiderentur, evidens eſt inter ſummandum tot novenarios omitti, quot unitates ex ſumma ſeriei dexterioris in ſiniſteriorem transferuntur. Sic, in exemplo Problematis, loco *quindecim* ſub unitatibus ſcribimus 5 , ſub decadibus 1 , quorum numerorum inſtar unitatum conſideratorum ſumma eſt 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter ſi ſumma unitatum *viginti ſeptem* ; ſub unitatibus collocamus 7 , ſub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc ſolvitur

PROBLEMA III.

101. *Examinare additionem ; hoc eſt, explorare , utrum numerus inventus ſit æqualis omnibus datis ſimul ſummatis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ſerie qualibet dexteriore in proxime ſiniſteriorem rejiciuntur , & operatione abſoluta addantur, ut numerus novenariorum inter ſummandum omiſſorum innoteſcat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex ſumma inventa novenarius, quoties fieri poteſt, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter ſummandum omiſſorum : quæ ſumma una cum numero reſiduo , ſi quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris ſummandis, qui omnes tanquam unitates ſpectantur, novenarius abjiciatur, quoties

ties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. 91), conſequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. in exemplo Problematis 2, inter ſummandum 3 novenarii omittuntur, & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarii abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Diſcrimen inter Demonſtrationem & Examen haud obſcurum eſt. Illa evincit per regulas præſcriptas inveniri debere numerum quæſitum; hoc docet regulas ad caſum ſingularem rite fuiſſe applicatas. Unde apparet Examinis utilitas, fruſtra obnitente* RAMO (*a*), *qui Demonſtrationem cum Examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex ſumma quam aggregandis, notis ſingulis inſtar digitorum conſideratis, abjiciatur novenarius, & ex reſidui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum Examen tum fallere poſſit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantiſper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia ſunt Examina, etſi non omnes errores detegant, modo iiſdem ſeſe non ſubducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).
2. Sub numerus hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus, &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur.
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

Ex. gr. Si ex	9 8. 0. 0. 4. 0. 3 4. 5 9
ſubtrahas	4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
Differentia eſt	5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates

(*a*) In *Schol. Mathem.* lib. 4. pag. 114.

tates infra lineam ſcribendæ. Decades *6* ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus, & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque *6* ex iis, remanent *9* decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 ſubducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde ſi 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi *9* decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, reſidui fiunt millenarii 8. Demtis porro *6* millenariorum decadibus ex *9*, relinquuntur *3*. Jam ſi 8 ex *3* ſubtrahere debes, ab 8 ſiniſterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in *9* & *3* in 1*3* degenerabunt, ut tandem ſubtractio facillime abſolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris, ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris ſubducas, *vi operationis*, hoc eſt, ſi ſingulas partes numeri minoris a ſingulis partibus majoris ſubtrahas (§. 50). Sed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumtæ ſunt numero minori, & partes ſingulæ majoris ſimul ſumtæ ſunt majori æquales (§. 8*6*). Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem e toto majore ſubtrahas (§. *9*1). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a ſe invicem ſubtrahendi; unitas mutuo petita non* 10, *ſed tot unitates valet, quot unitates ſpeciei minoris conſtituunt valorem unitatis ſpeciei majoris.*

Ex. gr.	45. thal.	1*6*. gr.	*6*. num.
	27	23	*9*
	17 thal.	1*6* gr.	*9* num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 ſubtrahi nequeant, ex 16 groſſis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 groſſi ex reſiduis 15 auferri nequeant, ex 45 thaleris unus ablatus in 24 groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur 23, reſiduus eſt 1 groſſus 15 addendus, ut reſidui loco ponantur 16 groſſi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION II.

105. *Quodſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt id fieri non poſſe. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno —. Ex. gr. Si quis 8 thaleros ſolvere debet, atque 3 nonniſi poſſidet: tribus ſolutis, 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA V.

106. *Examinare ſubtractionem.*

RESOLUTIO.

Reſiduo addatur ſubtrahendus (§. *96*). Quodſi enim ſumma fuerit æqualis minuendo; ſubtractio rite peracta (§. *64*).

Ex. gr.	*9* 8 0 0 4 0 *3* 4 5 *9*	Minuendus.
	4 7 4 *3* 8 *6* 5 2 *6* *3*	Subtrahend.
	5 0 5 *6* 5 *3* 8 1 *9* *6*	Differentia
	9 8 0 0 4 0 *3* 4 5 *9*	

ALITER.

Quoniam in Subtractione reſiduum cum ſubtrahendo æquatur minuendo (§. *64*); ſi minuendus ſumatur pro aggregato, reſiduum cum ſubtrahendo pro aggregandis (§. *6*1); examen per novenarium ſuccedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA VI.

107. *Examinare additionem per ſubtractionem.*

1. Deſcribantur in continua ſerie multi-

pla

pla ſeptenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua ſeptenarii additione invenienda. Eſt enim $7+7=14$, $14+7=21$, &c.

2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

	5 6 6
8259	8 2 5 9
	5 2 6
2687	2 6 8 7
	3 4 2 5
10946	1 0 9 4 6

ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10 & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iiſdem ſuperſcribatur.

4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis; &, proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur, & a ſumma 12 ſeptenarius, vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, ex. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86, 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. 91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *Q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. 96).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

Ex. gr. Sit exemplum additionis

A B C D
3 5 7 9
8 4 6 2
5 3 7 6
1 7 4 1 7
1 2 1 0

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17, & reſidua 1 ſcribatur

batur ſub 7. Similiter ſumma notarum in ſerie B 12 auferatur ex 14, reſiduo 2 ſub 4 ſcripto. Summa notarum in ſerie C 20 tollatur ex 21 & reſiduum 1 ponatur ſub 1. Denique ſi ſumma ſeriei D 17 ex 17 ſubtrahatur, relinquitur 0: quod indicio eſt, numerum 17417 eſſe ſummam quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis ſummæ ſubtrahi omnes millenarios ſummandorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus ſummæ omnes centenarios, decades, unitates ſummandorum. Quodſi ergo operatione abſoluta nihil relinquitur, ſumma tot præciſe millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri ſummandi ſimul ſumti continent, atque adeo ſumma numeris ſummandis ſimul ſumtis æqualis eſt (§. 87); conſequenter additio rite peracta (*§. 61*).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, ſi loco ſeptenarii numerus alius ſumatur ipſa Demonſtratio inſinuat. Solent etiam, examinis loco, additionem iterare, ſed diverſa ratione, ita ut una vice aſcendendo, altera vero deſcendendo ſummatio perficiatur; facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo verſus ſiniſtram.*

PROBLEMA VII.

109. *Abacum* Pythagoricum, *hoc eſt, Tabulam conſtruere, in qua facta ex ſingulis digitis in ſingulos repræſentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus ſingula in *9* partes æquales dividantur & per lineas ipſi parallelas in areolas quadratas area ejus reſolvatur.
2. In ſerie horizontali ſumma & laterali ſiniſtima ſcribantur novem notæ numericæ, ſeu ſinguli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 ſcribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum *6* colloccetur ſub 4. Addantur 2 & *6*; aggregatum 8 ponatur ſub *6*; & ita porro.
4. Quodſi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus *Pythagoricus* conſtruetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum* Pythagoricum *memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac diviſionem expedite abſoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non eſt, ad manus eſſe debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator ſcribatur ſub multiplicando, ut in additione (§. *96*).
2. Ducatur ſub iis linea recta.
3. Infra hanc ex Abaco *Pythagorico* ſcribantur ſingula producta ex ſin-

gulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris; ſimiliter ex illis in reliquas hujus notas; ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime ſiniſteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. ſcribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. *96*). Dico aggregatum eſſe factum quæſitum.

Ex. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore ſub multiplicando ſcripto, duc 5 in 6, cumque factum, vi Abaci *Pythagorici*, ſit 30, ſcribe 0 ſub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod eſt 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 verſus ſiniſtram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (ſcilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur ſumma 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & ſummam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodſi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in ſiniſtram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

D E M O N S T R A T I O.

Vi operationis & Abaci *Pythagorici*, primus numerus intra lineas ſcriptus ſingulas multiplicandi notas, hoc eſt, ſingulas ejuſdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipſum (§. *9*), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus ſecundus intra lineas ſcriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota ſecunda multiplicantis unitatem, &c. Sed cum numeri intra lineas ſcripti adduntur, ſumma iiſdem æqualis eſt (§. *61*), adeoque multiplicandum toties continet, quoties ſingulæ multiplicatoris notæ, hoc eſt, partes (§. 50), conſequenter totus multiplicator (§. *9*) unitatem continet. Eſt igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. *66*). *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex ſequentibus exemplis manifeſtum.*

```
  3578       4760
    30       2000
------    -------
107340    9520000
```

P R O B L E M A IX.

113. *Lamellas* Neperianas *parare, quarum ope multiplicationem ac diviſionem facilius abſolvere licet, quam per Abacum* Pythagoricum.

R E S O L U T I O.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta, parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula diviſæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula ſingula reſolvantur. *Fig. 2.*
2. In illis quadratulis ea lege ſcribatur Tabula *Pythagorica*, ut notæ ſolitariæ, aut dextræ, triangulum dextrum, notæ autem ſiniſtræ ſiniſtrum cedat. *Sic factum eſt, quod petebatur.*

SCHO-

SCHOLION.

114. *Has lamellas ſub initium ſeculi ſuperioris invenit* Joannes NEPERUS, *Baro* Merchiſtonii, *Scotus, & peculiari libello deſcripſit, cui* Rhabdologiæ *nomen impoſuit.*

PROBLEMA X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum* Neperianarum *ope.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam, &
4. Ipſi reſpondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exſcribe, ut in unam ſummam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exſcribe numeros reliquis multiplicatoris notis reſpondentes & decenter infra factores (§. 111) ſcribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam ſummam collige. *Sic f. e. q. p.*

Fig. 3. Ex: gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 reſpondet, exſcribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo verſus ſiniſtram proxime ſequente 9 & 5 adde & ſummæ 14 notam dextram ſcribe juxta 6, ſed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; ſiniſtram vero itidem 1 adde notæ 3 in ſiniſtro triangulo deprehenſæ. Summam 4 ſi 1846 a ſiniſtris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

```
   5987
    937
 -------
  41846
 17934
53802
 -------
5601386
```

PROBLEMA XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque, ſine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex ſimplo, duplo, & decuplo, per additionem, ſubtractionem, & mediationem, ſingula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet ſibimetipſi additus producit ſui *duplum*. Addatur huic ſimplum, ſumma eſt numeri dati *triplum*. Duplum addatur ſibimetipſi, aggregatum eſt numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc eſt, ipſe numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur ſimplum, vel duplum, habebitur *ſextuplum*, vel *ſeptuplum*. Ex decuplo ſubtrahatur duplum, vel ſimplum, reſiduum erit *octuplum*, vel *noncuplum*. Sine Abaci itaque *Pythagorici* ſubſidio multiplicaturo familiaris ſit ſequens a *Jobo* LUDOLFFO, in Academia Erfordienſi nuper Matheſeos Profeſſore, in Arithmeticam primum introducta

Nomenclatura.

1. Simplum.	1 *Simplum.*
2. Duplum.	1 + 1 *Simplum & ſimplum.*
3. Triplum.	2 + 1 *Duplum & ſimplum.*
4. Quadruplum.	2 + 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & ſimplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10−2 *Decuplum ſine duplo.*
9. Noncuplum.	10−1 *Decuplum ſine ſimplo.*

Ex. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894 7788	3894 7788 11682
Quadruplum	**Quintuplum**	**Sextuplum**
7788 7788 15576	38940 19470	3894 19470 23364
Sextuplum	**Octuplum**	**Noncuplum**
7788 19470 27258	38940 7788 31152	38940 3894 35046

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, infra lineam ſcribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui poſſint, quæ deſiderantur. Sub ducta igitur altera linea ſcribantur more conſueto (§. 111) multiplicandi multipla.

```
 37896 A
  6874
────────
 75792 B
189480 C
────────
151584 D
265272E
303168F
227376G
────────
260497104
```

Ex. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam ſcribatur B ipſius A duplum & porro C decupli ipſius A dimidium. Reperies ergo 1°. D ipſius A quadruplum, ſumendo duplum ipſius B; 2°. E ſeptuplum ipſius A, addendo B & C; 3°. F octuplum ipſius A, vel addendo C, B & A, vel B ſubducendo a decuplo ipſius A, hoc eſt ex A cyphra aucto; 4°. denique G, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, ſæpius ex productis jam inventis, per additionem vel ſubtractionem, inveniri poſſunt quæ adhuc deſiderantur; nec tum *Nomenclaturæ* propoſitæ ſtricte inhærendum, ita ut non opus ſit infra lineam demum ſcribi duplum multiplicandi & decupli ejuſdem dimidium.

```
    895765482
743)─────────
   1791530964
   3583061928
   6270358374
─────────────
 665553753126
```

Ex. gr. ſit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur 1° duplum, 2° dupli duplum, 3° ſumma ex ſimplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multiplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum. Quod ſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

```
     895765482
789)──────────
    8061889338
    7166123856
    6270358374
──────────────
  706758965298
```

Pro-

PROBLEMA XII.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota:

1. Scribatur is ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit ſub proxime ſequente, ac ope Abaci *Pythagorici* inveſtigetur, quoties in nota vel notis ſupraſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.
3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur, & ope Abaci *Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties is in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3.

```
1  22 (
7856   2618 2/5
3333
```

Ponantur 3 ſub 7, & per Abacum *Pythagoricum* innoteſcit 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt *6*, ſubtrahatur ex 7 lineola tranſverſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque, vi Abaci *Pythagorici*, 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur *6* loco quoti & factum 18 ex 3 in *6* ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio eſt, numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

DEMONSTRATIO.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. *9*) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. *69*). *Q. e. d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet.

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.
2. Ope Abaci *Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.
4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola tranſverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum

tum ex eo in diviſorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 32.

```
  1
  2 1
 1 4 7
7 8 5 6 (245 16/32
3 2 2 2
  3 3
```

Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in ea contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduiſque 14 ſuprascriptis, diviſor loco uno promoveatur. Quo facto inveſtigetur quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo 17 ſuprafcripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſuprafcripto. Dico numerum inventum $246\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

Si diviſor ex pluribus præſertim conſtet notis, præſtat multipla quoti ſubtrahenda ſub notis dividendi, ex quibus ſubtractio fieri debet, immediate ſcribi & ſub ſubtrahendo reſiduum, cui continuandæ diviſionis gratia jungitur nota dividendi ſequens, donec nulla ſuperfuerit, adeoque diviſio abſoluta.

Ex.gr. Sit dividendus 385797, diviſor 8672,

```
385797 (44
        8672
 34688
 -----
 38917
 34688
 -----
  4229
```

quem tibi ſub loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, ſcribe diviſoris 8672 quadruplum ſub notis dividendi 38579, & reſiduum 3891 ſub eodem, juncta eidem nota ſequente 7, ut diviſio continuari poſſit. Quoniam itaque diviſor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum diviſoris ut ante ſub iiſdem ponitur & ex ipſis aufertur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

DEMONSTRATIO.

Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex Abaco *Pythagorico* conſtare nequeat quoties diviſor integer in notis dividendi ſuprafcriptis contineatur, interea ſupponatur toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION.

118. *Equidem hæc methodus tædioſa videtur, quod raro verus quotus prima ſtatim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod inſtituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLEMA XIII.

119. *Diviſionem per lamellas* Neperianas *abſolvere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.
5. Quodſi eadem ratione partes quoti reliquas inveſtiges, diviſio tota abſolvetur.

Fig. 3. Ex. gr. Sit dividendus 5601386, diviſor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; ſub diviſore deſcendendo in infima ſerie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc ſubtrahitur, & in lamella unitatum reſpondens 9 loco quoti ſcribitur. Reſiduo 2211 jungitur nota dividendi ſequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipſi in lamella unitatum reſpondens 3 ſcribatur loco quoti, & ſubtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
5601386(937
53802..
———————
 22118.
 17934.
———————
  41846
  41846
———————
  00000
```

PROBLEMA XIV.

120. *Sine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more ſueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam ſcribatur diviſor, ejus duplum & decupli dimidium ſive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2, & 5 adſcribi oportet. Inde nimirum quodcunque diviſoris multiplum (§. 116) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot diviſor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.
4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.
5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine Abaci *Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; ſcribe 2 loco quoti & 350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividen-

```
385724615 (2204140
350         ———————
———         175 | 1
 357        350 | 2
 350        875 | 5
————
  724
  700
————
  246
  175
————
   711
   700
————
   115
```

videndi proxime ſequentem 7 & 357 denuo compara cum diviſoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 ſubtrahe & quoti loco rurſus ſcribe 2. Reſiduo 7 junge notam ſubſequentem 2. Quia dividendus 72 eſt diviſore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipſique dupli duplum, hoc eſt quadruplum diviſoris, 700, quam proxime conveniat, quotus erit hoc in caſu 4. Quodſi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & reſiduum erit 115.

SCHOLION.

121. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia eſt altera in Problemate duodecimo expoſita. Quamvis igitur eam ſerio commendem, nolim tamen ut Abacus* Pythagoricus *prorſus rejiciatur, quoniam ſubinde caſus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia aſſertum noſtrum confirmabit.*

PROBLEMA XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, ſi multiplicatio rite fuerit peracta.

```
38476) 1346660 (35
       115428
       ------
        192380
        192380
       ------
        000000
```

Ex. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum eſt 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus eſt 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri poteſt.
2. Reſiduum 2 ducatur in multiplicatorem 4, ſi novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium ſuperaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri poteſt, noteturque reſiduum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodſi reſiduum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus reſiduo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, reſiduum in multiplicando ducatur non in ipſum multiplicatorem, ſed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

```
  857
   65
-----
 4285
5142
-----
55705
```

Ex. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum reſiduorum factum cum ſit 4, id indicio eſt multiplicationem rite fuiſſe peractam.

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio ſit iterata ejuſdem numeri additio (§. 67), & factum quidem ſummæ, multiplicandus toties iteratus quot multiplicator unitates habet numeris aggregandis reſpondeat (§. 61, 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus eſt novenarius, quoties fieri poteſt (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto quoties datur, reſiduum toties relinquitur quot multiplicator

unitates

unitates habet; evidens eſt, iſtud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere quoties licet, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde eſt, ſive reſiduum in multiplicatorem, ſive multiplicator in reſiduum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonſtrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, ſi novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere quoties fieri poteſt, & reſiduum hoc ducendum eſſe in reſiduum ex multiplicando, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonſtratio majorem evidentiam nanciſcitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare diviſionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in diviſorem, aut diviſor in quotum.
2. Facto addatur, ſi quod a diviſione fuerit reſiduum.

Quodſi hac ratione prodeat dividendus, diviſio legitime peracta. (§. 212).

Ex. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus eſt 245, reſiduum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Conſtat igitur diviſionem legitime fuiſſe peractam.

```
 245
  32
----
 490
735
----
7840
  16
----
7856
```

ALITER.

Cum, vi examinis prioris, dividendus ſit factum ex diviſore in quotum; examen quoque inſtituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex diviſore & quoto, novenarium quoties datur, atque reſiduum in diviſore multiplicando per reſiduum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo reſiduum ex diviſione.

Ex. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem ſi tentetur in diviſore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 reſiduum erit. Quodſi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur reſiduum ex diviſione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur, ut in dividendo, reſiduum 8.

SCHOLION GENERALE.

125. *Supereſt ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expoſitis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum ſcriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in diviſione a ſubtractione peracta deletione, &c. continentur. Scriptio numerorum varias ſuppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quoſvis, quantumvis magnos & una varios, menti præſentes exhibet quamdiu libuerit, qui alias diſparent cum vix eam ſubierint: quo ipſo cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domeſticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum defiguntur. Hinc diſcimus*

1. Intellectum uti debere in meditando ſubſidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet caſu particulari derivandis.

2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri poteſt, imaginationi præſentia ſiſtenda eſſe: quod obſervaſſe in tyronibus quoque inſtituendis plurimum prodeſt, cum ad diſciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum ſint adſueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiariſſimæ ipſis exiſtant.

Ipſa vero hæc numerorum ſcriptio præſtat, ut intellectus tum ſingula ſigillatim meditari, tum ſingula cum ſingulis, prout commodum viſum fuerit, conferre poſſit. Vide imprimis Cor. 1, Probl. 2, (§. 98), Probl. 4, (§. 103), Probl. 11, (§. 116), & Probl. 14, (§. 120.) *Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum ſerie nimis longa enaſci ſolitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet*

3. Ad minuendam in meditando difficultatem, ſingula diſtincte imaginationi repræſentanda eſſe; ita ut objectum meditationis repræſentetur ſecundum omnes relationes datas, & tota totius repræſentatio ex partialibus ſingularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteriſtica* perficienda magni momenti eſſe, inferius in Analyſi patebit. Eadem ſecundæ juncta tyronum inſtitutioni egregia ſuppeditat adjumenta. Inſervit etiam confuſæ cognitioni eorum, quæ ſigillatim diſtincte cognita fuerunt: cujus uſum Demonſtrationes geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diverſis aut diverſa pro iiſdem habentes in errorem incidamus: quo ipſo docemur

4. Quæ ſunt eadem in intellectu, ut eadem repræſentari debere imaginationi; quæ vero diverſa ſunt in intellectu, ut diverſa quoque repræſentanda eſſe. Sunt eadem in intellectu, quæ ſub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potiſſimum diſcavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati diſtinguuntur in varias claſſes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c. & in hiſce claſſibus ſinguli numeri ſingulis characteribus diſcernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæſtio propoſita in tot partes reſolvenda, quot res diverſæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & ſubtractio in ſingulis numerorum claſſibus ſigillatim peragitur: nec minus, in multiplicatione ac diviſione, facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæſitus. Diſcimus adeo

2. Singula quæ in quæſtione propoſita involvuntur, eſſe ſigillatim expendenda, &, quæ inde deducta ſunt, inter ſe conferenda.

In operationibus arithmeticis, vel ad notiones numerorum reſpicimus, vel eorum proprietates, ex.gr. ex Abaco Pythagorico, *in memoriam nobis revocamus. Unde patet*

3. Dum ſingula in ſe conſiderantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas eſſe.

Si diviſor ex pluribus notis conſtet, ad facilitandum laborem aſſumitur integrum diviſorem in omnibus dividendi notis ſupraſcriptis toties contineri, quoties nota diviſoris prima in nota prima dividendi continetur. Sed cum hypotheſis fallere queat, utrum quotus inventus ſit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujuſmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem ſit ingens, ex.gr. ſi in Aſtronomia multa admodum phænomena motus ſiderum dentur,

qualis eſſe debeat rei natura, ex. gr. ſtructura ſyſtematis mundani, ut quibuſdam phænomenis ſatisfiat, primo inveſtigandum; dein ulterius diſquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis ſatisfiat nec ne. Ita ſi contingat, nos in hypotheſin falſam incidere, eam facilius emendare, quam ex ſimultanea omnium conſideratione, prima ſtatim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in ſcientia naturali multum habet uſum, non minus in inveniendo, quam in aliorum hypotheſibus dijudicandis.

Licet abunde conſtet per demonſtrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæſitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberraſſe. Docemur ergo

5. Conſultum eſſe, ut diſpiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ reſpondeant.

Plura non addimus, cum hæc ſpeciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. Ratio eſt ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, ſine tertio homogeneo aſſumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in ſpecie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Conſequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. Euclides *Rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejuſdem generis ſecundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ ſunt conſtantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis eſt ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit Vir ſummus* Leibnitius. *Equidem &* Hobbesius *Definitionis* Euclideæ *correctionem tentavit* (a); *ſed infeliciter. Cum enim Rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod* Euclidea, *quod ſcilicet relationis ſpeciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod ſpeciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter ſe habere poſſunt.*

SCHOLION II.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commenſurabilia, ſed etiam ad incommenſurabilia, hoc eſt, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem ſine tertio homogeneo aſſumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter ſe comparantur ſine tertia homogenea aſſumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæquales,

(a) In Tractatu *De principiis & ratiocinatione Geometrarum*, c. XI. p. 22.

les, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc eſt, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod diviſio prodit (§. 69).

Corollarium IV.

132. Ceterum quia ratio per ſe intelligibilis (§. 126), iis diſcernendis inſervire poteſt, quæ compræſentia non ſunt (§. 27).

Definitio XL.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* eſt, quam habet majus ad minus, ex. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* eſt, quam habet minus ad majus, ex. gr. 3 ad 6.

Definitio XLI.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ eſt ut unitas, vel numerus rationalis, ad numerum rationalem, ex. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

Scholion.

135. *Sint duæ quantitates A & B, ſitque A < B. Si A & B toties ſubtrahas, quoties fieri poterit, ex. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo caſu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc eſt, A in B quinquies continetur, ſeu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo eſt rationalis. In caſu poſteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, ex. gr. ter, itidemque ex B, ex. gr. ſepties ſubducta nihil relinquit; aut nulla dabitur iſtiuſmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, ſeu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si poſterius: ratio ipſius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc eſt, dici nequit, quanta pars ipſius B ſit A. Suo autem loco oſtendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri poſſit, nec minus demonſtrabitur, dari quantitates quæ rationem irrationalem habent. Hinc ſimul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum oſtendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, ſine tertio homogeneo aſſumto, ratio intelligi poſſit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique ineſt, utriuſque menſura conſtituitur, vel, quod perinde eſt, minus, aut prædicta pars, pro unitate aſſumitur, & in caſu priore majus, in poſteriore majus & minus per numerot exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales eſſe ſuo loco conſtabit.*

Definitio XLII.

136. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex diviſione antecedentis per conſequentem emergit. Ex. gr. rationis 3 ad 2 exponens eſt $1\frac{1}{2}$; ſed rationis 2 ad 3 eſt $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

Scholion.

137. *In Geometria demonſtrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi poſſit linea, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus, eundem exhibere non valeamus.*

Corollarium I.

138. Si conſequens eſt unitas, antecedens ipſe exponens rationis; ex. gr. rationis 4 ad 1 exponens eſt 4.

Corollarium II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, ſeu multitudinis ad unitatem.

Corollarium III.

140. Exponens rationis eſt ad unitatem ut antecedens ad conſequentem (§. 69).

Corollarium IV.

141. Rationes per exponentes diſcernuntur (§. 131, 136), atque adeo, ſi antecedens A, conſequens B, ratio ipſius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

Definitio XLIII.

142. Si terminus minor eſt pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *Ratio* vero minoris inæqualitatis *ſubmultiplex*. Speciatim in caſu primo *dupla*, ſi exponens 2; *tripla*, ſi 3, &c. in altero *ſubdupla*, ſi exponens $\frac{1}{2}$; *ſubtripla*, ſi $\frac{1}{3}$, &c. Ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim ſenarius binarium ter; contra 2 ad 6 eſt in ratione ſubtripla, continet enim binarius tertiam ſenarii partem.

Definitio XLIV.

143. Si terminus major minorem ſemel continet ac inſuper partem ipſius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *ſuperparticularis*, *Ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo vocatur *ſeſquialtera*, ſi exponens $1\frac{1}{2}$; *ſeſquitertia*, ſi $1\frac{1}{3}$, &c. in altero *ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{3}$; *ſubſeſquitertia*, ſi $\frac{3}{4}$, &c. Ex. gr. 3 ad 2 eſt in ratione ſeſquialtera; 2 ad 3 in ſubſeſquialtera.

Definitio XLV.

144. Si terminus major minorem ſemel continet ac inſuper partes ipſius aliquot aliquotas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *ſuperpartiens*, *Ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu priore dicitur *ſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $1\frac{2}{3}$; *ſupertripartiens quartas*, ſi $1\frac{3}{4}$; *ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $1\frac{4}{7}$, &c. in poſteriore *ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{5}$; *ſubſupertripartiens quartas*, ſi $\frac{4}{7}$; *ſubſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $\frac{7}{11}$, &c. Ex. gr. 5 ad 3 eſt ratio ſuperbipartiens tertias; ſed 3 ad 5 ratio ſubſuperbipartiens tertias.

Definitio XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & inſuper partem ipſius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex ſuperparticularis*; *Ratio* minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo dicitur *dupla ſeſquialtera*, ſi exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla ſeſquiquarta*, ſi $3\frac{1}{4}$, &c. in altero *ſubdupla ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{5}$; *ſubtripla ſubſeſquiquarta*, ſi $\frac{4}{13}$, &c. Ex. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam ſeſquiquintam; 4 ad 9 rationem ſubduplam ſubſeſquiquartam.

Definitio XLVII.

146. Denique ſi terminus major minorem aliquoties continet ac inſuper aliquot partes ipſius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex ſuperpartiens*; *Ratio* minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu primo vocatur *dupla ſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $3\frac{4}{7}$, &c. in altero *ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{8}$; *ſubtripla ſubſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $\frac{7}{25}$, &c. Ex. gr. ratio 25 ad 7 eſt tripla ſuperquadripartiens ſeptimas; 3 ad 8 ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias.

SCHOLION I.

147. *En genera & ſpecies rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, ex. gr. pro dupla 2 : 1, pro ſeſquialtera 3 : 2;) non tamen ab eo ignorari poſſunt, qui ſcripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam* CLAVIUS *annotavit* (a) *exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, ſi denominatorem exponentis dividas per numeratorem. Ex. gr. ſi exponens fuerit* $\frac{5}{8}$; *erit* $8 : 5 = 1\frac{3}{5}$. *Unde innoteſcit, rationem vocari ſubſupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION II.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perſpecturus ſpeciebus recenſitis plures non dari, conſiderare debet, quotum ex diviſione termini majoris per minorem emergentem, ſeu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel eſſe* 1°. *Numerum integrum, vel mixtum; hunc vero vel* 2°. *ex unitate & fractione, cujus numerator eſt unitas, vel* 3°. *ex unitate & fractione, cujus numerator eſt numerus, vel* 4°. *ex numero & fractione, cujus numerator eſt unitas, vel denique* 5°. *ex numero & fractione, cujus numerator numerus eſt, conſtare. Habemus ergo in caſu primo* rationes multiplices & ſubmultiplices, *in ſecundo* ſuperparticulares & ſubſuperparticulares, *in tertio* ſuperpartientes & ſubſuperpartientes, *in quarto* multiplices ſuperparticulares & ſubmultiplices ſubſuperparticulares, *in quinto denique* multiplices ſuperpartientes & ſubmultiplices ſubſuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari poſſunt. Aut enim exponens* 1°. *eſt fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel ſimplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si ſimplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel* 2°. *unitas eſt, vel* 3°. *unitate major. Similiter ſi multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel* 4°. *unitas eſt, vel* 5°. *unitate major. In caſu primo* ratio *eſt* ſubmultiplex; *in ſecundo* ſubſuperparticularis; *in tertio* ſubſuperpartiens; *in quarto* ſubmultiplex ſubſuperparticularis; *in quinto* ſubmultiplex ſubſuperpartiens.

(*a*) In *Comment. ad Elem.* V. EUCLIDIS. f. 179. Tom. 1. Oper.

DEFINITIO XLVIII.

149. *Rationes eædem* ſunt, quarum antecedentes ad ſuos conſequentes eodem modo referuntur, hoc eſt, quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

150. *Per hanc definitionem agnoſci poſſe etiam identitatem rationum irrationalium patet ex Schol. Def.* 42. (§. 137).

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis ſuum conſequentem, vel quantam conſequentis partem continet; toties antecedens alterius ſuum conſequentem, vel tantam conſequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in conſequente ſuo continetur, toties antecedens alterius continetur in ſuo conſequente (§. 131).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit $A : B = C : D$, ſeu, in exemplo ſingulari, $8 : 4 = 30 : 15$. Et hoc modo identitatem rationum in poſterum deſignabimus (§. 141).

SCHO-

SCHOLION II.

153. *Alii ſignis aliis utuntur. Communiter* A. B : : C. D *ſcribere ſolent. Sed ſecundum leges Artis characteriſticæ ſigna ſcientifica non-ſcientificis præferri debent. Sunt autem ſigna ſcientifica, ſeu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis ſimplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non diſcernantur niſi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iiſdem exponentes iidem ſint (§. 149), rationes eædem ſunt etiam ſimiles (§. 24), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas, vel ſimilitudo, dicitur *Proportio.* Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales.* Ex. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, ſeu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* eſt, ſi conſequens primæ rationis idem eſt cum antecedente ſecundæ, ut ſi 3 : 6 = 6 : 12 : *Diſcreta* vero, ſi conſequens primæ diverſus ab antecedente ſecundæ, ut ſi 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *Terminus*, qui conſequentis primæ & antecedentis ſecundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 eſt medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius A S. VINCENTIO (*a*) *conſiderat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, &* Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus diſſimilibus deſumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

(*a*) *Quadratura Circuli* lib. 8. f. 865.

DEFINITIO LI.

158. Rationum diverſarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, ſi fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, ſi F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo deſignabimus. Ex. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam 6 : 2 (= 3) > 5 : 4 ($= 1\frac{1}{4}$); ſed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *compoſita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem conſequentibus. Ita 6 ad 96 eſt in ratione compoſita 2 ad 8 & 3 ad 12. In ſpecie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus ſimilibus componitur, multiplicata nempe uniuſcujuſque rationum ſimilium. Ita 48 : 3 ſeu 16 : 1 eſt ratio duplicata ipſarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde ſimul intelligitur, quænam *ratio* dicenda ſit *ſubduplicata*, *ſubtriplicata*, *ſubquadruplicata* &c. & in genere *ſubmultiplicata.* Nempe 4 : 1 eſt ratio ſubduplicata ipſius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA XI.

160. *Quæ ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commenſurabilia ſunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota eſt unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum, vel eſt pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commenſurabilia ſunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in diviſione ſit ut diviſor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); ſi numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas eſt ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commenſurabilis unitati (§. 160), adeoque numerus rationalis (§. 39)

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviſo (§. 134, 136); rationis rationalis exponens eſt numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA XII.

163. *Commenſurabilia ſunt inter ſe, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommenſurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commenſurabilium aut unum eſt pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quodſi adeo in caſu priore quantitas minor, in poſteriore pars aliquota communis pro unitate aſſumatur; reſpondebit in priore quantitati majori, in poſteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in caſu priore quantitates ſunt inter ſe ut unitas, in poſteriore ut numerus rationalis integer, ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommenſurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31). Nulla ergo datur unitas, cui commenſurabilia exiſtant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commenſurabilis exiſtat (§. 39); ipſa non ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commenſurabilium ratio eſt rationalis; incommenſurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommenſurabiles, in Geometria demonſtrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commenſurabilium exponens eſt numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes* A : B *&* C : D, *ſimiles eidem tertiæ* F : G, *ſunt etiam ſimiles inter ſe: & ſimilibus ſimiles ſunt inter ſe ſimiles.*

DEMONSTRATIO.

Rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt

$6 : 3 = 8 : 4$	etiam eædem ei-
$10 : 5 = 8 : 4$	dem tertiæ (§. 154).
Ergo $6 : 3 = 10 : 5$	Quare cum ſit A : B = F : G &

C : D = F : G (§. 152); erit A : B = C : D (§. 87); conſequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro

Porro A : B = C : D, & F : G = H : E, itemque C : D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H : E, *per demonſtr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonſtr.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

168. *Idem C ad æqualia A & B, & æqualia A & B ad idem C, vel etiam ad æqualia C & D, eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 71, 94); conſequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 71, 94); conſequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 152). *Quod erat ſecundum.*

Sit denique A = C & B = D, erit A : B = C : D (§. 71, 94); conſequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XV.

169. *Si fuerit A : B = C : D; erit etiam* invertendo *B : A = D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex diviſione ipſius A per B emergens E, & quotus ex diviſione ipſius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69); conſequenter B : A = 1 : E & B : C = 1 : G (§. 152). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* ſeu E = G (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168); conſequenter B : A = D : C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

170. *Partes ſimiles* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t *: ſi tota ad partes eandem rationem habent, partes ſunt ſimiles : & tota ad partes ſimiles eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, ſi fieri poteſt, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *p* & P per diverſitatem rationis ad tota a ſe invicem diſtingui poterunt (§. 132): Erunt adeo diſſimiles (§. 24). Quod cum ſit abſurdum, utpote contra hypotheſin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si *t* : *p* = T : P, *per hypoth.* erit *p* : *t* = P : T (§. 169). Ergo, *per demonſtrata*, P & *p* ſunt partes ſimiles. *Quod erat alterum.*

Si P & *p* ſunt partes ſimiles totorum T & *t*, erit P : T = *p* : *t*, *per num.* 1. adeoque T : P = *t* : *p* (§. 169), hoc eſt, tota ad partes ſimiles eandem rationem habent.

THEOREMA XVII.

171. *Partes ſimiles* P *&* p *ſunt inter ſe ut tota* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum ſit idem cum partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 9); quoties ſumitur totum, toties etiam ſumitur pars ejus quantalibet, ex. gr. quarta, vigeſima, milleſima, millioneſima, aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare ſi ponamus totum minus *t* toties ſumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipſum ſumitur, toties etiam ſumenda ejus pars *p*, donec parti ipſius T ſimili, quæ eſt P,

æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipſum *t*. Sunt ergo partes ſimiles ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum eſt, numerum, qui indicat, quoties ſumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non ſemper eſſe rationalem; ſed irrationalem quoque eſſe poſſe: quo in caſu tota ad ſe invicem rationem irrationalem habent.* Ex. gr. *In Geometria demonſtrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties ſumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero eſt, ſi latus quadrati ſit diviſum in duas partes, quarum una eſt pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties ſumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THEOREMA XVIII.

173. *Si* A : B = C : D; *erit etiam* alternando *ſeu* permutando A : C = B : D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque ſimiles (§. 170) haberi poſſunt. Sunt igitur ut tota, hoc eſt antecedentes A & C eam inter ſe rationem habent quam conſequentes B & D (§. 171).

II. Si antecedentes A & C conſequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D, *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169); conſequenter B : D = A : C *per caſ.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in diviſione unitas ad diviſorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit A : B = C : D, & B = D; erit etiam A = C. Eſt enim A : C = B : D (§. 173). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit B : A = D : C, & B = D; erit etiam A = C. Cum enim ſit A : B = C : D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA XIX.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia ſunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

A : B = D : B, *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo oſtenditur, ſi A : B = D : C & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A = C : B, *per hypoth.* Ergo C : C = A : B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, ſi C : A = D : B & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

178. *Si quantitates quaſcunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E ſunt inter ſe ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

6 12
3 3
18 36
6 : 12 = 18 : 36.

Cum ſit 1 : C = A : D & 1 : C = B : E (§. 66); erit A : D = B : E (§. 167); conſequenter A : B = D : E (§. 173). *Q. e. d.*

SCHOLION.

179. *Cum C ſit eadem quantitas in utroque caſu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem eſt (§. 13); conſequenter* 1 : *C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo ſi A > B, etiam A C > B C (§. 149), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius eſt majus altero.

THEOREMA XXI.

181. *Si quantitates quaſcunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G ſunt inter ſe ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

3) 24 : 12
8 : 4
8 : 4 = 24 : 24

Cum ſit 1 : C = F : A & 1 : C = G : B (§. 174); erit F : A = G : B (§. 167); conſequenter F : G = A : B (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

182. Si A > B, etiam F > G (§. 149), hoc eſt, ſi majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior poſteriore major eſt.

THEOREMA XXII.

183. *Si rationum ſimilium A : B & C : D antecedentes vel conſequentes per idem E dividas; in caſu priore quoti F & G ad conſequentes B & D; in poſteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24
3 3
1 : 6 = 4 : 24

Quoniam A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 173). Sed A : E = F, & C : E = G, *per hypoth.* Ergo F : G = A : C (§. 181) = B : D (§. 167); conſequenter F : B = G : D (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 173). Sed B : E = H, & D : E = K *per hypoth.* Ergo B : D = H : K (§. 181); conſequenter A : C = H : K (§. 167), & hinc tandem A : H = C : K (§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. *Si rationum ſimilium A : B & C : D antecedentes vel conſequentes per eandem quantitatem E multiplices; in caſu priore facta A E & C E ad conſequentes B & D; in poſteriore antecedentes A & C ad facta B E & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2 : 6 = 3 : 9
6 6
12 : 6 = 18 : 9

Quia A : B = C : D, *per hypoth.* A : C = B : D (§. 173). Sed E A : E C = A : C (§. 178). Ergo EA : EC = B : D (§. 167); conſequenter EA : B = EC : D (§. 173). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, eſſe A : BE = C : DE, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. *Si rationum ſimilium A : B & C : D antecedentes per idem E & conſequentes per idem F multiplices aut dividas; in caſu priore facta, in poſteriore*

quoti eandem inter ſe rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} 3:6=12:24 \\ \underline{2\ \ 6\quad\ 2\ \ 3} \\ 6:18=24:72 \end{array}$$

$A:B=C:D$, *per hypoth.* Ergo $EA:B=EC:D$ (§. 184), conſequenter $EA:FB=EC:FD$ (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

$$\begin{array}{l} 3:6=12:24 \\ \underline{3\ \ 2\quad\ 3\ \ 2} \\ 1:3=4:12 \end{array}$$

Sit $A:E=G$, $B:F=H$, $C:E=K$, & $D:F=L$. Quoniam $A:B=C:D$, *per hypoth.* $G:B=K:D$ (§. 183). Ergo & $G:H=K:L$ (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXV.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad conſequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad conſequentem ſuum. Et majus antecedente rationis minoris ad conſequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit $A:B > C:D$ (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, neceſſe eſt ut minus quam A, hoc eſt, pars ipſius (§. 20), per B dividatur (§. 182): quæ pars ſi dicatur F, erit $F:B=C:D$, hoc eſt, in majore ratione, antecedentis pars eandem rationem habet ad conſequentem, quam minoris antecedens ad ſuum (§. 152). *Quod erat unum.*

Similiter ſi A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit $A:B < C:D$ (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, neceſſe eſt ut majus quam A, cujus adeo pars eſt A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod ſi dicatur F, erit $F:B=C:D$, hoc eſt, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad conſequentem, quam majoris antecedens ad ſuum conſequentem (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

187. *Si fuerint quotcunque rationes ſimiles $A:B$, $C:D$, $E:F$, $G:H$, &c.; ſumma omnium antecedentium $A+C+E+G$, &c., eſt ad ſummam omnium conſequentium $B+D+F+G$, &c., ut antecedens unius rationis A ad ſuum conſequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. eſſe $A=\frac{1}{2}B$, $C=\frac{1}{2}D$, $E=\frac{1}{2}F$, $G=\frac{1}{2}H$; erit $A+C+E+G=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}H$ (§. 88), hoc eſt ſumma omnium antecedentium eſt ſubdupla ſummæ omnium conſequentium; conſequenter ut antecedens unius rationis ad ſuum conſequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, ſi alia quæcunque ratio antecedentium ad conſequentes ponatur, vel etiam antecedentes ſint conſequentibus majores; patet propoſitum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. *Si fuerit ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DE-

Demonstratio.

24 : 12	
6 : 3	
18 : 9	

Aut $A : B = C : D$, aut $A : B > C : D$, aut denique $A : B < C : D$ (§. 21). Ponamus $A : B > C : D$. Ergo pars ipſius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§.186), hoc eſt, $F : B = C : D$ (§.152), conſequenter $F+C : B+D = C : D$ (§.187). Quare cum etiam ſit $A+C : B+D = C : D$, *per hypoth.* erit $F+C = A+C$ (§. 177), adeoque $F = A$ (§.91). Sed F eſt pars ipſius A, *per demonſtrata.* Pars igitur toti æqualis. Quod cum ſit abſurdum (§.84), ut ſit $A : B > C : D$ fieri nequit.

Sit jam $A : B < C : D$. Ergo majus ipſo A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc eſt, $G : B = C : D$ (§. 152), conſequenter $G+C : B+D = C : D$ (§.187). Quare cum etiam ſit $A+C : B+D = C : D$, *per hypoth.* erit $G+C = A+C$ (§.177), adeoque $G = A$ (§.91). Sed A eſt pars ipſius G, *per demonſtrata.* Ergo pars toti æqualis. Quod cum ſit abſurdum, ut ſit $A : B < C : D$ fieri nequit.

Quoniam itaque nec $A : B > C : D$, nec $A : B < C : D$, *per demonſtrata*: erit utique $A : B = C : D$, conſequenter $A : B = A+C : B+D$ (§.187). *Q. e. d.*

Theorema XXVIII.

189. *In rationibus ſimilibus $A : B$ & $C : D$, differentia antecedentium $A-C$ eſt ad differentiam conſequentium $B-D$ ut antecedens rationis utriuslibet ad ſuum conſequentem.*

Demonstratio.

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§.173). Ponamus $A > C$ & $B > D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 9, 20). Quamobrem cum ſit $A : B = C : D$, *per hypoth.* erit $A-C : B-D = A : B$, vel $= C : D$ (§.188). *Q. e. d.*

Theorema XXIX.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad ſuum conſequentem, ita antecedens alterius ad conſequentem ſuum; erit etiam* componendo, *ut ſumma antecedentis & conſequentis primæ rationis ad antecedentem vel conſequentem primæ, ita ſumma antecedentis & conſequenquentis ſecundæ ad antecedentem vel conſequentem ſecundæ.*

Demonstratio.

4 : 2 = 10 : 5	
6 : 4 = 15 : 10	
vel 6 : 2 = 15 : 5	

Si $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§.173). Sed $A+B : C+D = A : C = B : D$ (§. 187). Ergo $A+B : A = C+D : C$; item $A+B : B = C+D : D$ (§.173). *Q. e. d.*

Theorema XXX.

191. *Si fuerit $A : B = a : b$ & $A : C = a : c$, &c. erit $A : A+B+C = a : a+b+c$.*

Demonstratio.

Quoniam $A : B = a : b$, & $A : C = a : c$ *per hypoth.* erit $A : a = B : b = C : c$ (§. 173, 167). Quare $A : a = A+B+C : a+b+c$ (§.187), & hinc $A : A+B+C = a : a+b+c$ (§.173). *Q. e. d.*

Theorema XXXI.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque ſimiles $A : B = C : D$, $E : F = G$:*

= *G* : *H*, *I* : *K* = *L* : *M*, *&c.*; *erit ſumma omnium antecedentium primarum rationum A + E + I, &c. ad ſummam omnium conſequentium B + F + K, &c. ut ſumma omnium antecedentium ſecundarum rationum C + G + L, &c. ad ſummam omnium conſequentium D + H + M, &c.*

DEMONSTRATIO.

Cum A : B, E : F, I : K, &c. itemque C : D, G : H, L : M, &c. ſint rationes ſimiles, *per hypoth.* erit A + E + I, &c. : B + F + K, &c. = A : B, & C + G + L, &c. : D + H + M, &c. = C : D (§. 187). Eſt vero A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo A + E + I, &c. : B + F + K, &c. = C + G + L, &c. : D + H + M, &c. (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad ſuum conſequentem, ita antecedens alterius ad conſequentem ſuum; erit etiam* dividendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus conſequentem, ita differentia terminorum ſecundæ ad ejus conſequentem: itemque* convertendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum ſecundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

6 : 4 = 15 : 10
2 : 4 = 5 : 10
2 : 6 = 5 : 15

Si fuerit A : B = C : D, *per hypoth.* erit A : C = B : D, (§. 173), conſequenter A — B : C — D = B : D = A : C (§. 189). Ergo A — B : B = C — D : D, & A — B : A = C — D : C (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ D ad conſequentem ſuum E, & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita conſequens ſecundæ E ad aliud quidpiam F; erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens ſecundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 6 : 3
2 : 8 = 3 : 12
4 : 8 = 6 : 12

Quoniam A : B = D : E & B : C = E : F, *per hypoth.* erit A : D = B : E & B : E = C : F (§. 173); conſequenter A : D = C : F (§. 167). Quare A : C = D : F (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Quodſi fuerit A : B = D : E, & C : B = F : E; cum etiam ſit B : C = E : F (§. 169), erit A : C = D : F (§. 194).

COROLLARIUM II.

196. Similiter ſi fuerit A : B = C : D, & A : F = C : G; cum etiam ſit B : A = D : C (§. 169), erit B : F = D : G (§. 194).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit A : B = C : D, & F : A = G : C, cum etiam ſit A : F = C : G (§. 169), erit B : F = D : G (§. 196).

THEOREMA XXXIV.

199. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ E ad ſuum conſequentem F, & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem ſecundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad conſequentem ſecundæ F.*

DE-

Demonstratio.

$$\begin{array}{l} 8 : 4 = 12 : 6 \\ 4 : 16 = 3 : 12 \\ \hline 8 : 16 = 3 : 6 \end{array}$$

Quoniam A : B = E : F, *per hypoth.* ſi ponatur B : C = F : G, erit A : C = E : G (§. 194). Eſt vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo D : E = F : G (§. 167), & D : F = E : G (§. 173); conſequenter A : C = D : F (§. 167). *Q. e. d.*

Corollarium I.

199. Quodſi fuerit A : B = E : F, & C : B = E : D; cum etiam ſit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

Corollarium II.

200. Similiter ſi fuerit B : A = F : E, & B : C = D : E; cum etiam ſit A : B = E : F (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

Corollarium III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E, & C : B = E : D; cum etiam ſit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 200).

Corollarium IV.

202. Si idem C, vel æqualia, per majus A & minus B dividas; quotus prior F erit minor poſteriore G. Eſt enim A : C = 1 : F, & B : C = 1 : G (§. 174); adeoque C : B = G : 1 (§. 169). Ergo A : B = G : F (§. 198). Sed A $>$ B, *per hypoth.* Ergo G $>$ F (§. 149).

Theorema XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet quam minus B.*

Demonstratio.

Quoniam A $>$ B, *per hypoth.* erit A : C $>$ B : C (§. 182), hoc eſt, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

Theorema XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus eſt.*

Demonstratio.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipſius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipſi B æqualis eſt (§. 177). Quare A $>$ B (§. 20). *Q. e. d.*

Theorema XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

Demonstratio.

Quoniam A $>$ B, *per hypoth.* erit C : A $<$ C : B (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

Theorema XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus eſt.*

Demonstratio.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipſius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc eſt, D : A = C : B (§. 152), & hinc D : C = A : B (§. 173). Sed D $<$ C (§. 20). Ergo A $<$ B (§. 149). *Q. e. d.*

Theorema XXXIX.

207. *Duæ quantitates ſe mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

Demons-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ \hline 8 & = 8 \end{array}$$

Sint duo factores A & B, erit $1 : A = B : AB$ & $1 : B = A : BA$ (§. 66). Eſt vero etiam $1 : A = B : BA$ (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* $B : AB = B : BA$ (§. 167). Ergo $AB = BA$ (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam $AB = BA$ (§. 207); erit $CAB = CBA$ (§. 93), adeoque & $ABC = BAC$ (§. 207). Similiter quia $CB = BC$ (§. 207); erit $ACB = ABC$ (§. 93), adeoque & $CBA = BCA$ (§. 207). Quare $CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA$ (§. 87), hoc eſt, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in ſe invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo oſtenditur, ſi plures fuerint factores: ſed demonſtratio prolixior evadit, ſi plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA XL.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur; quotus eſt multiplicans: ſi per multiplicantem; quotus eſt multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 66). Eſt etiam multiplicandus ad factum (ſi hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus æqualis eſt multiplicanti (§. 177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas eſt ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§ 66); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173). Sed ſi factum per multiplicantem dividis; multiplicans eſt ad factum ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus eſt æqualis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta ſunt numeri compoſiti (§. 76).

THEOREMA XLI.

212. *Si quotus per diviſorem multiplicatur, aut contra; factum eſt dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad diviſorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed ſi quotus per diviſorem multiplicatur, erit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad factum (§. 66). Ergo factum æquale eſt dividendo (§. 177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum ſit factum, ſi diviſor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc caſu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLII.

213. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales* $A : B = C : D$; *ſint totidem aliæ inter ſe quoque proportionales* $E : F = G : H$: *ſi poſteriores ſingulas in ſingulas priores ducas; facta inter ſe proportionalia ſunt, nempe* $AE : FB = GC : DH$.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Cum ſit *per hypoth.*

A : B = C : D & E : F = G : H
E F E F C D C D

———————————————

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH. (§. 185). Sed EC = CE & FD = DF (§. 207). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167) = GC : HD (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

214. *Rationis compoſitæ exponens eſt æqualis facto, quod producunt exponentes ſimplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens = m; ſecundæ C : D exponens ſit = n. Erit m: 1 = A:B & n: 1 = C:D (§. 140). Ergo mn: 1 = AC : BD (§. 213); conſequenter mn eſt exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc eſt compoſitæ ex A:B & C:D (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens eſt* 2, *hujus* 4. *Rationem compoſitam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192 : 24 = 8, *quod eſt factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonſtratio locum habet, ſi plures fuerint rationes.*

THEOREMA XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c.; prima A ad tertiam C eſt in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata, &c. primæ A ad ſecundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C; *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipſius A ad B (§. 159). Sed AB : BC = A : C (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipſius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC eſt ad BCD in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D eſt in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 167). *Quod erat ſecundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonſtrari poſſit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad ſextum quintuplicatam, &c. primi ad ſecundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F, &c. ſeries; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes conſequentes in ſe invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF ſunt in ratione compoſita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, &c. (§. 159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178). Ergo etiam A ad F eſt in ratione compoſita omnium modo recenſitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes compoſitæ ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt, inter ſe æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 4 : 2	
3 : 1 = 12 : 4	
5 : 1 = 20 : 4	
90 : 3 = 960 : 32	
= 30	

Sit A : B = C : D, E : F = G : H, I : K = L : M, *per hypoth.* erit AE : BF = CG : DH (§. 213), adeoque & AEI : BFK = CGL : DHM (§. *cit.*). Ratio vero AEI : BFK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159). Ergo conſtat propoſitum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; æquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque ſecundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt, inter ſe comparatæ.*

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipſarum A & C per *m*A & *m*C, itemque æquemultiplices ipſarum B & D, per *n*B & *n*D. Cum ſit A : B = C : D, *per hypoth.* erit etiam *m*A : *n*B = *m*C : *n*D (§. 185); conſequenter *m*A : *m*C = *n*B : *n*D (§. 173). Quamobrem ſi *m*A = *m*C, erit *n*B = *n*D; ſi *m*A > *m*C, etiam *n*B > *n*D; ſi *m*A < *m*C, etiam *n*B < *n*D (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* EUCLIDES (*a*) *in iis definiendis, ac inde ceteras demonſtrat.*

(*a*) Elem. V. def. 5.

CAPUT IV.

De ſpeciebus Arithmeticæ in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. *SI numerator eſt æqualis denominatori; fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro: ſi minor; fractio $\frac{3}{4}$ minor eſt integro: ſi major; fractio $\frac{5}{4}$ integro ſeu unitate major eſt.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem ſeu integrum in partes æquales (ex. gr. in noſtro caſu in 4) diviſum, & numerator numerat partes iſtiuſmodi in caſu aliquo datas (§. 59). Quod ſi ergo numerator denominatori æqualis; *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot ſaltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis; conſequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat ſecundum.*

Si

Si denique numerator major eſt denominatore; *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales ſunt (*§.* 86). Ergo integrum parti fractionis æquale eſt; conſequenter ipſa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales, vel eodem majores, dicuntur vulgo* ſpuriæ; *quia proprie loquendo fractiones non ſunt niſi quæ integro minores* (*§.* 38).

PROBLEMA XVII.

223. *Invenire, quot integra fractio* ($\frac{8}{4}$), *quæ integro major, contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem eſt cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum ſcribatur loco numeratoris.

Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66, 169). Sed unitas & denominator datus ſunt idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales ſunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

225. *Fractiones homogeneæ æquales ſunt, quarum numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent: major eſt, cujus numerator habet rationem majorem: minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter ſe ſint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (*§.* 35), adeoque ipſarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare ſi numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales ſunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem ſuum rationem majorem habet, ea major eſt: cujus numerator minorem habet, ea minor eſt (§. 204). *Q. e. d.*

Ex. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, ſi numerator unius toties contineatur in denominatore ſuo, quoties numerator alterius in ſuo continetur. Fractio minor eſſe intelligitur, ſi numerator ipſius pluries continetur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in denominatore ſuo: id quod diviſio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

227. Quodſi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta ($\frac{8}{12}$), in poſteriore quoti ($\frac{2}{3}$) conſtituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178, 181).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Diviſor primæ diviſionis, ſeu numerus datus minor, denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.
3. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum.

Ex. gr. Sint numeri dati 168 & 240; reperietur eorum communis menſura maxima 24 hunc in modum:

7		
182	24	1
240 (1	168 (2	72 (3
168	72	24

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth. & §. 74*). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 78).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ, ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72; adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis, ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum ſit abſurdum (§. 74), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

229. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$, per diviſ. tert.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$, per diviſ. ſec. $= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$, per num. I, $= 7 \cdot 24$.

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$, per diviſ. prim. $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, per num. I & II $= 10 \cdot 24$.

SCHOLION II.

230. *In lineis communis menſura maxima invenitur per mutuam earundem a ſe invicem ſubtractionem. In numeris autem compendii gratia diviſio ſubtractioni ſubſtituitur: ut exemplum oſtendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA XX.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere; h. e. invenire fractionem datæ* ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, ſed minoribus numeris expreſſam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48, per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæſitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo diviſio fit per communem menſuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ ſola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Moleſtius accidit inexercitatis communem menſuram maximam quærere, quam, iterata per menſuras minores ſponte animadverſas diviſione, fractiones reducere.*

PROBLEMA XXI.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere; h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales ſunt, & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5} = \frac{2\cdot5}{3\cdot5}$ & $\frac{4\cdot3}{5\cdot3} = \frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Caſus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuſcujuſque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4} = \frac{2\cdot6\cdot4}{3\cdot6\cdot4}$ & $\frac{1\cdot3\cdot4}{6\cdot3\cdot4}$ & $\frac{3\cdot3\cdot6}{4\cdot3\cdot6} = \frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 93 & § 207, 208. Quod vero æquivaleant primum propoſitis, manifeſtum eſt per §. 227. Conſtat ergo propoſitum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

236. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 235).
2. Addantur numeratores (§. 96) & ſummæ ſubſcribatur denominator communis.

Ex. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 235) $= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§. 223).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 235) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 223) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores ſint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero

 addi

addi nequeunt, niſi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem ſunt reducendi (§. 35). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diverſos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius ſubducatur (§. 103) & reſiduo denominator communis ſubſcribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 235) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fractio æquatur numeratori per denominatorem diviſo; hoc eſt,* $\frac{3}{4} = 3:4$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem, ſeu integrum, ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38, 59). Quare cum ſit ut antecedens ad conſequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140); ſi antecedens ſumatur numerator 3, conſequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviſo (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta conſtituunt fractionem quæſitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ ($\frac{2}{3}$) $=$ A : B (§. 238) $=$ F, & $\frac{C}{D}$ ($\frac{1}{2}$) $=$ C : D (§. *cit.*) $=$ G; erit B : A $=$ 1 : F, & D : C $=$ 1 : G (§. 69). Ergo BD : AC $=$ 1 : FG (§. 213), hoc eſt, $\frac{AC}{BD}$ ($\frac{2.1}{3.2}$) $= \frac{FG}{1}$ (§. 169) $=$ FG ($\frac{2}{6}$). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera diviſio ſit, quæ multiplicatio vocatur. Ex. gr.* $\frac{2}{3}$ *multiplicare per* $\frac{1}{2}$ *idem eſt ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio ſequente modo facilius demonſtratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ inſtar totius conſiderata dividenda eſt in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, ſcilicet in noſtro caſu in tres, & pars iſta multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus eſt ut annotemus, ſi fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum eſſe ſolum numeratorem in integrum numerum datum. Ex. gr. factum ex* $\frac{3}{7}$ *in* 2 *eſt* $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem* ($\frac{4}{5}$) *per aliam fractionem* ($\frac{2}{3}$) *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Diviſor invertatur. Ex. gr. loco $\frac{2}{3}$ ſcribe $\frac{3}{2}$.
2. Diviſor inverſus ducatur in dividendum

dum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$, ſeu $1\frac{1}{5}$ (§. 223), eſt quotus quæſitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam diviſor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad diviſorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodſi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235), cum eædem ſint æquales quotis ex diviſione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181); conſequenter in hoc caſu numerator dividendæ ad numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ ſunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex diviſione fractionis dividendæ per dividentem emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enaſcitur ex numeratore ipſius dato in denominatorem ſecundæ, numerator vero ſecundæ ex ipſius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum diviſione quotus quæſitus emergit, ſi diviſor inverſus (*juxta* §. 239) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum eſt, quod quoti numeri integri eſſe poſſint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere poteſt. Apparet adeo, cum fractiones ſint rationes (§. 141), eas dividere idem eſſe ac rationum rationes inveſtigare.*

PROBLEMA XXVI.

245. *Integrum* (3) *per fractionem* ($\frac{4}{7}$) *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Diviſor invertatur, ut in Problemate præcedente (§. 243). Ex. gr. loco $\frac{4}{7}$ ſcribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7 diviſoris inverſi.
3. Facto ſubſcribatur ejuſdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ ſive $5\frac{1}{4}$ eſt quotus quæſitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum demonſtratione Problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Geneſi præſertim ac Analyſi numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. Si numerus quicunque 2 in ſe ipſum ducatur; factum 4 *Numerus Quadratus*: ipſe autem hujus intuitu *Radix Quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum ſit ut unitas ad Radicem quadratam, ita Radix ad ipſum Quadratum (§. 66, 246); erit Radix media proportionalis inter unitatem & Quadratum (§. 156).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* ſeu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix Cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum ſit ut unitas ad Radicem, ita Radix ad Quadratum (§. 66, 246) & ut unitas ad Radicem ita Quadratum ad Cubum (66, 248); erit etiam Radix ad Quadratum ut Quadratum ad Cubum (§. 167), hoc eſt, Unitas, Radix, Quadratum & Cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156), & Radix Cubica eſt primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter Unitatem & Cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum iſtiuſmodi multiplicatio in infinitum continuari poſſit; facta inde genita generali *Poteſtatum, Potentiarum, Dignitatum* nomine appellari ſolent. VIETA eadem *Magnitudines ſcalares* vocat.

DEFINITIO LVI.

251. *Exponens dignitatis* eſt numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens Quadrati eſt 2, Cubi 3 (§. 246, 248).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime diſtinguunt per exponentes; ita ut Radix dicatur *Dignitas prima*, Quadratum *ſecunda*, Cubus *tertia* &c. Qui *Arabes* ſequuntur, ſingulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diverſa tamen ab iis, quibus cum DIOPHANTO (*a*) utuntur VIETA (*b*) & OUGHTREDUS (*c*). Nomina *Arabum* ſunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum* ſeu *Biquadratum*, *Surdeſolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdeſolidum ſecundum*, *Quadratiquadrati Quadratum*, *Cubus Cubi*, *Quadratum Surdeſolidi*, *Surdeſolidum tertium* &c. Nomina DIOPHANTI ſunt; *Latus* ſeu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus &c.*

SCHO-

(*a*) In *Libris Arithmeticorum*.
(*b*) In *Iſagoge in Artem Analyt.* c. 3. f. m. 3.
(*c*) In *Clave Mathem.* c. 12. p. m. 34.

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita*: Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. *Qui* Arabum *denominationibus uſi, Potentiarum ſignis ſequentibus utuntur*: 1. R, 2. ℨ, 3. C, 4. ℨℨ, 5. ß, 6. ℨC, 7. Bß, 8. ℨℨℨ, 9. CC, 10. ℨß, 11. Cß &c. *Multo commodius* CARTESIUS (*a*), *monito* KEPLERI (*b*) *obſecutus, radici ſuperius a dextris jungit exponentem*, ex. gr. *ſi* a *fuerit radix, erunt Potentiæ ipſam ſequentes*, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, ſi* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 &c. *ita ut ſit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. *Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere* idem eſt ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. Ex. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem eſt ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem eſt ac invenire numerum 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates ſuperiores nonniſi in Analyſi uſum habeant; in præſenti geneſin & analyſin Quadratorum & Cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet*:

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

(*a*) In *Geometria*.
(*b*) *Harmonices mundi* lib. 1. f. 35. 36.

DEFINITIO LX.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuſcunque dicitur *Binomia*, ſi ex duabus: *Trinomia*, ſi ex tribus: *Multinomia* ſive *Polynomia*, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA LI.

259. *Potentiæ ejuſdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem; hoc eſt, Quadrata habent rationem duplicatam: Cubi triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam: &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio Quadratorum componitur ex duabus, Cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, &c. reliquarum Potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo Quadrata habent rationem duplicatam, Cubi triplicatam, &c. ceteræ Potentiæ rationem tantuplicatam ſuarum radicum, quot unitates habet exponens earundem. (§. 159).

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium Potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim Potentiæ eædem rationem multiplicatam ipſarum A : B , B : C , C : D , D : E &c. vel A : B , C : D, E : F &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt, *per hypoth.* Ergo potentiæ iſtæ, v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§. 250); conſequenter eaſdem (§. 218); atque adeo proportionales ſunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ, componitur ex Quadrato partis primæ, ex Facto dupli primæ in alteram & ex Quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus Quadratus, ſi Radix in ſeipſam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 111). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis primæ (§. 246); 2°. ex facto partis primæ in ſecundam & ex facto ſecundæ in primam, hoc eſt, ex duplo facto primæ in ſecundam, ſeu ex Facto dupli primæ in ſecundam (§. 207, 208); 3°. ex facto partis ſecundæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis ſecundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonſtratio eſt ocularis, ſi, in quocunque exemplo ſingulari, multiplicatio non actu peragitur, ſed ſaltem indicatur; quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræſentant, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. Ex. gr. ſit radix binomia* 34, *aut* 30 + 4; *erit*

30 + 4 *Radix binomia.*
30 + 4
———
16 *Quadratum partis II.*
120 } *Facta ex I in II.*
120 }
900 *Quadratum partis I.*
———
1156 *Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. Cum pars dextra, ſive ſecunda, inter unitates, ſiniſtra ſive prima, inter decades locum obtineat (§. 50); Quadratum illius in loco dextimo, Factum ex unius duplo in alteram in ſecundo, Quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).

SCHOLION II.

264. *Scilicet Quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo Facto ex parte una in alteram cyphra una, Quadrato autem partis ſiniſtræ duæ adjunguntur; ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum nanciſcantur* (§. 49).

COROLLARIUM II.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures ſiniſtimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, Quadratum numeri cujuſcunque componi ex Quadratis ſingularum partium & Factis ex duplo partis cujuſ-

cujuſlibet in omnes ipſa ſiniſteriores: ut adeo Theorema unum compoſitioni omnium numerorum Quadratorum ſufficiat.

Scholion III.

266. *Sit radix 346 : ſumatur 340 pro parte una & 6 pro altera; erit* (§. 261).

340 + 6	
340 + 6	
36	*Quadratum pars* III.
2040	*Facta ex parte* III *in* I & II *ſimul.*
2040	
1600	*Quadratum partis* II.
12000	*Facta ex* I *in* II.
12000	
90000	*Quadratum partis* I.
119716	*Quadratum totius.*

Corollarium III.

267. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex Corollario primo & ejus Scholio intelligitur (§. 263, 264). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur, ut juſtum nanciſcantur locum (§. 49).

Scholion IV.

268. *Extractio Radicis Quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi Quadratis per Theorema præſens componendis operam prius impenderis.*

Problema XXVII.

269. *Ex numero quocunque dato Radicem Quadratam extrahere.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi unicuique aſſignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes Radicis, quot claſſes habentur (§. 265, 267). Notandum vero, quod claſſi ſiniſtimæ interdum nonniſi nota unica relinquatur.

2. Jam cum in claſſe ſiniſtima reperiatur Quadratum notæ ſiniſtimæ Radicis (§. *cit.*); in *Tabula Radicum* (§. 275) quæratur numerus Quadratus ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipſo ſubtrahatur; Radix vero ejus poſt lunulam ſcribatur.

3. Quoti inventi duplum ponatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis, & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex notis pluribus conſtiterit. Inveſtigetur novus quotus per Abacum *Pythagoricum* (§. 109), inventuſque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda Radicis (§. 261, 210).

4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis, & factum ex numero ſubſcripto integro in diviſorem (§. 263) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.

5. Quodſi operatio, juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis claſſibus iteretur; prodibit Radix quæſita (§. 265, 267).

Ex. gr.

11	56	(34
9	: :	
2	56	
	6*	
2	56	
	0	

11	97	16	(346
9	: :	: :	
2	97	: :	
	6*	: :	
2	56	: :	
	41	16	
	6	86	
	41	16	
		0	

 PRO-

PROBLEMA XXVIII.

270. *Radicem Quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator eſt numerus quadratus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239); Quadratum autem ex ductu ejuſdem numeri in ſeipſum enaſcitur (§. 246); Radicem Quadratam extracturus, eam ſigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita Radix Quadrata ex $\frac{4}{9}$ eſt $\frac{2}{3}$; ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, ſi per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus ſubſcribatur (§. 224); ſi numerus datus, qui Quadratus non eſt, ad fractionem reducatur, cujus denominator eſt Quadratus & ex fractione extrahatur Radix (§. 270): quæ prodit fractio Radicem prope veram exhibet in iſtiuſmodi partibus, quas denominatoris Quadrati Radix indicat.

SCHOLION I.

272. *Ex. gr. Si ex 2 extrahenda Radix prope vera, quæ non deficiat in partibus ſextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus Radix $\frac{8}{6}$, ſive $1\frac{2}{6}$, exhibet Radicem a vera magnitudine parte ſexta non differentem, ſeu cujus defectus minor eſt quam $\frac{1}{6}$.*

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus, eidem non niſi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); Radicem prope veram in fractionibus decimalibus deſiderans, numero qui Quadratus non eſt, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorſum & operationem continua: ita enim prodibit Radix prope vera in partibus decimis, centeſimis, milleſimis &c.

SCHOLION II.

274. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Quadrata ex 345; prodibit* $18\frac{57}{100}$.

```
3 | 45 (18 57/100
1 | : :
-----------
2 | 45
  (28)
 224 |
-----------
 2.1.|0.0
  (3|65)
 1 8 25
-----------
  2 7.5.|00
   (37 07)
  2 5 949
-----------
    1 5 5 1
```

SCHOLION III.

275. *Si Tabulis numerorum Quadratorum pro Radicibus ab 1 uſque ad 1000 utaris; in iis evolvi poteſt numerus Quadratus proxime minor eo, qui tres claſſes ſiniſteriores occu-*

```
8697.5   (294 9/10
8643 6   ---------
------
 539|0.0
 (58|89)
 530|0 1
 -------
  899
```

occupat. Ita ſine ullo labore habentur tres notæ priores, ex. gr. in noſtro caſu 294. Plures notæ una inveniuntur, ſi Tabulæ longius extendantur.

THEOREMA LIV.

276. *Numerus Cubicus Radicis binomiæ componitur ex numeris Cubicis duarum partium, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in ſecundam & ex Facto tripli Quadrati partis ſecundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus Cubicus prodit, ſi Quadratum per Radicem multiplicetur (§. 248). Sed Quadratum Radicis binomiæ componitur ex Quadratis partium & Facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare Cubus componitur ex Cubo partis primæ, ex triplo Facto Quadrati partis primæ in ſecundam, ex triplo Facto Quadrati partis ſecundæ in primam, hoc eſt, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in ſecundam, & Facto tripli Quadrati partis ſecundæ in primam (§. 207), atque ex Cubo partis ſecundæ (§. 246, 248). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

277. *Demonſtrationem ocularem denuo ſiſtit exemplum ſingulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit ex. gr. Radix 34 ſeu 30 + 4, erit*

30 + 4	*Radix*
16	*Quadrat. part.* II.
120, 120	*Facta ex* I *in* II.
900	*Quadrat. part.* I.
64	*Cubus part.* II.
480, 480	*Facta ex Quadrat.* II. *in* I.
3600	*Factum ex Quadrat.* I. *in* II.
480	*Fact. ex Quadrat.* II. *in* I.
3600, 3600	*Facta ex Quadrat.* I. *in* II.
27000	*Cubus part.* I.
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, ſiniſtra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus Cubicus dextræ in loco dextimo, Factum ex triplo Quadrato ejus in ſiniſtram in ſecundo, Factum ex triplo Quadrato ſiniſtræ in dextram in tertio, Cubus denique partis ſiniſtræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM II.

279. Si Radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ dextimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod Cubus quicunque componatur ex Cubis ſingularum partium radicis & ex Factis tripli Quadrati quarumlibet ſiniſteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex Factis tripli Quadrati cujuſlibet dexterioris in omnes ſiniſteriores.

SCHOLION II.

280. *Sit Radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, conſequenter (§. 276).*

 346

346	
346	
90000	*Quadrat. part.* I.
12000	*Facta ex* I *in* II.
12000	
1600	*Quadrat. part.* II.
115600	*Quadrat.* I *&* II *ſimul.*
2040	*Facta ex* III *in* I *&* II *ſimul.*
2040	
36	*Quadrat. part.* III.
27000000	*Cubus part.* I.
3600000	*Facta ex Quadr.* I *in* II.
3600000	
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
3600000	*Fact. ex Quadr.* I *in* II.
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
480000	
64000	*Cubus part.* II.
693600	*Facta ex Quadr.* I *&* II *ſimul in* III.
693600	
12240	*F. ex Quad.* III *in* I *&* II *ſim.*
693600	*F. ex Quadr.* I *&* II *ſim. in* III.
12240	*Fact. ex Quadr.* III *in* I *&* II *ſimul.*
12240	
216	*Cubus part.* III.
41421736	*Cubus totius.*

Notandum ſcilicet, ſectionem numeri in duas partes arbitrariam eſſe; cumque Theorema generaliter de Radice utcunque in duas partes diviſæ loquatur, idem quoque ad quamlibet ſectionem applicari poſſe. Ex. gr. *numerus* 346 *non modo, ſtante Theoremate, in* 340 *&* 6, *vel in* 300 *&* 46, *verum etiam in* 195 *&* 151, *in* 89 *&* 257, *& in duas quaſcunque alias partes dividi poteſt: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris Quadratis, immo in genere in Potentiis quibuſcunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis ſingula terminentur facta, ex Corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur. *Vide exemplum in Schol. præc.* (*§.* 280).

PROBLEMA XXIX.

282. *Ex numero dato Radicem Cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus diſtinguatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto Etenim ex tot notis Radix componitur, quot claſſes emergunt (§. 278, 281). Notandum vero, non repugnare, ut claſſi ſiniſtimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In *Tabula Radicum* (*§.* 257) quæratur numerus Cubicus eo proxime minor numero, qui in claſſe ſiniſtima continetur, niſi ipſe in eadem inveniatur, atque ab hoc ſubtrahatur; ejus vero Radix poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars prima Radicis (§. 274).
3. Quoti inventi Quadratum triplum (§. 278, 281) ſcribatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis, & inde porro ſiniſtrorſum ſi ex pluribus notis conſtiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars ſecunda Radicis (§. *cit.* & *§.* 210.)
4. Diviſor ducatur in novum quotum, & productum ſub eo deleto ſcribatur; ſub nota vero media claſſis ejuſdem terminetur Factum ex triplo

triplo Quadrato novi quoti in præcedentem; ſub dextima denique Cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam ſummam collecta ex notis numeri Cubici ſupraſcriptis ſubtrahantur (*§. cit.*).

5. Quodſi operatio per reliquas claſſes, juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit Radix quæſita (§. 279).

Ex. gr.	47	437	928 (362
	27	—	
	20	437	
Diviſor	(2	7)..	
Fact. ex d. in q.	16	2 ..	
Fac. ex 3 □ n.q. in pr.	3	24 .	
Cubus novi quoti		216	
Summa factor.	19	656	
		781	928
Diviſor		(388	8)..
Fact. ex Div. in q. n.		777	6 ..
Fact. ex 3 □ n. q. in pr.		4	32 .
Cubus n. q.			8
Summa factorum		781	928
		000	000.

Problema XXX.

283. *Radicem Cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator Cubus eſt.*

Resolutio & Demonstratio.

Eodem, quo ſupra (§. 270), modo patet, Radicem ſigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam eſſe.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ eſt $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

Corollarium I.

284. Hinc porro eodem, quo ſupra, (§. 271), modo conſequitur, Radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, ſi numerus, qui Cubus non eſt, per hujus denominatoris Cubum multiplicetur, & Radici Cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus ſubjiciatur.

Scholion I.

285. Ex. gr. *Si ex* 12 *extrahenda Radix Cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *Cubum ipſius* 8, *&* *ex facto* 6144 *extrahatur Radix Cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$, *ſeu* $2\frac{2}{8}$, *Radix prope vera, cujus defectus eſt minor quam* $\frac{1}{8}$.

Corollarium I.

286. Immo inde ulterius eodem, quo ſupra (§. 273), modo fluit, Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, ſi 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non Cubo dextrorſum pro decimis, centeſimis, milleſimis &c. partibus jungantur, & operatio (§. 282) continuetur.

Scholion II.

287. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Cubica ex* 3; *eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

3 ($1\frac{44}{100}$	
1	
2	0.0.0
	3 . .
1	2 . .
	48 .
	64
1	744
256..	0.0.0
58	8 . .
235	2 . .
6	72 .
	64
241	984
14	016

SCHOLION III.

288. *Si Tabulis numerorum Cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod ſupra (§. 275) in extrahenda Radice Quadrata commendavimus.*

PROBLEMA XXXI.

289. *Examinare extractionem Radicis Quadratæ ac Cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix Quadrata inventa ducatur in ſe ipſam, & facto reſiduum, ſi quod fuerit, addatur. Quodſi numerus prodeat, ex quo Radix extracta; erit numerus inventus Radix Quadrata dati, vel exacta, vel (ſi talem non habeat) prope vera (§. 246).

```
   1857
   1857
 -------
  12999
  9285
 14856
 1857
 -------
3448449
   1551
 -------
3450000
```

Ex. gr. Radicem Quadratam prope veram ex 345 ſupra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc Radicem 1857 in ſeipſam & facto 3448449 adde reſiduum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centeſimas factum fuerat.

II. Radix Cubica inventa ducatur in ſeipſam, & factum denuo in eandem. Producto poſteriori addatur, ſi quod fuerit, reſiduum. Quodſi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

```
    144
    144
 -------
    576
   576
  144
 -------
  20736
    144
 -------
  82944
 82944
20736
 -------
2985984
  14016
 -------
3000000
```

Ex. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta Radix eſt $1\frac{44}{100}$. Duc hanc Radicem 144 in ſeipſam, & factum 20736 denuo in 144. Producto alteri 2985984 adde, quod ſupra reſiduum erat, 14016. Aggregatum eſt ~~Radix~~ 3 ſex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA LV.

290. *Exponens rationis Quadratorum eſt Quadratum: Cuborum Cubus: & in genere Potentiarum cujuſcunque gradus Potentia ejuſdem gradus exponentis Radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam; Cubi triplicatam: & in genere Potentiæ cujuſcunque gradus rationem multiplicatam ſuarum Radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compoſitæ ſit æqualis facto, quod producunt exponentes ſimplicium (§. 214), exponens vero rationum ſimplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ, & in genere multiplicatæ quæcunque, idem ſit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit Quadratum (§. 246), triplicatæ Cubus (§. 248), & in genere multiplicatæ cujuſcunque Potentia exponentis Radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEO-

Theorema LVI.

291. *Si ex diviſione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & ingenere Potentiæ cujuſcunque per aliam ſimilem, numerus integer prodit; etiam ex diviſione Radicis per Radicem integer prodire debet.*

Demonstratio.

Quotus ex diviſione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuſcunque per aliam ſimilem emergens eſt exponens rationis Quadratorum, Cuborum, vel in genere Potentiarum ſimilium ſe mutuo dividentium (§. 136), adeoque Quadratum, Cubus & in genere potentia exponentis rationis Radicum (§. 290). Quare cum idem ſit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer Quadratus, Cubus, vel Potentia alterius gradus: cujus quoniam Radix itidem rationalis integer eſſe debet (§. 250); etiam exponens Radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

Corollarium.

292. Quare ſi Radix Radicem non metitur, nec Quadratum Quadratum, nec Cubus Cubum, nec Potentia quæcunque aliam ſimilem metitur (§. 74); conſequenter fractio integro major ex iſtiuſmodi Quadratis, Cubis, vel Potentiis quibuſcunque ſimilibus compoſita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

Theorema LVII.

293. *Si numeri integri non datur Radix in integris, nec dabitur per fractos.*

Demonstratio.

Ponamus dari numerum fractum, qui ſit Radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per ſeipſum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotieſcunque fractum per ſeipſum multiplicas, productum ſemper eſt fractus (§. 239), iſque in præſente caſu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus ſit integer, *ex hypoth.* fractus ejus Radix eſſe nequit. *Q. e. d.*

Corollarium.

294. Jam cum numeri primi in ſe ex nullo alio numero in ſe aliquoties ducto oriantur (§. 75); ex numeris primis in ſe nulla perfecta Radix extrahi poteſt in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari poteſt (§. 293).

Hypothesis XIII.

295. *Interdum utile eſt, extractionem Radicis tantum indicari, præſertim ſi perfecta haberi nequit. Eſt autem ſignum radicale ſequens* ($\sqrt{}$): *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, ſi altioris gradus, quam quadrata.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$ denotat Radicem quadratam ex 2; $\sqrt[3]{}\ 5$ denotat Radicem cubicam ex 5.

Scholion.

296. *In Geometria & Analyſi demonſtrabitur, tales Radices, quæ actu dari non poſſunt, eſſe ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; conſequenter numeros* (§. 10), *eoſque irrationales, cum ex hypotheſi rationales non ſint. Dicuntur vulgo numeri* ſurdi: *quamvis olim hujus vocis ſignificatus ſtrictior fuerit* (b). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari ſueverunt.*

(*b*) Vid. Stifelius in *Arithm. integra* lib. 2. c. 12. p. 134.

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. *SI fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 8 : 4
4 3
———————
24 = 24

A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 152). Ergo AD : BC = CD : DC (§. 185). Sed CD = DC (§. 207). Igitur AD = BC (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA LIX.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum eſt æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

6 : 12 = 12 : 24
12 6
———————
144 = 144

Quoniam enim A:B = B:C (*per hypoth.* & §. 156, 152); erit AC = BB (§. 297). Sed BB eſt Quadratum ipſius B (§. 250). Ergo factum extremarum AC æquatur Quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

299. *Si quantitas AD, producta ex duabus aliis ſe mutuo multiplicantibus A & D, fuerit æqualis alteri BC, ex duabus aliis B & C eodem modo producta; erit A : B = C : D.*

DEMONSTRATIO.

6 8
4 3
———————
24 = 24
4:8 = 3:6

AC : AD = C : D (§. 178). Sed AD = BC, *per hypoth.* Ergo AC : BC = C : D (§. 168); conſequenter A : B = C:D (§. 181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in ſerie quatuor quantitatum factum ex ſecunda in tertiam æquale ſit facto ex prima in quartam; erunt quantitates iſtæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex facto 576 extrahatur Radix quadrata 24 (§. 269); quæ erit numerus quæſitus (§. 298).

PROBLEMA XXXIII.

302. *Datis tribus numeris 3, 12, 5; quartum: aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5; aut in altero caſu ſecundus in ſeipſum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 eſt quartus: in altero caſu tertius quæſitus.

DE-

Demonstratio.

Si enim terminum ſecundum per tertium, aut in altero caſu ſecundum per ſeipſum multiplicas; factum ex primo in quartum, in caſu altero ex primo in tertium prodit (§. 297, 298). Quodſi ergo hoc per primum dividis; quotus eſt terminus quartus, in caſu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

Corollarium I.

303. Data quælibet fractio converti poteſt in aliam æqualem datæ denominationis. Quodſi enim, *per Probl. præſ.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem deſideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæſitæ (§. 225).

Ex. gr. ſit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

```
3 —— 2 —— 24
           2
        ----
          48
```

~~1~~
~~48~~ (16
~~33~~

Corollarium II.

304. Quodſi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore aſſumitur; valor fractionis datæ in menſura vulgari reperitur. Ex. gr. Cum apud nos thalerus in 24 groſſos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 groſſos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

Corollarium III.

305. Si vero denominator aſſumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

Scholion I.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti ſolet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate conſtat. Ejus vero loco punctum* (.) *numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut, ex. gr. duæ cyphræ præponantur, ſi fractio milleſimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *ſcribimus* 0. 23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *ſcribimus* 5. 0047. *Eſt vero harum fractionum non exiguus in Matheſi uſus, quas primus in condendis Tabulis ſinuum adhibuit* Johannes Regiomontanus.

Scholion II.

307. *Reſolutio hujus Problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Uſus ejus ampliſſimus tam in vita communi, quam in ſcientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac Regula nullibi eſſe utendum, niſi ubi de numerorum datorum proportione conſtiterit.* Ex. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, ſi aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore 100 congii effluant. Tres in hoc caſu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipſa experientia docet, aquam ſub initium celerius, poſtea tardius effluere; conſequenter quantitatem aquæ effluentis non eſſe tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæſtio per Regulam trium ſolvi nequit.*

Scholion III.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis ſuis proportionalia ſunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium ſolvit. Dato igitur pretio quantitatis cujuſdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuſcunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio reſpondens. Ex. gr. pretium 3 librarum ſunt 4 thaleri, quantum eſt*

pretium 17 *librarum ? Cum ſit , ut* 3 *libræ ad* 17 *libras , ita illarum pretium (quod eſt* 4 *thalerorum) ad pretium harum ; hoc quidem ita invenitur :*

3 L. — 17 L. — 4 Th.
4 | 2 (22⅔ th.
68 | 68
   | 33

Item : 3 *libræ veneunt* 4 *thaleris , quot* 22⅔ *thaleris ? Cum ſint ut* 4 *thaleri ad* 22⅔ , *ita* 3 *libræ ad quæſitas ; harum numerus ita innoteſcit :*

4 Th. — 22⅔ Th. — 3 L.
3 | 2
68 | 68 (17 L.
   | 44

Hinc ſimul patet , quomodo Regula trium examinetur , hoc eſt , inveniatur , utrum operatio per eam rite peracta , nec ne.

SCHOLION IV.

309. *Similiter merces operariorum eſt tempori proportionalis , quo labore defunguntur ; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, ſi æqualibus articulis æqualia penſa abſolvuntur ; eadem numero operariorum proportionalis , ſi penſa æqualia ſinguli abſolvunt. Ex. gr. Intra* 2 *horas* 6 *libri folia perleguntur : Quanto horarum ſpatio* 360 *perlegi poterunt ?*

6 F. — 360 F. — 2 H.
2 | 1
720 | 720 (120 H.
   | 666

SCHOLION V.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei , non eandem proportionem habent , quam res ipſis reſpondentes : ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in groſſos, groſſi in nummos , libræ in ſemuncias , horæ in minuta &c. convertuntur. Ex. gr.* 3 *libræ &* 4 *ſemunciæ veneunt* 2 *thaleris &* 4 *groſſis, quanti libræ* 2 ? *Calculus talis eſt*

3 L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.
32 | 32 | 24
100 S. — 64 S. — 52 gr.
52
128
320 | 3328 (33 $\frac{28}{100}$ ſeu $\frac{7}{25}$ g.
   | 1100
3328

Quodſi noſſe cupias , quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ *groſſi , ita reperies* (§. 304).

25 — 7 — 12
7 | 29 (3 $\frac{9}{25}$ num.
84 | 84
   | 25

Si nummus ulterius divideretur , poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ *unius nummi eodem modo reperiri : ſed cum tanti non ſit ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.*

SCHOLION VI.

311. *In ſcriptis Arithmeticorum* Regula trium inverſa *occurrit , qua terminus datorum primus duci jubetur in ſecundum & factum dividi per tertium , contraria nimirum ratione , qua in* Regula trium directa *uſi ſumus* (§. 302) , *quia ſcilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non eſt , ſi numeri dati , prout proportio exigit , ordinentur. Ex. gr.* 125 *milites operi exſtruendo* 6 *menſes impendunt : quantus requiritur militum numerus , ut intra* 2 *abſolvatur. Evidens eſt , quod ſit , ut ſpatium* 2 *menſium ad ſpatium* 6 *menſium , ita numerus militum , qui opus intra ſex menſes abſolvunt , ad numerum militum , qui intra duos idem exſtruunt. Quo minore enim temporis intervallo exſtruitur,*

tur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
6
———
750

22
750 (375 Mil.
222

SCHOLION VII.

312. *Interdum gemina Regulæ trium applicatione opus eſt, antequam numerus quæſitus innoteſcat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula compoſita *appellatur. Ex. gr.* 300 *thaleri dant intra* 2 *annos uſuram* 36 *thalerorum, quantam dabunt* 20000 *thaleri intra* 12 *annos. Hic per Regulam trium primum invenitur, quanta ſit uſura a* 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem inveſtigatur, quanta eadem intra* 12 *annos exiſtat:*

300 Th. – 20000 Th. – 36 Uſ.
20000
———
720000

2
720000 (2400 Uſ.
330000

2 A. – 12 A. – 2400 Uſ.
12
———
4800
24
———
28800

28800 (14400 Uſ.
222

SCHOLION VIII.

313. *Exemplis iſtiuſmodi Regula trium ſemel applicata ſatisfacere poteſt. Cum enim in noſtro caſu bis* 300 *thaleri eandem dent uſuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *& duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quanta* 20000 *intra* 12; *omiſſis temporis circumſtantiis ita inferatur: bis* 300, *id eſt* 600 *thaleri dant uſuram (intra annum ſcilicet)* 36, *quantam dabunt duodecies* 20000, *id eſt* 240000 *thaleri (itidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 uſ.
36
———
1440000
72
———
8640000

22
8640000 (14400
666600

Poſterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia ſæpe prolabimur.

SCHOLION IX.

314. *Dantur & alii caſus, in quibus iteratæ Regulæ trium applicationi ſuperſedere non licet. Ita, ſi commune ſociorum lucrum vel damnum inter eos diſtribuendum, toties applicatur quot ſunt ſocii. Eſt enim ut ſumma collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipſi reſpondens. Ex. gr. Lucrum commune trium perſonarum eſt* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *ſecundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia ſingulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi 1000 Th.
ſecundi 500
tertii 300
———
Summa Collatorum 1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
2000
———
2000000

222

111
11112
2000000 (1111 $\frac{2}{18}$ Lucrum primi.
1888800
111

1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
2 000
———————
1000000

111
555
1000000 (555 $\frac{10}{18}$ Lucrum ſecundi.
188800
11

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
2 000
———————
600000

33
3666
600000 (333 $\frac{6}{18}$ Lucrum tertii.
188800
11

EXAMEN.

1111 $\frac{2}{18}$	Lucrum primi
555 $\frac{10}{18}$	ſecundi
333 $\frac{6}{18}$	tertii
2000 Th.	Lucrum commune.

SCHOLION X.

315. *Non deſunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum, in Medicina aut Artibus aliis, ex data ratione quam pondera miſcibilium inter ſe habent, inveniuntur pondera miſcibilium requiſita, ut mixtum integrum ſit ponderis dati. Ex. gr. Tria ſimplicia compoſitionem alicujus medicamenti ingrediuntur, doſis unius eſt* 4, *alterius* 5, *tertii* 2 *unciarum: inveniri debent doſes ſingulorum requiſitæ, ut pondus compoſiti ſit* 8 *librarum. En calculi typum:*

Pondus { primi / ſecundi / tertii } ſimplicis — 4 Unc. / 5 / 2
———————
Summa 11 Unc.

11 Unc. – 8 L. – 4 Unc.
16
———
128 Unc. 1
4 176
——— 512 (46 $\frac{6}{11}$ Pond. ſimp. primi
512 111
1

11 Unc. – 128 Unc. – 5 Unc.
5 1
——— 192
640 640 (58 $\frac{2}{11}$ pond. ſimp. ſecund.
111
1

11 Unc. – 128 Unc. – 2 Unc.
2 33
——— 256 (23 $\frac{3}{11}$ Pond. ſimp. tertii.
256 111
1

EXAMEN.

Pondus ſimplicis	primi	46 $\frac{6}{11}$ Unc.
	ſecundi	58 $\frac{2}{11}$
	tertii	23 $\frac{3}{11}$
Pondus mixti		128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION XI.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utiliſſima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302), *primus & ſecundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, ſi fieri poteſt, numerum exacte dividantur, & quoti in ipſorum loca ſurrogentur: ceu ex ſubſequente apparet exemplo.*

Pre-

Pretium 3 Lib. *eſt* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. *eſt* 26 Thal. *quant.* 7 libr.
7) 2 2) 1
Fac. 13 Thal.

Scholion XII.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 *& alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, abſque reductione in* Schol. 5 (§. 310) *præſcripta calculus initur; ut ſequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *eſt* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5 L.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifeſtum ſcilicet eſt, bis 6 nummos conficere groſſum unum, adeoque quinquies 6, groſſos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 groſſi thalerum 1, *& inſuper bis 8 groſſos 16 efficiunt. Quod ſi ergo thalerus iſte 15 reliquis, & 2 priores groſſi 16 reliquis addantur, prodibit pretium quæſitum* 16 th. 18 gr. 6 num.

Scholion XIII.

318. *Si terminus primus vel ſecundus fuerit* 1, *& in priore caſu ſecundus aut tertius, in poſteriore primus in factores reſolvi poteſt; integram ſæpe operationem ſine ſcriptionis ſubſidio mens abſolvit: id quod exempla, quæ ſequuntur, docent.*

Pretium 1 libr. *eſt* 24 th. *quantum* 20 libr.
4 4
6
80
6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *eſt* 18 th. *quantum* 1 libr.
3 2
4 18(6(1½ th.
3 *

Poteſt etiam numerus datus reſolvi partim in factores, partim in partes componentes. Ex. gr. 1 *libra conſtat 9 groſſis, quodnam eſt pretium 35 librarum?*

Quoniam	1 *libra*	*conſtat*	9 *groſſis*
conſtabunt	3 *lib.*	1 *thal.*	3 *gr.*
	30 *lib.*	11 *thal.*	6 *gr.*
	5 *lib.*	1 *thal.*	21 *gr.*
	35 *lib.*	13 *thal.*	9 *gr.*

Hic nempe numerus 35, per quem multiplicatio fieri debet, reſolvitur in partes 30 & 5, pars vero altera 30 in factores 3 & 10.

Scholion XIV.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit* 1, *multa compendia ſimilia multiplicatio & diviſio, ſine Abaci* Pythagorici *ſubſidio peragenda* (§. 116, 120), *ſuppeditat. Ex. gr. pretium 9 librarum eſt 20 thalerorum, quantum eſt pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium deſideratum, ſi parti decimæ illius, id eſt 2 thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id eſt,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium 5 librarum eſt 54 thalerorum, quantum erit pretium 1 libræ? R. Quoniam pretium quæſitum eſt quinta pars dati, duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæſitum. Item: Pretium 1 libræ eſt 18 groſſorum, quantum erit librarum 19? R. Quoniam* 19=20−1, *a duplo pretii dati cyphra aucti (360) ſubducatur ſimplum (18), reſiduum erit pretium (342 groſſorum) quæſitum.*

Scholion XV.

320. *Si duo termini ejuſdem denominationis unitate differant, ſingulari quodam compendio utimur, quod ex ſubjunctis exemplis manifeſtum. Ex. gr. Pretium 5 librarum eſt 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per*

5 &

5 & quotus 6 ab eodem ſubtrahatur, relinquitur quæſitum 24. Item: pretium 8 librarum eſt 24 thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium 8 librarum, pretium datum 24 dividatur per 8 & quotus 3 eidem addatur, ſumma 27 erit quæſitum.

SCHOLION XVI.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* Ex. gr.

Pret. 100 libr. *eſt* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2 2) —— 1
Fac. 15 th. 2 gr.

It. Pret. 60 libr. *eſt* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1 6 42
480 6
7 7
Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. SI in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eas *continue Æquidifferentes* voco. Si vero in ſerie quatuor eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *diſcretim Æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgò* arithmetice proportionales, *(& vere proportionales, de quibus ante,* geometrice proportionales *appellari ſolent, ut ab iis diſtinguantur:) ſed minus proprie, nec ad mentem Veterum.*

COROLLARIUM I.

324. Si termini ſemper creſcunt, in continue æquidifferentibus terminus ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; tertius ſumma ex ſecundo & differentia: ſi decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; ſecundum aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: ſi vero decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

THEOREMA LXI.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes; ſumma primi & tertii eſt medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7 10
7 4
14 = 14

Si enim termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo

mo & differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus; ſumma primi & tertii conſtabit ex primo duplo & differentia dupla Erit adeo ſecundi dupla. *Q.e.d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi termini decreſcunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III, differentia D; demonſtratio ocularis erit iſtiuſmodi:*

II = I + D
III = II + D

Ergo III = I + 2D
Hinc III + I = 2 I + 2 D = 2 II.

THEOREMA LXII.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes; ſumma primi & quarti æqualis eſt ſummæ ſecundi & tertii.*

DEMONSTRATIO.

3 − 5 = 8 − 10
8 3
13 = 13

Si termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare ſi primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia conſtat: Si vero ſecundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter ſe æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi conſequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonſtratio ocularis erit iſtiuſmodi:*

II = I + D IV = III + D
III III I I
II + III = III + I + D IV + I = I + III + D

PROBLEMA XXXIV.

330. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam ſive per 2.

Quotus 11 erit numerus quæſitus (§. 326).

PROBLEMA XXXV.

331. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus ſecundus 5 addatur tertio 9.
2. A ſumma 14 ſubtrahatur primus 8.

Reſiduus 6 eſt quartus quæſitus. (§. 328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem creſcentium vel decreſcentium vocatur *Progreſſio geometrica.* Ex. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum ſecundum eandem differentiam creſcentium vel decreſcentium dicitur *Progreſſio arithmetica.* Ex. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione geometrica progredientibus ſubſcribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi* : STIFELIUS in *Arithmetica* ſua (*a*) *Exponentes* vocat. Ex. gr. ſint duæ progreſſiones :

Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus ſexti 32; 7 logarithmus octavi 128; &c.

COROLLARIUM I.

335. Si progreſſio arithmetica fuerit ſeries numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi deſignant diſtantias numerorum proportionalium ab unitate.

(*a*) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progreſſione geometrica ab unitate incipiente termini ſint dignitates ordine naturali ſe mutuo excipientes (§. 250, 332); ſi progreſſio arithmetica eadem ſit, quæ in exemplo allato, logarithmi ſunt exponentes dignitatum (§. 251). Ex. gr. 2 eſt dignitas prima, ejuſque exponens 1; 64 dignitas ſexta, ejuſque exponens 6.

THEOREMA LXIII.

337. *Si logarithmus unitatis ſit* 0; *erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334); adeoque differentia inter logarithmum unitatis & ſummam logarithmorum efficientium (§. 332). Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo ſumma ex logarithmis efficientium eſt logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati ſint inter ſe æquales, hoc eſt, Quadratum ſit factum ex Radice in ſeipſam (§. 246); logarithmus Quadrati eſt duplus logarithmi Radicis.

COROL-

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum Cubi eſſe triplum (§. 248); Biquadrati quadruplum; Potentiæ quintæ quintuplum; ſextæ ſextuplum &c. logarithmi Radicis (§. 250).

COROLLARIUM III.

340. Eſt ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus Radicis ad logarithmum Potentiæ, ſeu ipſius Dignitatis (§. 251, 255).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus Potentiæ prodit, ſi logarithmum Radicis multiplices per exponentem ejus (§. 65); adeoque logarithmus Radicis habetur, ſi logarithmus Dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *Ex. gr.* 3 *ſumma logarithmorum* 1 *&* 2 *eſt logarithmus producti* 8 *ex* 2 *in* 4. *Similiter* 7 *ſumma logarithmorum* 2 *&* 5 *eſt logarithmus producti* 128 *ex* 4 *in* 32. *Porro* 3 *logarithmus Radicis Quadratæ* 8 *eſt dimidius logarithmi* 6 *Quadrati* 64, *&* 2 *logarithmus Radicis Cubicæ* 4 *eſt ſubtriplus logarithmi* 6 *Cubi* 64.

THEOREMA LXIV.

343. *Si logarithmus unitatis eſt* 0; *erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum diviſoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut diviſor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmos diviſoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum diviſoris & ſummam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis eſt 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi diviſoris a logarithmo dividendi eſt logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

344. *Ex. gr.* 2 *differentia inter* 7 *&* 5 *eſt logarithmus quoti* 4 *ex* 128 *per* 32. *Similiter* 5 *differentia inter* 8 *&* 3 *eſt logarithmus quoti* 32 *ex* 256 *per* 8.

SCHOLION II.

345. *Progreſſiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recenſitas recenſet, atque varios eorum uſus monſtrat* STIFELIUS (*a*): *qui tamen longe cedunt uſui logarithmorum in Trigonometria a* Juſto BYRGIO *primum reperto* (*b*), *ſed a* Johanne NEPERO *ſupra laudato primum oſtenſo* (*c*).

PROBLEMA XXXVI.

346. *Numeri cujuſcunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. progreſſionem geometricam conſtituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario aſſumi poſſunt, modo ſint numeri in progreſſione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; aſſumantur 0.00000000, 1.00000000, 2.00000000, 3.00000000, 4.00000000 &c.

 2. Equi-

(*a*) In *Arithmet.* lib. 1. c. 4. p. 35. & ſeqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50. (*b*) KEPLERUS in *Tabulis Rudolphinis* c. 3. f. 11. (*c*) In *Mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptione.*

2. Equidem manifeſtum eſt, (§. 334) numerorum, qui in ſcala progreſſionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non poſſe; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, ſi uſum ſpectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum eſſe logarithmum novenarii ſeu *9*. Inter 1.0000000 (A) & 10.0000000 (B) quæratur medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1.00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipſius C (§. 334), hoc eſt numeri ternarium ſuperantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum diſtantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur *9*. 0000000, hoc eſt; $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millioneſima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim ſemper minor eſſe debet unica millioneſima. Quærantur itaque in quolibet caſu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.*95424251*.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras, & convenientes logarithmos ſingulis aſſignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.

CALCULI

Calculi Typus.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numerii medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	6.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim vero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur: compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 76), adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi, *per Theor.* 63 *&* 64 (§. 337 *& ſeqq.*) inveniuntur. Ex. gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0.4771212 5 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, eſt 0; pro numeris a 10 ad 100, eſt 1; pro numeris a 100 ad 1000, eſt 2; &c.

SCHOLION.

348. *Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *uſque ad* 20000, *& a* 90000 *ad* 100000, *primus conſtruxit* Henricus BRIGGIUS, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* NEPERI (*a*), *& methodum conſtruendi una expoſuit in ſua* Arithmetica Logarithmica. *Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus VLACCUS (*b*). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon logarithmorum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

PROBLEMA XXXVII.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

RESOLUTIO.

1. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati, & earum ex Canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 347).
3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in Canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in Canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam, *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendam: quæ ſi
5. Addatur logarithmo *per n.* 1 *&* 2 invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

Ex. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri 9238	=	3.9655780
ſubduc. log. num. 9237	=	3.9655309
relinquitur differ. tabul.	- -	471

Inferatur: 10 — 471 — 5
5) 2 — 1 (§. 316).
235.

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235
Summa eſt logar. quæſ.	4.9655544

SCHOLION.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in Tabulis majoribus* BRIGGII *non occurrat.*

PROBLEMA XXXVIII.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

RESO-

(*a*) Vide præfat. ad *Arithmeticam Logarithm.*
(*b*) In altera editione *Arithmeticæ Logarithmicæ* BRIGGII.

Resolutio.

1. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —.

Ex. gr. Quærendus eſt logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus 3 = 0.4771213

Logarithmus $\frac{3}{7}$ = —0.3679767

Demonstratio.

Cum fractio ſit quotus, ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus eſt differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343); adeoque ſi numerator minor denominatore, major logarithmus e minore ſubtrahendus, quo in caſu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

Scholion.

352. *Logarithmum fractionis propriæ eſſe negativum, ſi unitatis ſit 0, jam notavit* Stifelius *(a), & mirum non eſt. Fractio enim minor unitate (§. 221). Sed unitatis logarithmus eſt* 0 *(§. 346). Ergo fractionis logarithmus eſt nihilo minor.*

Corollarium I.

353. Cum in fractione ſpuria $\frac{9}{5}$ numerator ſit major denominatore; ejus logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahitur (§. 238, 343).

Logarithmus 9 = 0.9542425
Logarithmus 5 = 0.6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

Corollarium II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem ſpuriam $\frac{23}{7}$ reduci poſſunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1.3617278
Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

Problema XXXIX.

355. *Invenire numerum logarithmo reſpondentem, qui in Tabulis accuratus non occurrit.*

Resolutio.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato ſubtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita ſecunda ad partes centeſimas per *Probl.* 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in Tabulis reſpondet addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex. gr. Quæratur numerus reſpondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632
——————— minor 3.7589875

Differentia prima 757

Logarithmus datus 3.7589982
— proxime minor. 3.7589875

Differentia ſecunda 107

757 — 100 — 107   107.00 (14
             100   757
         10700   313.0
                     3028
                     102

Cum numerus logarithmo minori conveniens ſit 5741; quæſitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 0, 1, vel 2 (§. 347); characteriſtica mutatur

(a) In *Arithmet. integra,* lib. 3. c. 5. p. 249. b.

tatur in 3, & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem reſpondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteriſticæ unitates acceſſere (§. 346).

Ex. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in Tabulis proxime minori reſpondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur ſub characteriſtica 3 poſt 8300, ubi proxime minori reſpondet numerus 8321. Eſt itaque quæſitus $83\frac{21}{100}$. Quodſi fractionibus his non fueris contentus per caſum primum minores iſtis inveniri poſſunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in Tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo Tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei reſpondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum eſt numerus quæſitus (§ 346).

Ex.gr. Quærendus eſt numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui eſt 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui reſpondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæſitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, ſubtrahi poſſe logarithmum numeri cujuſcunque in Tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo reſiduo reſpondet. Sed operatio tædioſa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo reſpondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus Tabulæ, ſive numeri 10000, hoc eſt, ille ab hoc ſubtrahatur.
2. Logarithmo reſiduo conveniens numerus quæratur (§. 355).

Dico, hunc eſſe numeratorem fractionis, cujus denominator eſt 10000.

Ex. gr. Quæratur fractio reſpondens Logar. defectivo — 0.3679767. Hic ex 4.0000000 ſubd.

relinquit - 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Eſt ergo fractio quæſita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo reſpondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo reſiduo convenientem (§.337, 66). Ergo ſi 10000 ſumatur pro denominatore, erit numerus iſte numerator fractionis quæſitæ (§. 305). Q. e. d.

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato ſubtrahatur logarithmus primi.

Reſiduus eſt logarithmus quarti quæſiti (§. 302, 337, 343).

Ex.

Ex. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.
Logarith. 68 = 1.8325089
Logarith. 3 = 0.4771213

Aggregatum = 2.3096302
Logarithm. 4 = 0.6020600

Logarith. quæſ. 1.7075702, cui in Tabulis reſpondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus uſus præſtantiſſimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæſiti ſunt a* BRIGGIO & VLACCO *logarithmi, cum* NEPERUS *tantum Canonem, utut diverſæ indolis, logarithmorum pro ſinibus & tangentibus conſtruxiſſet. Tyrones igitur hanc de logarithmis doctrinam tantiſper ſeponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. Fractio *decimalis* eſt, cujus denominator eſt *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. Ex. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic ſeriei:* $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progreſſionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ſunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); ſi fractiones decimales ſub forma numerorum integrorum ſcribantur, veluti in noſtro caſu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$ ſcribatur 3.42857 (§. 306), loco denominatorum numeratoribus ſolitarie poſitis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ ſcribimus $3^{0}.4^{\prime}\,2^{\prime\prime}\,8^{\prime\prime\prime}\,5^{IV}\,7^{V}$.

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui ſunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in ſerie numerorum naturalium progrediuntur; ſufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omiſſis, veluti in noſtro caſu 3.42857^{V}.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis ſit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteriſticam nonniſi meris cyphris conſtet (§. 346): a characteriſtica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonniſi characteriſtica logarithmi denominatoris ſubtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION II.

367. *Ex. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8.735; *logarithmus numeratoris* 8735 *eſt* 3.9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0.9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0.324; *logarithmus numeratoris eſt* 2.5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000; *conſequenter logarithmus fractionis decimalis* — 1.5105456. *Iidem ergo ſunt*

ſunt logarithmi fractionum decimalium , qui numerorum integrorum, niſi quod characteriſtica differant.

COROLLARIUM V.

368. Quia characteriſtica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem eſt cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, ſi a logarithmi numeratoris characteriſtica apex ultimæ notæ ſubducitur (§. 366).

SCHOLION III.

369. *Ex. gr. In fractione decimali* 8.735‴ *apex ultimæ notæ eſt* 3; *a logarithmi igitur numeri* 8735 , *qui eſt*, 3. 9412629 , *characteriſtica* 3 *ſubducitur ternarius , ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0. 9412629. *Apex iſte tot continet unitates , quot denominator habet cyphras , ſeu quot a puncto ſequuntur notæ : unde patet , ſi nullus adſcriptus fuerit apex , tot unitates a characteriſtica numeratoris ſubduci, quot denominator cyphras habet , ſeu quot notæ punctum ſequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fractio decimalis exacta eſt*, quæ veram exhibet rationem partis, quam deſignat, ad totum.

Ex. gr. 0. 8 $=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum ſit 8 : 10 = 4 : 5 (§. 181).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fractio decimalis approximans* eſt, quæ rationem partis, quam deſignat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel vera minorem, vel majorem; defectu tamen vel exceſſu infra unitatem notæ ultimæ convenientem exiſtente.

Ex. gr. $\frac{3}{7}$ > 0. 42857, ſed < 0. 42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonniſi prope veram, defectu ſcilicet exiſtente minore quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejuſdem ordinis* dicuntur, quarum iidem ſunt denominatores vel apices.

Ex. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0. 42857 & 0. 0047, notæ 8 & 4 ejuſdem ordinis ſunt, quoniam utrique reſpondens denominator eſt 1000 vel apex ‴: nam 8 deſignat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fractiones decimales addere, vel a ſe invicem ſubtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales, perinde ac numeri integri, conſtant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejuſdem ordinis ſub ſe invicem ſcriptis, additio & ſubtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98, 103) niſi quod in approximantibus locus ultimus ſit incertus (§. 371).

Vide exempla

I. Additionis:

3. 50782	0. 0638
0. 0003	0. 00562
51. 247	7. 138
54. 75512	7. 20742

II. Subſtractionis.

2. 7864	0. 95436
0. 158	0. 08512
2. 6284	0. 86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fractiones decimales per ſe invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111); hoc unice notato, quod, quoniam apices ſunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in ſe invicem ductarum inveniatur, ſi earum apices addantur (§. 337).

Ex. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc eſt, 0.42857 per 0. 0047 multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7, & deinde in 4, ſive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi eſt 5 & multiplicatoris 4; ſumma 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a ſiniſtris adjiciendas eſſe tres cyphras, quarum prima puncto notata deſignat locum integrorum.

```
    0.42857
    0.0047
 -----------
    299999
   171428
 -----------
 0.002014279
```

COROLLARIUM I.

375. Quodſi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri poſſit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime ſequitur, ſit novenario major, conſequenter multiplum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notæ ſunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate ſuperat, veluti in noſtro exemplo notæ tres ultimæ 584 ſunt incertæ, adeoque factum ſumitur 0. 801.

```
   2.3576+
     0.34
 ----------
    94304
   70728
 ----------
  0.801584
```

COROLLARIUM II.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in facto incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior conſtat notis 5, loca incerta ſunt numero 6, adeoque nonniſi duæ notæ ſiniſteriores 11 certæ ſunt. In exemplo anteriore ſi factor 0. 34 ponatur quoque approximans, nulla prorſus nota certa eſt.

```
   18.357
     6.34
 ----------
    73428
   55071
  110142
 ----------
  116.38338
```

COROLLARIUM III.

377. Quodſi nota deficiens, quæ proxime ſequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. Ex. gr. in noſtro exemplo, ubi nota deficiens eſt 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

```
   0.6666
      6.8
 ---------
    53332
   39999
 ---------
   453322
```

SCHOLION.

378. *Caſus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA XLV.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), diviſio peragitur ut in numeris integris (§. 117); hoc unice notato, quod, quoniam apices ſunt logarithmi denominatorum (§. 364),

apex quoti inveniatur, ſi apex diviſoris ab apice dividendi ſubtrahatur (§. 343), & dividendo adjungantur cyphræ, ſi diviſor major fuerit vel dividendum non metiatur.

Ex. gr. Si 0. 002014279 dividatur per 0. 0047, quotus eſt 0. 42857 (§. 374, 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ diviſoris 4 conveniat apex 3, & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 eſt apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter ſi 0. 002014279 dividatur per 0. 42857, quotus eſt 0. 0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ diviſoris 4 apex 1, differentia 3 eſt apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis milleſimis (§. 364), eidem præfigendæ ſunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0. 0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodſi diviſor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel juſto major, vel minor (§. 371); factum ex diviſore in quotum duabus ultimis notis deficere poteſt. Quare cum a notis dividendi vel juſto plus, vel minus ſubtrahatur; ubi diviſor ad eaſdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. Ex. gr. Si dividendus fuerit 21. 3456 & diviſor 3. 82 fractio approximans, nonniſi unica nota quoti 5 certa eſt.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, diviſor exactus; nonniſi notam quoti ultimam ſubinde incertam evadere poſſe patet.

COROLLARIUM III.

382. Si & diviſor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens eſt porro in determinandis locis certis reſpiciendum eſſe vel dividendum, vel diviſorem, prout diviſoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ diviſoris notæ. Ex. gr. Si diviſor ſit 2. 5786, dividendus 3. 067, adeoque cyphris augendus, ut diviſio fieri poſſit; evidens eſt certitudinem expirare in nota tertia dividendi 6, conſequenter junctis duabus cyphris diviſionem eo uſque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas, in multiplicatione & diviſione fractionum decimalium approximantium, accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ ſumantur nunc juſto majores, nunc juſto minores; in diviſione nunc nota dextima in dividendo juſto major, in diviſore juſto minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac diviſione eædem proveniunt notæ, eæ ſunt accuratæ.

Quodſi ergo in exemplo ſuperiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur juſto minores, eorum loco ſumantur 18. 358 & 6. 35; factum quod obtinetur 116. 57330 convenit cum ſuperiori 116. 38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur ſolæ certæ ſunt. Pater autem certam ſic fieri notam tertiam 6, quæ per ſuperiora in dubio relinquebatur (§. 376).

```
 18.358
   6.35
-------
  91790
 55074
110148
-------
116.57330
```

Similiter ſi in exemplo diviſionis ſuperiori (§. 382) nunc 3. 068 dividas per 2. 5786, nunc 3. 067 per 2. 5787, quotus utrobi-

utrobique eſt 1 : 1 : unde patet, nonniſi duas iſtas notas certas eſſe, quas ſuperius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. *Ipſa praxis loquetur, nos ſubinde poſſe eſſe contentos, quod notas certas agnoſcamus, quæ per ſuperiora (§. 376, 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel diviſionis ſuperſedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexageſimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. FRactiones ſexageſimales ſunt, quarum denominatores creſcunt in ratione ſexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ phyſicales.*

SCHOLION.

386. Ex. gr. *Si integrum ſit* 1, *fractiones iſtiuſmodi ſunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progreſſionis geometricæ 1, 60, 3600, 216000, 12960000, &c. ſunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. (§. 334); ſi fractiones ſexageſimales inſtar numerorum integrorum ſcribendæ, numeratoribus ſolitarie poſitis, perinde ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi ſunt logarithmi. Ex. gr. $\frac{3}{1} = 3^{\circ}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars ſexageſima integri dicitur *Minutum* ſive *ſcrupulum primum*; pars ſexageſima minuti primi *Minutum* ſive *ſcrupulum ſecundum*; pars ſexageſima minuti ſecundi *Minutum* ſive *ſcrupulum tertium*; & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex, ſive index, eſt 1, ſecundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum inſtar tractari queant.*

PROBLEMA XLVI.

391. *Fractiones ſexageſimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorſus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam ſummam colliguntur (§. 99).

Ex. gr.	35°	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53	20	41	55

PROBLEMA XLVII.

392. *Fractiones ſexageſimales a ſe invicem ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a ſe invicem eodem prorſus modo, quo numerorum heterogeneorum ſubtractio fieri ſolet (§. 104).

Ex. gr	28°.	$15'$.	$4''$.	$2.0'''$
	17	29	18	45
	10	45	45	35

Nimirum unitas mutuo petita a ſpecie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^{\circ} = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA XLVIII.

393. *Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales multiplicare.*

 RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum ſexageſimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374), niſi quod ex ſpecie minore abjiciatur toties ſexagenarius, quoties fieri poteſt, & tot ſpeciei proxime majori addantur unitates, quoties ſexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod diviſio per 60 prodit (§. 223).

Ex.gr. Si multiplicandus 3° 15′ 38″, multiplicator 2° 18′ 47″. Duc ſingulas partes multiplicandi 1°. in 47, 2°. in 18, 3°. in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 ſcr. quartis = 29‴ 46ⁱᵛ. Scribuntur adeo 46 pro ſpecie minima infra lineam cum ſuo apice & 29‴ reſervantur ſpeciei proxime ſequenti annumeranda. Cum igitur factum ex 47″ in 15′ = 705‴; additis 29 prodibunt 734‴ = 12″. 14‴. Scribuntur adeo 14 infra lineam & 12″ reſervantur facto proxime ſequenti ex 3° in 47″ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam ſummam (§. 391) collecta exhibent factum quæſitum 7° 32′ 30″ 38‴ 46ⁱᵛ aut, ſi prope verum quæſiveris, 7° 32′ 31″, cum ſpecies proxime major dimidium illius ſuperet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

		3°	15′	38″	
		2	18	47	
	2	33	14	46ⁱᵛ	
	58	41	24		
6	31	16			
7°	32′	30″	38‴	46ⁱᵛ	

SCHOLION.

394. *Ne tædia diviſionis devoranda ſint, conſtructus eſt* Canon hexacontadon, *qui facta in ſpecies reſoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29. 46. *Ratio conſtructionis ex operatione in Problemate præcepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco* Pythagorico (§. 109), *factorum unum a latere, alterum in fronte Canonis deſcribi.*

PROBLEMA XLIX.

395. *Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales dividere.*

RESOLUTIO.

Diviſio peragitur ut in fractionibus decimalibus; niſi quod in multiplicatione quoti per diviſorem tenenda ſint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393), &, ubi ſpecies dividendi prima fuerit minor ſpecie diviſoris prima, iſta reducenda ſit ad ſpeciem proxime minorem, & ſequenti addenda, ut diviſioni ſit locus.

Ex. gr. Si 7° 32′ 30″ 38‴ 46ⁱᵛ dividere jubeamur per 2° 18′ 47″; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco ſcribe 3°. Duc 3° in 2° 18′ 47″ & factum 6° 56′ 21″ ſubtrahe ex 7° 32′ 30″, ut relinquatur 36′ 9″. Junge reſiduo ſpeciem ſequentem 38 & diviſionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit abſoluta; quemadmodum ex typo exempli liquet:

2° 18′ 47″)	7°	32′	30″	38‴	46ⁱᵛ	(3° 15′ 38″
	6	56	21	: :	: :	
		36	9	38	: :	
		34	41	45	: :	
		1	27	53	: :	
		ſive	87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non abſimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque abſolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in diviſione menſuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

Fig: 2.

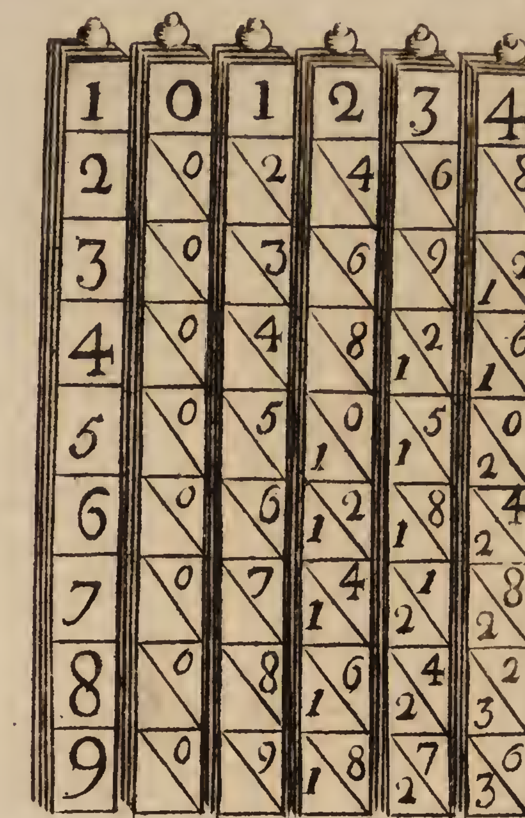


Fig: 1.

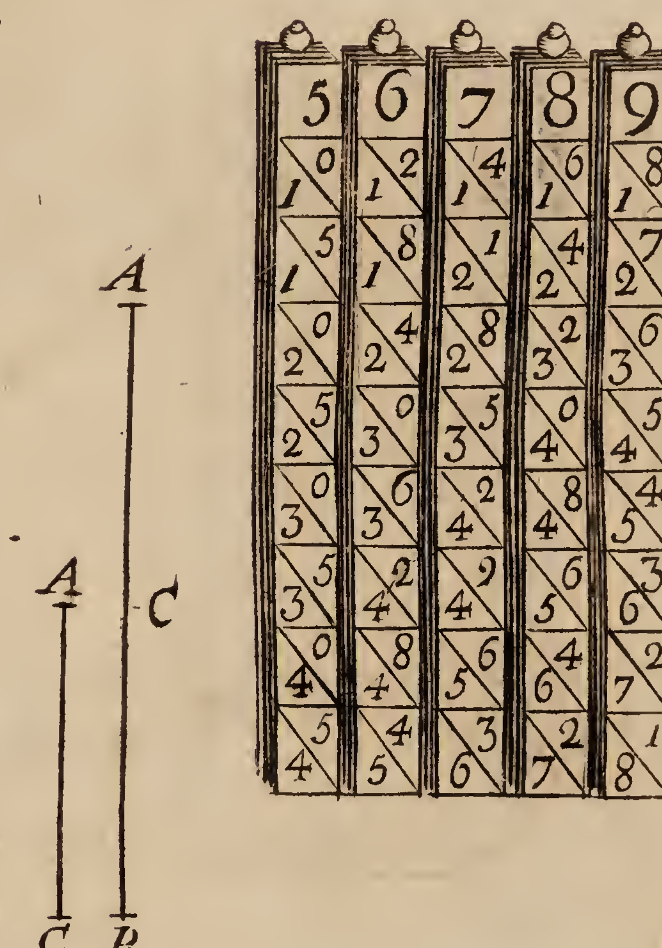
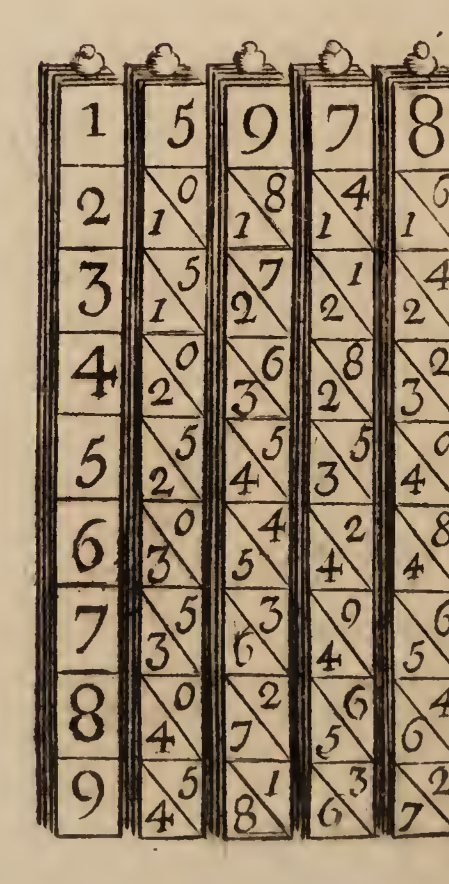


Fig: 3.



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

Erexiguus eſt eorum numerus, qui Geometriæ pretium ſuum ſtatuunt: notatione enim deluſi cum Arte agrimenſoria eam peſſime confundunt, nec ea animo ipſorum obverſatur idea, quam nomen tam auguſtum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis diſtinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in ſcientiis quam in artibus ejus ſit uſus. Equidem ob Problemata, quorum reſolutionem trado, nonniſi ad locorum diſtantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam ſuperius (*a*) dicta ſunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ ſtudium, a rigore in demonſtrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non ſolent, & paſſim demonſtro, quæ ſine probatione

(*a*) In Commentat. de Methodo §. 52, 53.

tione ad aliis aſſumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic auſus; ſed ſufficit eum probari peritis, & quod majus eſt, methodum noſtram præſtare, ne extra Matheſin ratiocinaturi in ſcopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidiſſe, ſupra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ ſolo demonſtrarunt omnia: ſed cum ingenioſiſſimus LEIBNITIUS ſimilitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in Geometria eſſe uſum; ego vero meditatus ampliſſimum deprehenderem; ſimilitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonſtrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonniſi per ambages demonſtrari ſolent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum conſtructiones inter principia demonſtrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inſerviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea ſimilitudinis notione uti, cum *Leibnitiana* clarior ſit. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonſtratione Problemata ſolvant. Hoc labore perfuncti ex Theorematum hypotheſibus figuras conſtruant, & demonſtrationes empiricas ſuperaddant, quarum in ipſa pertractatione fit mentio (*c*). Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conſcripta ſunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu poſſunt habere attentam, difficultates non ſentient, etiamſi prima ſtatim vice ad ſingula animum advertant,

(*b*) L. c. §. 52.
(*c*) In Schol. Theor. 7. §. 158.

ELEMENTA

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

1. *Geometria* eſt Scientia extenſorum quatenus terminata ſunt, hoc eſt, Linearum, Superficierum, & Solidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in mente repræſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc notio extenſionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9 Arith.); *ſed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, ſuperficies, ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejuſque adeo quam latiſſime pateat uſus.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *Congruentia* eſt coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium faceſſat, vitanda eſt vocis* termini *æquivocatio: id quod in ſequentibus ſatis cavetur. A termini vero definitione conſulto abſtinemus, ne ad demonſtrationes metaphyſicas dilabamur.*

DEFINITIO III.

5. *Eundem ſitum habere* dicuntur, inter quæ idem extenſum poni poteſt.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* eſt, quod quaquaverſum ſeipſum terminat, ſeu quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo diſtinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* EUCLIDES: Punctum eſt, *inquit,* cujus pars nulla eſt. *Nec ſine ratione punctum*

punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa geometrica ſummo cum ſtudio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.

DEFINITIO V.

Tab. I. Fig. 1. 10. *Linea* deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ ſecundum longitudinem ſunt puncta A & B; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt (§. *6*).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8); linea nec lata, nec profunda eſſe poteſt, ſed in ſolam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod ſecundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a ſe diſtinctos, vi Cor.* 1 (§. 11)?

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimenſionibus præditum ſit, nec una a reliquis actu ſeparari queat; neceſſarium tamen ac perutile eſt, ut unam abſque reliquis conſideremus. Neceſſitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abſtractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulſo natura conjunxit. Utilitatem hujus abſtractionis caſus innumeri perſuadent, in quibus unam dimenſionem, neglectis ceteris, cognoſcere jubemur; ex. gr. altitudinem turris ſine latitudine ac profunditate ipſius, latitudinem fluminis ſine longitudine ac profunditate ejuſdem.*

DEFINITIO VI.

15. *Diſtantia* eſt linea breviſſima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita ex. gr. diſtantia arboris a domo eſt linea breviſſima, qua ab illa ad hanc duci poteſt.*

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB eſt, cujus pars quæcumque eſt toti ſimilis. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt niſi quantitate (§. 26 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ deſcribantur, ſi punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti deſcribentis in omnibus lineæ partibus idem eſſe debet: ſecus enim, diverſitate hujus motus, partes a ſe invicem diſtinguerentur, adeoque ſimiles non forent (§. 24 *Arithm.*); contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit niſi celeritate, ac directione; celeritas vero ad deſcriptionem rectæ nil confert; ſola directionis habenda eſt ratio; conſequenter recta deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B poſſe duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci poſſe.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* eſt, cujus partes toti diſſimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem eſt ac quantitatem aliquam pro unitate aſſumere ac aliarum

rum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate aſſumitur, *Menſura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc Definitio latior praxi reſpondet: ſtrictius* EUCLIDES *menſuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos, in Arithmetica, partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Menſura linearum* eſt linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & ſubdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipſa *Decempeda* appellatur. Pes ſubdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*; & ita porro.

SCHOLION.

26. *Menſuræ longitudo & diviſio non eadem eſt ubivis gentium. Varias differentias, præter* Willebrordum SNELLIUM (*a*), *exponunt* RICCIOLUS (*b*), MALLETUS (*c*), EISENSCHMIDIUS (*d*), *aliique. Aliquas celebrium menſurarum varietates repræſentat Tabula ſequens in particulis iſtiuſmodi, qualium Pes regius Pariſinus eſt* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque Pes integer particulas* 1440.

Pes Regius Pariſinus	1440	Conſtantinopolitanus	3120
Rhenanus	1391 $\frac{3}{10}$	Bononienſis	1682 $\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	1282 $\frac{3}{4}$
Londinen.	1350	Norimberg.	1346 $\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiſcanus	1271 $\frac{1}{2}$
Danicus	1403 $\frac{2}{5}$	Halenſis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Diviſionem menſuræ decimalem primus introduxit* STEVINUS, *teſte ipſius* Geometria practica, *dubio procul exemplo* REGIOMONTANI. *Indicem autem decempedarum conſtituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arithm.) *quos circello incluſos numeris adſcribit. Sed commodius* Joannes BAYERUS *in* Logiſtica decimali *&* Stereometria *logarithmos characteribus Romanis expreſſos apicibus numerorum adſcribit. Ex. gr. tres perticæ, quinque pedes, ſeptem digiti & octo lineæ ita ſcribuntur:* $3^{\circ}\ 5^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$. *Commodiſſimum ſæpe accidit, ſi numeri integra, ſive decempedas, deſignantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto ſeparentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{\circ}\ 5^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$ *ſcribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciſcus NOEL *autor eſt* (*e*), *diviſionem decimalem non modo in menſuris, ſed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* eſt magnitudo duabus dimenſionibus prædita, ſeu in longitudinem & latitudinem extenſa.

COROLLARIUM.

29. Termini ſuperficiei ſecundum longitudinem & latitudinem ſunt lineæ; ſecundum profunditatem ipſamet terminus ſui exiſtit.

 SCHO-

(*a*) In ERATOSTHENE *Batavo*, lib. 2. c. 1. uſque ad 5. p. 121. & ſeqq.
(*b*) In *Geogr. Reform.* lib. 2. c. 7. f. 43 & ſeqq.
(*c*) *Geometrie pratique*, lib. 1. p. 108.
(*d*) In *Diſquiſit. nova de ponderibus & menſuris veterum Rom. Græc. & Hebr.* Sect. 3. c. 1. p. 93. & ſeqq.

(*e*) In *Obſervationibus Mathematico-Phyſicis in India & China factis*, c. 7. p. 104 & ſeqq.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum aſſumi poteſt punctum, cui non reſpondeat aliqua linea ſecundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* eſt continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de ſuperficiebus, quam de ſolidis. In priori caſu perimetri ſunt lineæ; in poſteriori ſuperficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* eſt, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis conſtat.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* eſt linea, quæ eſt pars perimetri figuræ ſuperficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* ſeu *figura plana* eſt, ſi e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejuſdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab. I. Fig. 2. 37. *Circulus* eſt figura plana, linea in ſe redeunte terminata, ex cujus ſingulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari ſolet, ductæ rectæ ſunt inter ſe æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB eſt recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE eſt chorda per centrum C tranſiens. Ejus dimidium AC, ſive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta, dicitur *Semidiameter*, item *Radius*. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter ſe æquales ſunt (§. 37).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* eſt pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero eſt pars ejuſdem trecenteſima ſexageſima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet primum in 60 *ſecunda*; ſecundum unumquodque in 60 *tertia* &c. ſubdividitur. EUCLIDES arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuſlibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus ſunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum ſunt fractiones ſexageſimales* (§. 385 Arithm.) *& apicibus ſuis notantur* (§. 387 Arithm.). *Gradui tanquam integro, ſeu unitati, ceſſit* 0; *minuto primo* 1; *ſecundo* 2; *tertio* 3; *&c. conſequenter gradus cum ſuis ſcrupulis eodem modo ſcribuntur, quo decempeda cum ſuis* (§. 27). *Ex. gr. 3 gradus, 25 minuta, 16 ſecunda, ita ſcribes:* $3^{\circ}\ 25'\ 16''$. *Etſi autem Ægyptii veteres, quibus hanc diviſionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Aſtronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones ſexageſimales inſtar numerorum integrorum tractari poſſint, nec ſine prudenti conſilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per* 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, *exacte divi-*

dividitur, nec minus cum fecerint exponentem rationis, juxta quam ſcrupula decreſcunt, quem 2, 3, 4, 5 & 6 metiuntur; non tamen ſine ratione ſuaſerunt, poſt STEVINUM (*a*), OUGHTREDUS (*b*), WALLISIUS (*c*), *aliique, ut ſepoſitis fractionibus ſexageſimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus eſt; ſexageſimales vero non ſine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & diviſio decimalium facilior quam ſexageſimalium* (§. 364, & ſeqq. 393, & ſeqq. Arithm.). *Id conſilium ſecuti ſunt* Henricus BRIGGIUS *in* Canone triangulorum artificiali *apud* Henricum GELLIBRAND *in* Trigonometria Britannica, Joannes NEWTON *in* Aſtronomia *pariter ac* Trigonometria Britannica, & Nicolaus MERCATOR *in* Inſtitutionibus Aſtronomicis. STEVINUS (*d*) *contendit, eandem circuli diviſionem antiquitus, in* Seculo ſapiente, *quod adſtruere conatur, obtinuiſſe.*

DEFINITIO XXI.

44. *Circuli concentrici* ſunt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diverſa.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig. 2. 45. *Segmentum circuli* eſt pars ipſius AFBA, arcu AFB & chorda AB comprehenſa. Dicitur *Segmentum majus*, quod ſemicirculo majus eſt; *minus* vero, quod minus eſt.

DEFINITIO XXIII.

46. *Sector circuli* eſt pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehenſa.

DEFINITIO XXIV.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, ſi ipſi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, ſi huic occurrens totus intra hunc; *extus vero tangit*, ſi eidem occurrens totus extra hunc cadit. Tab. I. Fig. 5. Fig. 4.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL, ex centro C ad contactum L ducta, eſt radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM II.

49. Circuli ergo ſe extus tangentes in L diverſa centra C & *c* habent, adeoque eccentrici ſunt (§. 44). Fig. 4.

DEFINITIO XXV.

50. Linea AB lineam CD *ſecat* in E, ſi eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipſam ſitas. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipſam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD ſitas; ſi AB ſecet CD in E, etiam viciſſim CD ſecabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

52. Si recta MN circulum in O ſecet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37). Fig. 7.

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum ſecet, cum utriuſque peripheria in ſe redeat (§. 37), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat neceſſe eſt.

DEFINITIO XXVI.

54. *Angulus* eſt duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *Crura*; punctum concurſus A *Vertex anguli.* Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION.

55. *Angulus hic, vel unica littera A vertici ejus adſcripta, vel ad evitandam in caſibus nonnullis confuſionem tribus litteris* BAC *indigitatur, ita ut vertici adſcripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti* x, *eidem inſcripta. Utimur vero angulis ad linearum ſitum determinandum.*

(*a*) In præf. ad Tract. *de Logiſtica decimali.*
(*b*) *Clavis Mathemat.* c. 1. p. m. 2.
(*c*) *Algebræ* c. 9. f. 39. Vol. II. *Oper. Math.*
(*d*) In *Coſmographia* lib. 1. def. 6. f. 109. *Operum* Gallice editorum.

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus inſiſtere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 9. 57. *Menſura anguli* BAC eſt arcus DE ex vertice A, radio prorſus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB deſcriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo diſtinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam: diſtinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam diſtinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arithm.*). Et eadem de cauſa quantitas anguli æſtimatur ex ratione arcus iſtius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot ſcilicet graduum & ſcrupulorum dicitur eſſe angulus, quot graduum & ſcrupulorum eſt arcus DE* (§. 41).

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI ſunt, quorum idem eſt vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 6. 61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* ſitæ ſunt, ſi ejuſdem rectæ AB partes exiſtunt.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps poſitus* AEC dicitur, qui oritur anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps poſiti AEC & AED crus unum AE commune, & crus alterum unius CE in directum ſitum eſt cruri alteri alterius ED (§. 61).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps poſiti ſunt contigui, ſed non contra (§. 60).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM eſt, cui deinceps poſitus KLN æqualis eſt. Tab. I. Fig. 11.

DEFINITIO XXXIII.

66. *Angulus obliquus* AEC eſt, cui deinceps poſitus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC eſt obliquus minor recto. *Angulus obtuſus* AED eſt obliquus recto major. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXIV.

67. *Anguli verticales*, *o* & *x*, ſunt, ſi crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXV.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diverſis plagis in diverſis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y*, dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diverſis punctis A & B, ſed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppoſiti*: & quidem *u* dicitur *oppoſitus externus*, *z* vero *oppoſitus internus* ipſius *y*.

DEFINITIO XXXVII.

70. *Angulus ad peripheriam* eſt angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in ſegmento*. Tab. I. Fig. 13.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54), atque arcui AD inſiſtit (§. 56).

DEFINITIO XXXVIII.

72. *Angulus ad centrum* eſt angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C eſt, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

Co-

COROLLARIUM.

Tab. I. 73. Angulus ad centrum a duobus radiis
Fig. 13. intercipitur (§. 39), atque arcui AD inſiſtit (§. 41, 56); conſequenter arcus AD ejus menſura (§. 57).

DEFINITIO XXXIX.

Tab. I. 74. *Angulus extra centrum* HKI eſt,
Fig. 14. cujus vertex K extra centrum eſt, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Inſiſtit ergo arcui HI (§. 41, 56).

DEFINITIO XL.

Tab. I. 76. *Angulus contactus* HLM eſt,
Fig. 3. quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO XLI.

77. *Angulus ſegmenti* MLH vel MLI eſt, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLII.

Tab. I. 78. *Linea* KL *perpendicularis* aut
Fig. 11. *normalis* eſt ad alteram LM, ſi cum ea efficit rectum angulum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps poſiti æquales ſunt (§. 65), & contra.

DEFINITIO XLIII.

Tab. I. 80. *Linea* AB eſt ad alteram AC
Fig. 9. *obliqua*, ſi cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. 81. *Linea* OP *parallela* eſt alteri
Fig. 12. QR, ſi ubique eandem ab ea diſtantiam ſervat.

COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLV.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ Tab. I.
ſunt, quarum diſtantia continuo fit *Fig.* 15.
minor.

DEFINITIO XLVI.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP ſunt, quarum diſtantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta, abſolute conſiderata, *dicuntur* punctis opponi, *ſi fuerint termini ejuſdem rectæ. Nimirum cum recta ſit breviſſima linea inter duos terminos* (§. 191), *qualis etiam eſt perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel ſuperficiem duci poſſunt* (§. 224); *perpendicularis vicem in eo caſu ſubit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel ſuperficiem ſumitur,*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum* eſt figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLIX.

88. *Triangulum æquilaterum* ABC Tab. I.
eſt, cujus omnia latera inter ſe æqualia *Fig.* 16.
ſunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera ſingula inter ſe æqualia.

DEFINITIO L.

89. *Triangulum æquicrurum* ſive Tab. I.
Iſoſceles DEF eſt, quod duo latera *Fig.* 17.
æqualia habet.

DEFINITIO LI.

90. *Triangulum ſcalenum* ACB eſt, Tab. I.
cujus nullum latus alteri æquale, ſeu *Fig.* 18.
cujus ſingula latera ſunt inter ſe inæqualia.

DEFI-

DEFINITIO LII.

Tab. I. Fig. 19. 91. *Triangulum rectangulum* KML eſt, cujus angulus unus K rectus eſt.

DEFINITIO LIII.

Tab. I. Fig. 20. 92. *Triangulum obtuſangulum* PNO eſt, cujus angulus unus N eſt obtuſus.

DEFINITIO LIV.

Tab. I. Fig. 16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB eſt, cujus ſinguli anguli ſunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* eſt, cujus ſinguli anguli ſunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

Tab. I. Fig. 19. 95. *Hypothenuſa* ML eſt latus, in triangulo rectangulo, angulo recto K oppoſitum.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* ſunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* eſt, cujus perimeter ex quatuor lateribus conſtat. *Rectangula* dicitur, ſi anguli ejus ſinguli fuerint recti; *obliquangula*, ſi obliqui.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. Fig. 21. 98. *Quadratum* ABDC eſt figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LX.

Tab. I. Fig. 22. 99. *Rhombus* EFHG eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LXI.

Tab. I. Fig. 23. 100. *Rectangulum*, ſive *oblongum*, MLKI eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens. Tab. I. Fig. 24.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS eſt figura quadrilatera, non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera oppoſita ſunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum baſium* dici ſolet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iiſdem dicitur. Tab. I. Fig. 25.

DEFINITIO LXV.

104. *Figura polygona*, ſeu *multilatera*, ABCED, vel FGHKI, eſt, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodſi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; ſi ſex, *Hexagonum*; ſi ſeptem, *Heptagonum*; ſi octo, *Octogonum* &c. dicitur. Tab. I. Fig. 26. 27.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura æquiangula* eſt, cujus ſinguli anguli æquales ſunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* eſt figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* eſt, quæ non ſimul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figuræ inter ſe æquilateræ* dicuntur,

cuntur, ſi ſingula latera unius fuerint ſigillatim æqualia ſingulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figuræ inter ſe æquiangulæ* ſunt, ſi ſinguli anguli unius ſingulis angulis homologis alterius æquales ſunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, ſi eundem ordinem a primo in utraque figura ſervent.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. Fig. 24. 111. *Diagonalis* PN eſt recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab. I. Fig. 19. 112. *Baſis figuræ* eſt perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum ſitus figuræ ipſi non ſit eſſentialis, quamlibet perimetri partem, ſeu latus figuræ quodlibet, pro baſi aſſumere licet.

DEFINITIO LXXIV.

Tab. I. Fig. 19. 114. *Vertex figuræ* M eſt vertex anguli baſi KL oppoſiti.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figuræ* eſt diſtantia verticis a baſi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo inſcripta*, ſi peripheria per vertices ſingulorum angulorum ipſius tranſit; tuncque *Circulus figuræ* dicitur *circumſcriptus*. Tab. VI. Fig. 107.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura abcde* dicitur *Circulo circumſcripta*, ſi ſingula ejus latera peripheriam tangant; tumque *Circulus figuræ* dicitur *inſcriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Menſura figuræ* eſt quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*; & in *pedes quadratos*, ſicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, ſi data, per quæ unum determinatur, fuerint ſimilia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis ſimilibus per eaſdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ diſcerni debent; adeoque ſimilia ſunt (§. 24 *Arith.*)

CAPUT II.

De Propoſitionibus quibuſdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 28. 121. *A Dato puncto* A *ad datum punctum* B *lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta Tab. I. Fig. 28.

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam

Tab. I. graphio HI, penna, aut plumbagine.
Fig. 28. II. In ligno vel ſaxo
Recta delineatur etiam ſine regula, ſi filum, creta vel ceruſſa delibutum, punctis datis A & B apprimatur, &, medio digitis prehenſo, ſurſum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo
Tab. I. Fig. 29. Recta deſignatur per baculos LK in punctis datis, beneficio libellæ M, ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum ſummitati muccinium, aut folium chartæ mundæ alligatur, ſi e longinquo videri debeant.

Scholion I.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne ſordes facile adhæreſcant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis, & his ſimilibus familiare vitium.*

Scholion II.

123. *Pennæ optimæ ſunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod, anſerinis duriores, lineis ſubtilioribus & purioribus ducendis inſerviunt. Baculi vero LK cuſpide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra, præſertim duriore, defigi queant.*

Scholion III.

124. *Utendum vero eſt atramento, non communi, ſed Sinico: tum quia commune ob corroſivitatem vitrioli, quod ipſum ingreditur, chalybeam graphii cuſpidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamſi atrius ſit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

Problema II.

125. *Duobus baculis in ſolo defixis, tertium, vel plures, in eadem recta cum iis infigere.*

Resolutio.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in *Opticis*.

Problema III.

126. *Lineam rectam metiri.*

Resolutio.

Ad manus ſit neceſſe eſt menſura (§. 23). Nimirum, pro lineis in charta datis, abſcindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes deſignent: intervallum vero 10 pedum RS in reſiduum lineæ transferatur, quoties fieri poteſt (§. 25). In campo; vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes, & decempedas legitime diviſis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes, & pedem ultimum in digitos dividi. Quodſi ergo lineam rectam metiri jubearis; Tab. I. Fig. 30.

I. In charta,

1. Ponatur crus circini unum in A & eo uſque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, ex. gr. in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem menſuræ alterum attingat, ex. gr. 5. Erit linea AB, 1° 5′.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121), &, ſi ea menſuræ longitudinem ſuperet, conſtituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Fu-

2. Funis cannabinus, aut catena, menſuram largiens, ab uno baculo uſque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos ſecet (§. 238): quod perpendiculo appenſo evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes, atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION I.

127. *Si catena utrinque in annulos deſinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hiſce cum ceteris in eadem recta continuo collocatis* (§. 125). *Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in veſtigio baculi B, ſed prope ipſum in D eundem infigi, atque annulorum craſſitiem longitudini menſuræ non accenſeri debere. Quodſi tamen hæc ſit pars menſuræ, eaque ſubdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipſo B defigi poterit. Parantur autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant moleſtæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium craſſis utendum.*

Tab. I. Fig. 31.

Tab. I. Fig. 32.

SCHOLION II.

128. *Si pertica circa alterum ſui extremum, tanquam centrum, per quadrantem circuli elevata, & per alterum rurſus demiſſa lineam metitur; craſſities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula craſſitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extenſionis prorſus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis inſtrui oportet, ut obſervantibus, quæ in Scholio præcedente diximus, tanto minus periculi ſuperſit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION III.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diverſæ inæqualiter tendunt.* SCHWENTERUS (a) *autor eſt, cum aliquando exercitiis geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediiſſe. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipſe autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, & poſtquam exſiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamſi funem iſtiuſmodi per diem integrum ſub aquis demerſum detineas. Ne autem funis humum contingat, ſuſtentaculum Z ipſi ſupponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenſo globo, vel pondere plumbeo conſtat.*

Tab. I. Fig. 33.

PROBLEMA IV.

130. *Data longitudine lineæ, in menſura ex. gr.* Pariſina; *invenire eandem in menſura alia, ex. gr.* Londinenſi, *cujus ad priorem nota eſt ratio.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. linea data 186 pedum *Pariſinorum*, quæritur quot eadem ſit pedum *Londinenſium?* Quoniam pes *Londinenſis* eſt ad *Pariſinum*, ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311 *Arithm.*):

```
135 : 144 = 186   26784 (198 54/135 ped.
             186   135) 135 : :    Londin.
             ---        -------
             864        1328 :
            1152        1215 :
            144         ------
            -----        1134
           26784         1080
                        -----
                          54
```


PRO-

(a) *Geometr. pract.* lib. 1. Tract. 1. p. 381.

PROBLEMA V.

Tab.II. Fig.34. **131.** *Ex dato quovis centro* C, *dato radio quocunque* AC, *Circulum deſcribere.*

RESOLUTIO.

I. In charta
1. Collocetur circini crus unum in centro dato C, & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C, ita crus alterum peripheriam deſignabit (§. 37).

II. In ſolo & quotieſcunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur; radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga, ſive lignea, ſive ferrea.

SCHOLION I.

Tab.II. Fig.35. 132. *Si fune aut filo utimur, cavendum eſt ne ſtylus FA, quo peripheria deſignatur, e ſitu perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transverſum FE, ſi fuerit AF = 3, AE = 4 & FE = 5. Ratio patet per Theorema* Pythagoricum *infra demonſtrandum*, (§. 417).

SCHOLION II.

Tab.II. Fig.37. 133. *Circini, ut inſtrumenta geometrica reliqua, ex orichalco parantur, ob durabilitatem, tractabilitatem, & nitorem hujus metalli. Cuſpides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut ſubtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem ſunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus deſcribendis inſervit, crus alterum variari poteſt, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum viſum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur abſoluta operatione rurſus delendi. Longitudo vel 3, vel 6 digitorum eſſe ſolet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuſcunque (§. 119); omnes peripheriæ ſunt inter ſe ſimiles (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & ſemicirculos eſſe inter ſe ſimiles.

THEOREMA I.

135. *Diameter* AE *dividit tam peripheriam, quam circulum ipſum, in duas partes æquales.* Tab.I. Fig.2.

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec ſibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, ſegmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque ſimiles (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*); conſequenter tum illi, tum hæc inter ſe æquantur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE, [producta, ſi opus ſit, (§. 21)] ex aſſumto in ea puncto C deſcribi poteſt ſemicirculus.

THEOREMA II.

137. *Si ex centro* C *duorum circulorum concentricorum ducantur radii* CDA *&* CEB; *tum arcus* DE *&* BA *ad peripherias, tum ſectores* DCE *&* ACB *ad areas ſuorum circulorum eandem rationem habent.* Tab.II. Fig.34.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici, *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 44), & arcus

Tab.II. arcus AB atque DE, itemque ſecto-
*Fig.*34. res ACB & DCE deſcribantur, radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus iſti atque ſectores eodem modo determinantur (*§.* 119); conſequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes ſimiles ſunt (§. 120); adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB, intra crura ejuſdem anguli ACB ex ejus vertice C deſcripti, ſint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad ſuas quoque peripherias eandem rationem habent; conſequenter inter ſe ſunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipſi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æſtimatur per rationem arcus ex vertice intra crura deſcripti ad totam peripheriam (*§.* 58); perinde eſt, quocunque radio arcus iſte deſcribatur (*§.* 137).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, ſive crura producantur, ſive minuantur.

THEOREMA III.

Tab.II. 141. *Angulorum æqualium* A *&* a
*Fig.*46. *menſuræ* BC *&* de *ſunt arcus ſimiles: & contra, ſi angulorum* A *&* a *menſuræ* BC *&* de *ſimiles ſunt; anguli æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuſcunque A vel *a* quantitas æſtimetur per rationem arcus BC, vel *de*, ex vertice A, vel *a* intra Tab.II.
crura deſcripti, ad integram periphe- *Fig.*46.
riam (§. 58); ſi A = *a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias ſuorum circulorum eadem eſſe debet; conſequenter cum ſint partes ſuarum peripheriarum (*§.* 41), ſimiles ſunt (§. 170 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Si arcus BC, & *de*, menſuræ angulorum A, & *a* (§. 57), fuerint ſimiles; ad peripherias, quarum partes ſunt (§. 41), eandem rationem habent (*§.* 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æſtimetur (§. 58), eadem omnino eſſe debet, hoc eſt, anguli æquales ſunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus ſimiles eandem rationem habeant ad peripherias, quarum ſunt partes (*§.* 170 *Arithm.*); ſi fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales ſunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo menſuræ angulorum æqualium fuerint partes ejuſdem peripheriæ, vel æqualium peripheriarum; æquales ſunt (§. 141); & contra.

THEOREMA IV.

143. *Anguli recti* KLM *menſura eſt* Tab. I.
quadrans circuli. *Fig.* 11.

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (*§.* 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L ſuper recta NM deſcribi poſſit ſemicirculus (*§.* 136); angulorum x & o menſuræ AC & CB junctim ſumtæ conficiunt ſemicirculum (§. 57). Ergo unius menſura eſt dimidius ſemicirculus, hoc eſt circuli quadrans (§. 142). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus eſt 90° (§. 59).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti ſunt inter ſe æquales (§. 141); & æqualis recto etiam rectus eſt.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtuſus major eſt quam 90° (§. 66).

THEOREMA V.

Tab. I. Fig. 6. 147. *Duo anguli deinceps poſiti*, x *&* y, *aut quotcunque ad idem punctum* E *ſuper eadem recta* CD *conſtituti ſunt æquales duobus rectis. Et contra, ſi* x *&* y *fuerint duobus rectis æquales;* CE *ſita eſt in directum ipſi* ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in caſu priore anguli x & y ſunt deinceps poſiti, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam conſtituit (§. 62). In caſu poſteriore omnes anguli conſtituti ſunt ſuper eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E ſuper CD deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 136); in utroque caſu menſura omnium angulorum ſimul eſt ſemicirculus (§. 57). Sed idem eſt menſura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli iſti ſunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodſi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipſi ED in directum ſita; recta quædam alia, veluti EA, ipſi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps poſiti (§. 62); conſequenter duobus rectis æquales, *per demonſtrata*, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipſi ED in directum ſita. *Quod erat alterum.* Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui ſunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejuſdem rectæ conſtituti, ſi junctim ſumantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps poſitorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, ſi datus ex 180° ſubducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inacceſſum, vel obtuſum, Quadrante metiri jubemur, & eum, qui eſt deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim ſubductus quæſitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimenſum eſſe, ſi finita operatione deinceps poſitos etiam metiaris, & hos ſingulos illis ſingulis addas: quodſi enim ubique prodierit ſumma 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA VI.

152. *Angulum metiri.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB menſura ſit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB deſcriptus (§. 57); totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope Semicirculi in 180° exactiſſime diviſi. Nimirum

I. In charta,

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

2. Gra-

Tab.II. *Fig.36.* 2. Gradus, in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto, numerantur.

Tab.II. *Fig.38.* II. In Campo,

1. Inſtrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, ſeu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, verſus baculum in extremo cruris defixum; poſterius vero perpendiculum ad centrum inſtrumenti applicando.
2. Regula HI circa centrum mobilis verſus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipſi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.
3. Gradus, quem regula inſtrumento indicat, notatur.

SCHOLION I.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur,* Inſtrumentum tranſportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro, quidam nonniſi quadrante utuntur.*

SCHOLION II.

154. *Diameter Tranſportatorii eſt trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero Inſtrumentorum goniometricorum unius pedis, aut ad ſummum unius cum dimidio. Diviſio accurata fieri debet. In Tranſportatoriis gradus dimidii ſatisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo Inſtrumento majore captos, quantum fieri poteſt, accuratiſſime in charta deſignaturi, diametrum Tranſportatorio non multo minorem diametro ejus Inſtrumenti, quo in campo uſi ſunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA VII.

155. *Data quantitate anguli, ipſum deſcribere.* Tab.II. *Fig.36.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ducatur recta CB, &
2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum Inſtrumenti tranſportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.
3. Numerentur gradus dati ab E verſus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.
4. Ducatur recta CA, per C & D.

Erit ACB angulus quæſitus (§. 141).

II. In campo, Tab.II. *Fig.38.*

1. Collocetur Inſtrumentum goniometricum, ut in Probl. præc. (§. 152).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

156. *Si recta* AB *alteram* CD *ſecet in* E; *anguli verticales*, x *&* o, *item* y *&* E, *ſunt æquales.* Tab.I. *Fig. 6.*

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 180^\circ \\ y+o &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \quad (\S.\ 148)$$

Ergo $x+y=y+o$ (§. 87 *Arithm.*) adeoque $x=o$ (*§.* 91 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur eſſe $y=$E. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

157. Quodſi in campo, aut alio in caſu, angulum inacceſſum x metiri jubeamur; acceſſum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

SCHO-

Scholion.

158. *Cum Tyrones ſub initium ſtudii mathematici ſenſibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex aſſumtis deductis minus adſueti; figuras, per data ex hypotheſibus Theorematum aſſumta, conſtruere ac reliquarum linearum & angulorum per conſtructionem determinatorum quantitatem explorare* (§. 126, 152) *juvat: ita ſenſus & veritas Propoſitionis elucescit, & animus ad Demonſtrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim ſit ſcire avidus, rationes veritatis noſſe deſiderat. In Demonſtratione magis acquieſcunt Tyrones, examine ratiocinationis legitimæ ſic facto; non ſecus ac Theoriæ phyſicæ magis ſatisfaciunt, ubi factis experimentis decretoris conſonæ deprehenduntur.*

Theorema VII.

Tab. I. Fig. 6. 159. *Omnes anguli* x, y, o, E, *&c. circa punctum aliquod* E *conſtituti, ſunt æquales quatuor rectis.*

Demonstratio.

Deſcribatur ex puncto E, vertice communi angulorum *x*, *y*, *o*, E, &c. (§. 54) intervallo quocunque E*a* circulus (§. 131); evidens eſt menſuras omnium angulorum ſimul ſumtas *db*, *bc*, *ca*, *ad* &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Menſura ergo angulorum *x*, *y*, *o*, E &c. junctim ſumtorum eſt circulus integer (§. 57). Sed circulus eſt menſura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes iſti anguli æquales ſunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

Corollarium.

160. Omnes itaque anguli, circa idem punctum conſtituti, junctim 360° conficiunt (§. 144).

Theorema VIII.

161. *Quæ ſibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt.*

Demonstratio.

Quæ ſibi mutuo congruunt, eorum iidem eſſe poſſunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius ſalva quantitate ſubſtituere licet: conſequenter æqualia ſunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro, quoniam quæ ſibi mutuo congruunt eoſdem terminos habere poſſunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non eſt. Sunt igitur ſimilia (§. 120). *Quod erat alterum.*

Theorema IX.

162. *Quæ æqualia & ſimilia ſunt, ea ſibi mutuo congruunt.*

Demonstratio.

Similia differre nequeunt, niſi quantitate (§. 26 *Arithm.*). Quamobrem ſi æqualia fuerint, prorſus non differunt (§. 15 *Arithm.*). Jam ſi ſibi mutuo ſuperimpoſita non iisdem terminis continerentur, diverſitate terminorum differrent: quod cum ſit abſurdum, *per demonſtrata*, iisdem terminis contineri debent; conſequenter ſibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

Theorema X.

163. *Si linea lineæ congruit; ſingula puncta unius ſingulis punctis alterius congruere debent.*

Demonstratio.

Linearum enim, quæ ſibi mutuo congruunt, iidem termini eſſe poſſunt (§. 3). Sed termini linearum ſecundum longitudinem ſunt duo puncta; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſæmet ſui termini exiſtunt (§. 11). Ergo ſi lineæ congruunt; non modo

puncta extrema, ſed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (*§*. 39); conſequenter circuli ipſi congruere debent (*§*. 3).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto, eodem radio, circulus nonniſi unicus deſcribi poteſt.

THEOREMA XI.

Tab.II. Fig.39. 166. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius* a *ponatur ſuper verticem alterius* A, *præterea crus illius* ac *ſuper crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *ſuper alterum* AB *cadet.*

DEMONSTRATIO.

Si negas; neceſſe eſt ut *ab*, vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus D*f* (§. 131): erit DE menſura anguli BAC, *De* vel *Df* menſura anguli *bac* (§. 39). Ergo, in caſu priore, *De* menſura anguli *bac* minor; in poſteriore eadem menſura *Df* major foret menſura anguli BAC (*§*. 20 *Arithm.*). Quod utrumque cum ſit abſurdum (§. 142); crus *ab* ſuper AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. I. Fig.9. 167. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *ſupra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *æqualis eſt.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribatur enim ex communi vertice A, intra crura AD & AE, arcus DE (§. 131); erit is menſura anguli DAE (§. 57). Sed quoniam crura DA & DE ſupra crura alterius anguli AB & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Eſt igitur & menſura anguli BAC (§. *cit.*); conſequenter DAE = BAC (§. 142). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

168. *Lineæ rectæ æquales ſibi mutuo congrunt.* Tab.II. Fig.40.

DEMONSTRATIO.

Eſt *ab* = AB, *per hypoth.* Eſt vero etiam recta *ab* ſimilis rectæ AB (§. 17). Ergo *ab* ipſi AB congruit (§. 162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

169. Ergo ſi recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* ſupra A & *ab* ſupra AB cadat; etiam *b* ſupra B cadet (*§*. 3, 11).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt; ſingula puncta unius erunt in recta altera (*§*. 162); atque hinc inter duo puncta nonniſi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulorum ſint lineæ rectæ (*§*. 39), ubi æquales fuerint, ſibi mutuo congruunt (*§*. 168); conſequenter etiam circuli congruere debent (*§*. 164); atque adeo circuli æquales ſunt, quorum æquales ſunt radii (*§*. 161).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non abſimili modo patet, circulum, cujus minor eſt radius, congruere parti circuli radium majorem habentis; minor eſt circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (*§*. 20 *Arithm.*).

THEOREMA XIV.

Tab. I. Fig. 2. 173. *Si centro circuli* C *applicetur lineæ rectæ* CD, *radio* AC *æqualis*, *extremum unum*; *alterum peripheriam attinget*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, *per hypoth.* ipſi congruet (§. 168), adeoque eoſdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipſi æqualis, ſi alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

174. *Anguli ſimiles ſunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

In angulis ſimilibus ea coincidunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum anguli diſtinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura deſcriptorum ad peripheriam (§. 58); ſi anguli ſunt ſimiles, arcus iſti ad ſuas peripherias eandem rationem habere, hoc eſt, & ipſi ſimiles eſſe debent (§. 141 *Geom.* & §. 170 *Arithm.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 141). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

175. *In figuris ſimilibus anguli homologi ſunt æquales, & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris ſimilibus ea coincidunt, per quæ a ſe invicem diſcerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum figuræ nequeant diſtingui niſi per angulos & latera; illi æquales (§. 174), hæc proportionalia eſſe debent (§. 154 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum eſt de figuris rectilineis, quarum latera in ſe ſpectata omnia inter ſe ſimilia ſunt. Alias addendum foret, latera homologa debere eſſe inſuper inter ſe ſimilia & ſimiliter poſita, ex. gr. arcus circulorum ſimiles convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA XVII.

177. *Figurarum ſibi mutuo congruentium* RTUS & rtus *anguli & latera homologa inter ſe æqualia ſunt.* Tab. I. Fig. 25.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTUS & *rtus* ſibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriuſque termini eſſe poſſunt (§. 3). Quare cum termini earum ſint perimetri (§. 31); una *rtus* ſupra alteram RTUS ita poni poteſt, ut *tu* ipſi TU, *tr* ipſi TR, *rs* ipſi RS, &c. congruat. Ergo latera homologa ſunt inter ſe æqualia (§. 161). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TU, TR, RS, SU, & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 54). Quamobrem & anguli homologi æquales ſunt (§. 167). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex Scholio præcedente, quomodo idem Theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*

CAPUT

CAPUT III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA XVIII.

Tab.II. Fig.41. 179. *SI in duobus triangulis* ABC *&* a b c, *fuerit* A=a, AB=ab, AC=a c; *erit etiam* BC=b c, C=c, B=b, *totaque triangula æqualia & ſimilia erunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *a b c* ita poni ſuper alterum ABC, ut punctum *a* ſuper A, & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *ac*=AC, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 169), recta *a c* ſuper AC (§. 166), & punctum *c* ſuper C (§. 169); conſequenter *b c* ſuper BC (§. 170) cadit, adeoque △ *abc* alteri ABC congruit (§. 3), conſequenter *b c*=BC (§. 161), *c*=C, & *b*=B (§. 167), totaque triangula æqualia & ſimilia ſunt (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

180. *Datis duobus lateribus* AB & AC, *cum angulo intercepto* A; *triangulum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumto AB pro baſi, in A conſtituatur angulus datus (§. 155).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum deſideratum (§. 179).

SCHOLION.

181. *Tyrones latera & angulos datos in numeris aſſumant: quod in aliquibus caſibus ad Demonſtrationes empiricas diſtinctius percipiendas proderit, quas ſupra (§. 158) commendavimus.*

COROLLARIUM I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

183. Quare ſi in duobus triangulis ACB & *a c b* fiat *a* = A & *ab* : *ac* = AB : AC; triangula eodem modo determinantur (§. 119) adeoque ſimilia ſunt (§. 120); conſequenter etiam *c* = C & *b* = B, *ab* : *bc* = AB : BC, &c. (§. 175). Tab.II. Fig.41.

THEOREMA XIX.

184. *In triangulo æquicruro* DFE 1° *anguli ad baſin* y *&* u *ſunt æquales; 2° recta* FG, *quæ angulum* DFE *bifariam ſecat, baſin quoque* DE, *& 3° triangulum ipſum bifariam ſecat; immo 4°* FG *ad baſin* DE *perpendicularis.* Tab.II. Fig.44.

DEMONSTRATIO.

Nam *o*=*x*, *per hypoth.* DF = FE (§. 89) & FG=FG (§. 81 *Arithm.*). Ergo 1°, *y*=*u*; 2°, DG=GE; 3°, △ DFG=△ GFE (§. 179). Et quia etiam anguli ad G æquales, (*per* §. *cit.*) 4°, FG ad DE normalis eſt (§. 79). *Q. e. d.*

 Co-

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum ſit etiam æquicrurum (§. 88, 89); Theorema præſens de æquilatero itidem verum eſt.

THEOREMA XX.

Tab. I. Fig. 16. 186. *In triangulo æquilatero* ABC *omnes anguli ſunt inter ſe æquales.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AC=CB (§. 88); ergo A=B(§. 184). Eſt vero etiam AC=AB (§. 88); ergo C=B (§. 184). Quare A=C (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum eſt etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA XXI.

Tab. III. Fig. 55. 188. *Si trianguli* ABC *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DAB *major quolibet interno oppoſito* B, *vel* C.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB, bifariam diviſa in F, ductaque recta CF producenda in G (§. 21) donec fiat FG=FC. Quoniam GC ſecat AB in F (§. 50), erit $z=y$ (§. 156); conſequenter $o=x$ (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arithm.*); ergo & DAB > x (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur eſſe DAB, aut, quod perinde eſt (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. III. Fig. 57. 189. *In omni triangulo* ABC, *latus majus* AC *opponitur majori angulo* B; *minus* AB *minori* C; *& contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis eſt (§. 20 *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 121): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), adeoque $o=x$ (§. 184). Sed o > C (§. 188). Ergo x > C (§. 89 *Arithm.*); conſequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.* Tab. III. Fig. 57.

Sit B > C, *per hypoth.* Si non ſit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB; adeoque in caſu primo B = C (§. 184), in altero B < C, *per demonſt.* Sed cum utrumque hypotheſin evertat, abſurdum eſt. Conſequenter ſi angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

190. *In omni triangulo* ABD, *duo latera* AD *&* BD *ſimul ſumta ſunt tertio* AB *majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD = DC, adeoque AC=AD +DB (§. 88 *Arithm.*): erit △BDC æquicrurum (§. 89) & hinc y = C (§. 184). Cum vero ſit $y < x+y$ (§. 84 *Arithm.*), erit etiam C < $x+y$ (§. 89 *Arithm.*). Quare AC, ſeu AD + DB > AB (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

191. *Linea recta* AB *eſt breviſſima omnium, quæ intra eoſdem terminos* A *&* B *continentur.* Tab. I. Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC + CB > AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit AD + DC > AC & CE + EB > CB (§. *cit.*), conſequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (§. 90 *Arithm.*), adeoque

Tab. I. *Fig.* 1. que multo magis AD + DC + CE + EB > AB. Quodſi plures ducas ſubtenſas; erit earum aggregatum denuo majus ipſa AB. Quare cum illæ ſubtenſæ cum curva tandem coincidant; erit ea major recta AB intra eoſdem terminos contenta. Eſt ergo recta AB minor curva quacunque intra eoſdem terminos contenta, hoc eſt, omnium linearum breviſſima, quæ ab A uſque ab B duci poſſunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Diſtantia ergo puncti A a puncto B in plano eſt linea recta (§. 15, *36*): cumque inter duo puncta nonniſi unica linea recta contineri poſſit (§. 170); via in plano breviſſima eſt numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter diſtant (§. 37).

PROBLEMA IX.

Tab. II. *Fig.* 42. 194. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *&* B *ex eodem tertio* C *acceſſorum.*

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur, ope funis & catenæ, ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus ſit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* tranferatur linea CB.
4. Inveſtigetur longitudo rectæ *ab* (§. 126). Dico, *ab* eſſe æqualem diſtantiæ quæſitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum inſtar in eodem plano ſitorum conſiderentur, eorum diſtantia eſt recta AB (§. 192). Quoniam vero A *a* & B *b* ſunt lineæ rectæ, *per conſtr.* & ſe mutuo ſecant in C (§. 50),

erit $x = y$ (*§*. 156).

Præterea *a*C = CA, *b*C = CB *per conſtr.*

Ergo *ba* = AB (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Inſtrumento goniometrico in C, inveſtigetur quantitas anguli *x* (§. 152). Tab. II. *Fig.* 42.
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB, cum angulo intercepto *x*, conſtruatur juxta Scalam geometricam modicam triangulum *acb* (*§*. 180).
4. Inveniatur in eadem menſura longitudo baſis *ab* (§ 126).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in ea menſura, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *acb* = ACB, & *ac* : *cb* = AC : CB, *per conſtr.* conſequenter *cb* : *ab* = CB : AB (§. 183). Ergo iidem numeri, qui reſpondent rectis *cb* & *ab* in menſura modica, etiam rectis CB & AB in majore reſpondent (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In menſula geometrica, in D horizontaliter collocata, aſſumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam Tab. II. *Fig.* 43.
2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur, donec per ea proſpicienti punctum B occurrat; ducaturque in hoc regulæ ſitu recta *cb*.

Tab.II. Fig.43. 3. Similiter collineatio fiat in punctum A, ducaturque *c a*.

4. Inveſtigetur longitudo rectarum *c*A & *c*B (§. 126) &

5. Ex menſura modica transferantur lineæ iſtis proportionales ex *c* in *a* & *b*.

6. Tandem in eadem menſura inveniatur longitudo ipſius *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in menſura majore, qua in campo uſus es.

Demonstratio.

Coincidit cum proxime præcedente.

Scholion I.

Tab.II. Fig.42. 195. *Quodſi anguſtia ſpatii non permittit, ut integræ* AC *&* BC *in* a *&* b *transferantur; poterunt* aC *&* bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ *&c. ipſarum* AC *&* BC: *quo in caſu, eodem modo ut in reſolutione ſecunda, demonſtrabitur, eſſe* ab $=\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipſius* AB.

Scholion II.

196. *Notent Tyrones artificium, quo demonſtrationes geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, ſed & proprio marte invenire poſſunt. Nimirum quicquid, vel ex conſtructione Problematis, aut hypotheſi Theorematis, vel ex conſpectu figuræ utramque repræſentantis, diſtincte cognoſcitur, per characteres diſtincte exprimatur; veluti in Demonſtratione prima præſentis, quod* x = y aC = AC *&* bC = BC. *Quo facto, diſpiciatur cujuſnam Theorematum antecedentium hypotheſis in iis contineatur: theſis enim illius Theorematis oſtendit, quid ex iis conſequatur, veluti in noſtro exemplo, quod* ab = AB. *Cum vero maxima Demonſtrationum pars ex paucis de congruentia & ſimilitudine triangulorum Theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiariſſima evadat opus eſt.*

Theorema XXV.

197. *Si ex punctis extremis* C *&* O *rectæ alicujus, radiis* CP *&* PO, *qui junctim ſumti recta* CO *majores ſunt, deſcribantur circuli, ii ſe mutuo ſecabunt.* Tab. I. Fig. 8.

Demonstratio.

Sit CP < CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arithm.*), adeoque ipſi congruit (§. 168). Quare ſi ex centro C, radio CP, circulus PNQP deſcribatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipſius (§. 173). Eodem modo oſtenditur, ſi ex centro O radio OP deſcribatur circulus; fore punctum M in peripheria ipſius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 92 *Arithm.*). Sed PO = MO (§. 40 & *per demonſt.*). Ergo NO < MO (§. 89 *Arithm.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; conſequenter circuli ſe mutuo ſecant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec abſimili modo idem oſtenditur, ſi fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

Problema X.

198. *Super data recta* AB *triangulum æquilaterum conſtruere.* Tab. I. Fig. 16.

Resolutio.

1. Ex A tanquam centro, intervallo ipſius AB, deſcribatur arcus *y*, &
2. Ex B, eodem intervallo, alius *x* (§. 131), qui priorem in C interſecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB:

Erit ACB triangulum æquilaterum.

De-

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 16. Etenim AC = AB, & BC = AB (§. 40). Ergo AC = BC (§. 87 *Arithm.*). Quare triangulum ABC eſt æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. *Data baſi* DE, *& crure* DF, *quod illa dimidia majus ſit; triangulum æquicrurum conſtruere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 17. 1. Ex uno baſis extremo D, intervallo cruris dati DF, deſcribatur arcus, &

2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF+EF > DE, *per hypoth. & conſtr.* priorem in F interſecabit (§. 197).

3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121).

Dico DFE eſſe triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per conſtr.* Ergo EDF eſt triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo baſi DE & crure DF, totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, ſi fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 119); conſequenter ſimilia (§. 120), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 175 & 109).

THEOREMA XXVI.

Tab. II. Fig. 45. 202. *Duo ſemicirculi* CLE *&* DGF *nonniſi in puncto unico* G *ſe mutuo ſecare poſſunt.*

DEMONSTRATIO.

Secent enim, ſi fieri poſſit, prætereca ſe etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta interſectionum L & G rectæ AL, AG; BL, BG; puncta item interſectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL = BG (§. 40); erit BGL = BLG (§. 184). Sed BGL > AGL (§. 84 *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 89 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40); AGL = ALG (§. 184). Quare BLG > ALG (§. 89 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*); duo ſemicirculi nonniſi unico in puncto ſe mutuo ſecare poſſunt. *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 45.

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non niſi duobus in punctis ſe mutuo ſecare poſſunt.

THEOREMA XXVII.

204. *Si in duobus triangulis* ACB *&* acb, *fuerit* AC = ac, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia ſunt & ſimilia.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A, radio AC, deſcriptus concipiatur arcus *y*, & ex centro B, radio BC, alius *x* (§. 131). Concipiamus porro △*acb* ita poni ſupra △ACB, ut punctum *a* ſuper A, & recta *ab* ſuper AB, cadat. Quoniam *ab* = AB, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B cadet (§. 169). Et quia *ac* = AC, & *bc* = BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 173); conſequenter punctum *c* ſuper C cadet (§. 202), & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 170). Quare *a* = A, *b* = B,

Tab.II. Fig.41. $b = B$, $c = C$ (§. 167); cumque △ acb alteri ACB congruat (§. 3), △ acb = & ∽ △ ACB (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig.18. 205. *Datis tribus lateribus* AB, BC, CA, *quorum duo ſimul ſumta* AC & BC *tertio* AB *majora ſunt; triangulum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumta AB pro baſi, ex A, intervallo ipſius AC, deſcribatur arcus y, &
2. ex B, intervallo ipſius BC arcus alius x (§. 131), qui ob AC+BC > AB *per hypoth.* priorem in C ſecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AB & BC (§. 121).

Ita factum eſt, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonniſi unicum triangulum conſtrui poſſit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare ſi, in duobus triangulis ACB & acb, fiat AC : AB = $ac : ab$, AC : BC = $ac : bc$; triangula eodem modo determinantur (§. 119); conſequenter ſimilia (§. 120), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 175, 109).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. Fig.46. 208. *Angulo dato* DAE *æqualem* b a c *conſtituere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex A, intervallo AC, deſcribatur arcus BC, erit AB=AC (§. 40).
2. Ducatur recta ac=AC, & ex a, intervallo ipſius AB, deſcribatur arcus x; item
3. Ex c, intervallo ipſius CB, alius y, qui ob AB+BC > AC (§. 190), ſeu $ab + bc > ac$ (§. 190), priorem in b interſecabit (§. 197). Tab.II. Fig.46.
4. Ducatur recta ab (§. 121).

Dico eſſe $a = A$.

II. In Solo,

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In a & c defigantur baculi, ea lege ut ſit ac = AC.
3. Ad eos funis, vel catena, ita applicetur, ut pars ipſius ab=AB, & altera cb=CB fiat.
4. In b defigatur baculus.

Dico eſſe bac=BAC.

Interdum etiam in Solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque caſu ac=AC, ab=AB, cb = CB, *per conſtruct.* Ergo bac = BAC (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum* HIK *in duas partes æquales dividere.* Tab. Fig.4

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur, radio quocunque, arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M, intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus ſe mutuo ſecantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121).

Dico eſſe HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim IL=IM (§. 40), LN=MN, *per conſtr.* IN = IN. Ergo HIN = NIK (§. 204). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XV.

Tab.II. Fig.50. 210. *Lineam rectam* AB *in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,
1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore, ducantur arcus ſe mutuo in C ſecantes (§. 197).
2. Fiat ſimilis interſectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121).
Dico eſſe AE = EB.

DEMONSTRATIO.

Tr. ACB eſt æquicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis eſt (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.II. Fig.51. 1. Ponatur circinus in A & eo uſque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo,
1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rurſus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum eſt, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi poſteriores equidem ſecandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius eſt uſus.*

PROBLEMA XVI.

212. *Ex puncto* G *in recta* ML *dato perpendicularem* GI *excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta,
1. Poſito circino in G, arbitrario intervallo reſecentur utrinque partes æquales GK & GH. Tab.II. Fig.49.
2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat interſectio in I (§. 197).
3. Ducatur recta GI (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH, & KI = IH, *per conſtruct.* IG = IG. Ergo anguli ad G ſunt æquales (§. 204), conſequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Normæ, hoc eſt, inſtrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compoſiti crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex ſupra punctum datum G cadat. Tab.II. Fig.52.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ eſt rectus, *per hypoth.* Sed ipſi æqualis eſt IGL (§. 167): ergo IGL eſt itidem rectus (§. 145), adeo-

adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab.II. II. In Solo;
Fig.52. Norma utimur majore, & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab.II. 1. Filum KIH, in duas partes æquales
Fig.49. in I diviſum, ex punctis K & H extenditur &

2. In I baculus defigitur, tandemque

3. KH bifariam ſecatur in G (§. 210).

Dico eſſe GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, & KG=GH, *per conſtruct.* & GI = GI; anguli ad G deinceps poſiti ſunt æquales (§. 204); conſequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. Fig.53. 213. *Ex uno puncto* D, *ſuper eadem recta* AB, *nonniſi perpendicularis unica* CD *erigi poteſt in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Si fieri poteſt, ſit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (*§.* 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD *per hypoth.* ADC ſimiliter rectus eſt (§. *cit.*); conſequenter ADE=ADC (§. 145): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis eſſe nequit. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

Tab. III. Fig.53. 214. *Si recta* CD *perpendicularis ad* DB *continuetur in* F, *erit etiam* DF *ad* DB *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus eſt (§. 78). Ergo *y* ſimiliter rectus eſt (§. *65*, 145), conſequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.* Tab. III. Fig.53.

THEOREMA XXX.

215. *Si duo puncta* H *&* Q *alicujus rectæ* HI *a duobus punctis* K *&* L *alterius rectæ* MN *utrinque æqualiter diſtent; erit* HI *ad* MN *perpendicularis.* Tab. III. Fig.54.

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter diſtant, *per hypoth.* HK = HL & QK = QL (§. 192). Eſt vero etiam QH = QH. Ergo *o* = *x* (*§.* 204); conſequenter cum HI = HI, anguli ad I æquales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (*§.* 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

216. *A dato puncto* H *ad rectam* MN *perpendicularem* HI *demittere.* Tab. III. Fig.54.

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Poſito circino in H, intervallo arbitrario, eodem tamen, interſecetur MN in K & L.

2. Ex K & L fiat interſectio in Q (*§.* 197).

3. Ducatur per Q recta HI (§. 121).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KQ = LQ *per conſtruct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter diſtant (*§.* 192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem ſtringat, alterum vero punctum datum I attingat. Tab. II. Fig.52.

2. Du-

Tab.II. 2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad
*Fig.*52. ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt quæ in caſu ſimili Problematis 16 (§. 212).

II. In Solo,

Tab. III. *Fig.*54. Aut utimur norma majore, ut in Probl. 16, aut

1. Fune ex H extenſo deſignantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur. (§. 125).
2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI deſignare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per conſtruct.* HI = HI; anguli ad I ſunt æquales (§. 204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab. III. *Fig.*56. 217. *Ab uno puncto* H, *ad eandem rectam* LM, *non niſi unica perpendicularis* HI *duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, ſi fieri poteſt, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit *o* rectus (§. 78). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit *x* quoque rectus (§ *cit.*). Eſt vero $o \triangleright x$ (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum ſit abſurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonniſi unica perpendicularis duci poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

218. *In omni triangulo rectangulo* HIK *angulus nonniſi* x *rectus eſt; reliqui* H *&* K *ſunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus *y* rectus eſt (§. 79). Sed $y \triangleright m$, item $y \triangleright H$ (§. 188). Ergo K & H ſunt recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.* Tab. III. *Fig.*56.

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo eſt rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum eſt hypothenuſa (§. 95, 189).

THEOREMA XXXIII.

221. *In triangulo obtuſangulo* PNO *angulus obtuſus nonniſi unicus eſt, reliqui* P *&* O *ſunt acuti.* Tab. I. *Fig.* 20.

DEMONSTRATIO.

$y + x = 2$ rectis (§. 147). Sed *y*, utpote obtuſus *per hypoth.* major recto (§. 66). Ergo *x* recto minor. Quoniam vero $x \triangleright O$, item $x \triangleright P$ (§. 188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtuſangulo angulorum maximus eſt obtuſus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuſo opponitur (§. 189).

PROBLEMA XXXIV.

224. *Linea perpendicularis* HI *eſt breviſſima omnium, quæ a puncto* H *ad eandem rectam* LM *duci poſſunt.* Tab. III. *Fig.*56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM, *per hypoth.* angulus *x* rectus eſt (§. 78), adeoque HK hypothenuſa (§. 95), conſequenter $HK \triangleright HI$ (§. 220). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

225. Ergo diſtantia puncti a linea, vel plano, eſt recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare ſi linea HI fuerit ipſi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demiſſa GE, AB, CD inter ſe æqualia, & contra (§. 81).

COROLLARIUM III.

227. Altitudo figuræ eſt perpendiculum ex vertice in baſin demiſſum (§. 115).

COROLLARIUM IV.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo ſi KL ſumatur pro baſi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

COROLLARIUM V.

Tab. I. Fig. 21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98, 100), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod ſi ergo latus unum CD vel IK ſumatur pro baſi; erit A vel L vertex (§. 114), conſequenter AC vel KL altitudo (§. 227).

THEOREMA XXXV.

Tab. III. Fig. 58. 230. *Si* HI *fuerit parallela & BA perpendicularis ad* KL; *erit eadem* AB *etiam perpendicularis ad* HI.

DEMONSTRATIO.

Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE=CD (§. 226), & E=D (§. 78, 145); conſequenter BG=BC & $y=u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (§. 79). Ergo & $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Quare cum porro ſit AB=AB; erit & $m=n$ (§. 179), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 58.

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD diſtantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque ſi HI parallela ipſi KL, etiam KL parallela eſt ipſi HI (§. 81).

THEOREMA XXXVI.

232. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *ſunt etiam parallelæ inter ſe, & parallelis parallelæ ſunt inter ſe parallelæ.* Tab. III. Fig. 59.

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (§. 214, 230). Ergo GH=KL & HI=LM (§. 226); conſequenter GH+HI=KL+LM (§. 88 *Arithm.*) hoc eſt, GI=KM (§. 86, 87 *Arithm.*); adeoque AB parallela ipſi EF (§. 226). *Quod erat unum.*

Poſterius patet per prius.

THEOREMA XXXVII.

233. *Si duas parallelas* AB *&* CD *ſecet transverſa* EF *in* G *&* H; *erunt* 1°. *anguli alterni* y *&* u *æquales;* 2°. *angulus externus* x *æquatur interno oppoſito* u; 3°. *duo interni oppoſiti* o *&* u *ſunt æquales duobus rectis.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

Si recta EF ſecet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifeſta ſunt per Theorema 35 (§. 230). Si vero oblique ſecet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21). donec fiat IM=GI & KL=HK.

1°. Quo-

Tab. III. *Fig.* 60. 1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD, *per conſtruct.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM, *per conſtr.* & HI = IH. Ergo GH = HM, & $u = z$ (§. 179). Eodem modo oſtenditur eſſe HG = GL, & $y = t$. Quamobrem & GL = HM (§. 87 *Arithm.*). Eſt vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88 *Arithm.*), hoc eſt, HL = GM (§. 86 *Arithm.*) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$, & $u = z$ *per demonſtrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15 *Arithm.*), hoc eſt $2y = 2u$, conſequenter $y = u$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2°. $x = y$ (§. 156), & $u = y$ (*per num.* 1). Ergo $x = u$ (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3°. $x + o = 180°$ (§. 148). Sed $x = u$ (*per num.* 2). Ergo $u + o = 180°$ (§. 15 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. II. *Fig.* 41. 234. *Datis duobus lateribus* AB *&* BC, *cum angulo* A *uni eorum* BC *oppoſito; triangulum* ABC *conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B, intervallo alterius lateris dati BC, crus anguli AC interſecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). *Sic factum eſt, quod petebatur.*
4. Quod ſi $BC < BA$; aut bis ſecabit crus AC, aut idem tangit; adeoque in caſu poſteriore angulus ad C rectus eſt (§. 309), in priore conſtare debet, utrum angulus ad C ſit acutus, an obtuſus. Tab. II. *Fig.* 41.

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque angulo uni eorum oppoſito, triangulum conſtrui poſſit; iis datis, reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare ſi in duobus triangulis ejuſdem ſpeciei ABC & *abc*, fuerit AB = *ab*, BC = *bc*, & A = *a*; erit etiam AC = *ac*, B = *b*, C = *c*, & △ ABC = △ *abc*.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia eſſe quæ per æqualia determinantur, ſeu, quod perinde eſt, figuras eſſe æquales quæ ex æqualibus datis eodem modo conſtruuntur. Unde non ſolum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonſtrari poteſt.*

COROLLARIUM II.

237. Quodſi in duobus triangulis ejuſdem ſpeciei, veluti acutangulis ABC & *abc*, fuerit A = *a* & AB : BC = *ab* : *bc*, triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque ſimilia ſunt (§. 120); conſequenter etiam B = *b*, C = *c*, BC : CA = *bc* : *ca* & CA : AB = *ca* : *ab* (§. 175).

THEOREMA XXXVIII.

238. *Perpendicula* KH *&* GI *æquales parallelarum partes* KG *&* HI *intercipiunt.* Tab. III. *Fig.* 60.

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230, 226), $u = y$ (§. 233), & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

Tab. III. Fig. 61. 239. *Si trianguli cujuſcunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppoſitis* y *&* z *ſimul ſumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE baſi AB parallela, erit $x = y$, & $o = z$ (§. 233); conſequenter DCA $= x + o = y + z$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XL.

240. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim ſumti ſunt æquales duobus rectis ſeu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147). Ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. I. Fig. 19. 241. In triangulo igitur rectangulo MKL, duo anguli obliqui M & L junctim ſumti efficiunt rectum ſeu 90°, adeoque ſemirecti ſunt, ſi triangulum fuerit æquicrurum (§. 184).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus eſt obtuſus; duo reliqui ſimul ſumti ſunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 16. 243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus 60°, nimirum 180 : 3. (§. 186).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo neceſſario angulus unus ſit rectus (§. 91); triangulum rectangulum æquilaterum eſſe nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° ſubtrahitur, ſumma duorum reliquorum relinquitur; &, ſi ſumma duorum ex 180° aufertur, reſiduus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, ſive ſigillatim, ſive junctim; etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

247. In quovis triangulo anguli ad baſin y & z junctim ſumti ſunt duobus rectis minores. Tab. III. Fig. 61.

COROLLARIUM VIII.

248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad baſin y & u æquales ſunt (§. 184); ſi angulus ad verticem F ſubtrahitur a 180°, & reſiduum biſecatur; unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter, ſi duplum anguli unius ad baſin y a 180° ſubtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab. I. Fig. 17.

PROBLEMA XIX.

249. *In extremitate* F *lineæ* FG *perpendicularem* FH *excitare.* Tab. III. Fig. 62.

RESOLUTIO.

1. Super FG conſtruatur △ æquilaterum FIG (§. 198).
2. Producatur GI in H (§. 21), donec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG eſt æquilaterum, *per conſtr.* $o = 60°$ & $u = 60°$ (§. 243). Ergo $y = 120°$ (§. 239); conſequenter ob FI = HI *per conſtr.* $x = 30°$ (§. 248). Cum adeo $x + o = 90°$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis eſt (§. 78). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab. III. *Fig.63.* 250. *Si recta* DE *ſecet rectam* AB *in* C; *non alibi eandem denuo ſecabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, ſi fieri poteſt, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, ex. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, conſequenter recta ADCE tota ſupra AB cadit (§. 170), atque adeo eam non ſecat (§. 50): quod cum hypotheſi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipſam AB ſecare poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

Tab.II. *Fig.*41. 251. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc, *fuerit* AB=ab, A=a *&* B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c, *&* △ ACB=*&* ∽ △ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni ſupra alterum ABC, ita ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *b*=B, *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 169), recta *ac* ſuper AC & *bc* ſuper BC (§. 166); conſequenter *c* ſuper C (§. 250) cadit. Cum adeo △ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac*=AC, *bc*=BC, *c*=C (§. 177), & △ *abc*=& ∽ △ ABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 246), conſequenter AC = *ac*, AB = *ab* & △ ACB = & ∽ △ *acb* (§. 251).

THEOREMA XLIII.

Tab.II. *Fig.*44. 253. *Si in triangulo* DFE *anguli ad baſin* u *&* y *æquales; triangulum eſt æquicrurum.*

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Eſt ergo △ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.* Tab.II. *Fig.*44.

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum eſt (§. 88).

THEOREMA XLIV.

255. *Si duas lineas* AB *&* CD *ſecet transverſa* EF *in* G *&* H, *ita ut vel* 1°. y = u; *vel* 2°. x = u; *vel* 3°. o + u = 180°; *erunt lineæ iſtæ inter ſe parallelæ.* Tab. III. *Fig.*60.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit K=I (§. 78; 145). Eſt vero & *y*=*u*, *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK =GI (§. 252); conſequenter cum HK & GI ſint diſtantiæ linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD ſunt inter ſe parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2. *x*=*u*, *per hypoth.* *x*=*y* (§. 156). Ergo *y*=*u* (§. 87 *Arithm.*); conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat ſecundum.*

3. *o*+*u*=180°, *per hypoth.* Sed *o*+*x*=180° (§. 147). Ergo *u*=*x* (§. 87 *Arithm.*), conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

256. *Si duæ lineæ* EG *&* AB *fuerint perpendiculares ad eandem tertiam* HI; *erunt inter ſe parallelæ.* Tab. III. *Fig.*58.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 58. Fiat AB = EG, ducaturque recta KL; erit HI ipſi KL parallela (§. 81); conſequenter EB = GA (§. 238). Quare cum etiam ſit GB = GB; erit EGB = ABG (§. 204); conſequenter EG ipſi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 64. 257. *Parallelæ* DF *&* GA *inter eaſdem parallelas* FA *&* DG *ſunt æquales. Et contra, ſi* DF *&* GA *fuerint parallelæ & æquales; erit etiam* FA *ipſi* DG *parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF = AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ ſint parallelæ *per hypoth.* $o = u$ (§. 233). Quare cum etiam ſit DA = DA, erit $x = y$ (§. 179); conſequenter FA ipſi DG parallela (§. 255), adeoque etiam æqualis, *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

Tab. III. Fig. 65. 258. *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 212).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipſi RS parallela (§. 226).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur. Tab. III. Fig. 65.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R verſus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipſi RS deſcribet (§. 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit VN ſeu MN parallela ipſi RS (§. 255).

Aliter.

Ex modo præcedente enatus eſt ſequens. Tab. III. Fig. 66.

1. Triangulum rectangulum AVN, ex ligno ebenino aut alio Indico paratum, ita applicetur ad rectam RS, ut baſis ejus VN parti ipſius congruat.
2. Hypothenuſæ ejuſdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc ſitu immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec baſis punctum V attingat.

Erit enim in quovis ſitu, baſis VN, ob $y = x$, ipſi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD compoſito, quæ ejuſdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter ſe æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a ſe invicem diſtent, ipſæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum Tab. III. Fig. 67.

1. Re-

Tab. III. *Fig.* 67.
1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur, &
3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur; quæ erit ipſi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG = FH, EF = GH, *per conſtr.* & EH = EH, erit $o = x$ (§. 204); adeoque FH parallela ipſi EG (§. 255). Sed AB ipſi EG, & RS ipſi FH parallela, *per conſtr.* Ergo AB parallela ipſi RS (§. 232). *Q. e. d.*

II. In campo,

Tab. III. *Fig.* 68. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci poteſt in N (§. 125), ipſi RS parallela (§. 255).

Aliter.

1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Fiat $u = x$ (§. 208), & TA = VK.
3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipſi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = u$, *per conſtr.* erit TA parallela ipſi KV (§. 255); conſequenter $z = y$ (§. 233). Eſt vero etiam TA = KV, *per conſtruct.* & TV = TV. Ergo $m = n$ (§. 179); conſequenter MN parallela ipſi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelifmis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipſi parallelifmi. Huic malo præſens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex inſignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elaſticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare ſolet. Notum vero eſt, orichalcum ad elaſticitatem uſque vehementi contuſione indurari.*

THEOREMA XLVII.

260. *Per idem punctum C eidem rectæ DE parallela nonniſi unica AB duci poteſt.* Tab. III. *Fig.* 69.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, ſi fieri poteſt, adhuc alia HG, priorem ſecans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), conſequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum ſit abſurdum (§. 218), per C nonniſi AB ipſi DE parallela duci poteſt. *Q. e. d.*

Aliter.

Angulus NCH = NQD & NCA = NQD (§. 233). Ergo NCH = NCA (§. 87 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), HG & AB non ſunt ſimul ipſi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVIII.

261. *Si recta* NO *ſecet duas rectas alias* HG *&* DE *in* C *&* Q, *ita ut duo* Tab. III. *Fig.* 69.

Tab. III. Fig. 69. *duo anguli interni oppoſiti* HCO *&* DQN *fuerint ſimul ſumti duobus rectis majores; lineæ* GH *&* ED *verſus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipſi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN ſimul ſunt duobus rectis majores *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 92 *Arithm.*); conſequenter AC intra ſpatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR=CF (§. 226), conſequenter PS > PR (§. 84 *Arithm.*) > CF (§. 89 *Arithm.*). Diſtantiæ igitur rectarum CH & QD verſus H & D creſcunt (§. 225), adeoque lineæ CH & QD verſus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

262. *Si duas rectas* HG *&* DE *ſecet transverſa* NO *in* C *&* Q, *ita ut anguli* GCO *&* EQN *ſimul ſumti ſint duobus rectis minores; lineæ* CG *&* QE *verſus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipſi QE parallela eſſe nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipſi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN ſimul ſumti ſunt duobus rectis minores, *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ, (§. 92 *Arithm.*); conſequenter CB extra ſpatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF=IL (§. 226); conſequenter IK < IL (§. 84 *Arithm.*) < CF (§. 89 *Arithm.*). Diſtantiæ igitur rectarum CG & QE decreſcunt verſus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE verſus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC ſimul ſumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipſi deinceps poſiti duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ verſus unam plagam convergunt (§. 262), verſus oppoſitam divergunt (§. 261).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta* AB, *&* *angulis adjacentibus* A *&* B, *qui junctim ſumti duobus rectis minores ſunt, triangulum* ABC *deſcribere.* Tab. I. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec ſibi mutuo occurrant in C (§. 250, 262). ABC triangulum erit deſideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una, datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare ſi in duobus triangulis fiat A = *a*, & B = *b*; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque ſimilia ſunt (§. 120). Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit A = *a*, & B = *b*; conſequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam C = *c* (§. 246); hoc eſt, △△ ACB & *acb* ſibi mutuo æquiangula (§. 109).

(§. 109). Quare △△ ſibi mutuo æquiangula ſimilia ſunt (§. 296), & hinc latera homologa, ſeu æqualibus angulis oppoſita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 70. 268. *Si in triangulo* ABC *recta* DE *baſi* AC *parallela ducatur; ſegmenta crurum cruribus proportionalia ſunt; hoc eſt*, BA : BC = BD : BE = AD : EC; *&* BA : AC = BD : DE; *atque* △ BDE ∽ △ BAC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipſi AC, erit $x=y$, & $o=u$ (§. 233); adeoque △ BDE ∽ △ BAC, & BA : BC = BD : BE, & BA : AC = BD : DE (§. 267). Ergo & BA : BD = BC : BE (§. 173 *Arithm.*); conſequenter AD : BD = EC : BE (§. 193 *Arithm.*), ſeu BD : AD = BE : EC (§. 169 *Arithm.*), vel denique BD : BE = AD : EC (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LI.

Tab. III. Fig. 71. 269. *Recta* FH, *angulum* GFE *bifariam ſecans, baſin* GE *cruribus adjacentibus* EF *&* GF *proportionaliter ſecat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI = FG, erit $o+x=y+u$ (§. 239). Sed $o=x$, *per hypoth.* & $y=u$ (§. 184), adeoque $2y=2o$ (§. 15 *Arithm.*). Ergo $o=y$ (§. 94 *Arithm.*); conſequenter HF ipſi GI parallela (§. 255). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268) = GF : GH (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Eſt ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173 *Arithm.*); conſequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 *Arithm.*); ſeu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173 *Arithm.*); hoc eſt, ut ſumma crurum ad baſin integram, ita crus unum ad ſegmentum hujus adjacens. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 71.

PROBLEMA XXII.

Tab. III. Fig. 72. 271. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D conſtituatur angulus x ipſi ABC æqualis (§. 208).

Dico, eſſe AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o=x$, *per conſtr.* erit BC ipſi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

272. Quodſi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipſi AC æqualis fieri, hoc eſt, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM II.

273. Si DB ſumatur pro unitate; reſpondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arithm.*).

PROBLEMA XXIII.

Tab. IV. Fig. 73. 274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio aſſumta reſecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, ex. gr. 5.

 2. Super

Tab. IV. Fig. 73. 2. Super harum partium intervallo conſtruatur triangulum æquilaterum CED (§. 198).

3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in *b*.

4. Ducatur recta *ab*: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico eſſe $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{5}AB$, $a2 = \frac{2}{5}AB$, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$, & $EC = ED$, *per conſtruct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$. (§. 168, 173 *Arithm.*). Quare, cum angulus E utrique triangulo ECD & E*ab* communis ſit, erit $EC : CD = Ea : ab$, & $o = x$, (§. 183). Sed $EC = CD$, *per conſtruct.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$, *per demonſtr.* erit $a1$ parallela ipſi C 1 (§. 255); conſequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268), hoc eſt, ob $EC = CD$, *per conſtruct.* & $Ea = ab$, *per demonſtr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168 *Arithm.*). Sed $C1 = \frac{1}{5}CD$, *per conſtruct.* Ergo $a1 = \frac{1}{5}ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo oſtenditur, eſſe $a2 = \frac{2}{5}AB$, conſequenter $12 = \frac{1}{5}AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 74. 275. Quodſi ergo CD fuerit utcunque diviſa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* ſecabitur in eadem ratione. Eſt nempe $CD : C1 = ab : a1$, & $CD : C2 = ab : a2$, &c. (§. 274).

SCHOLION.

276. *Corollarii hujus uſus ampliſſimus eſt in Architectura tam civili, quam militari; præſertim ubi Ichnographiæ vel amplianda, vel contrahendæ.*

PROBLEMA XXIV.

277. *Scalam geometricam conſtruere.* Tab. IV. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10 æquales B1, 12, 23, 34, &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F, &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales diviſa (§. 249).
3. Per puncta diviſionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipſius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & *9*, *9* & 8, 8 & 7, &c. lineis transverſis connectantur (§. 121).

Dico, ſi AB fuerit decempeda, fore B1, 12, 23, 34 &c. pedes, *99* digitum unum, 88 digitos duos, 77 tres, *66* quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10}AB$, *per conſtruct.* Sed pes eſt decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB ſit decempeda, *per hypoth.* erunt B1, 12, 23 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia *99* eſt parallela ipſi A*9*, *per conſtruct.* $C9 : CA = 99 : A9$, (§. 268). Sed $C9 = \frac{1}{10}CA$, *per conſtruct.* Ergo $99 = \frac{1}{10}A9$ (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A*9* ſit pes, *per demonſtr.* erit *99* digitus (§. 25). Eodem modo oſtenditur eſſe 88 duos, 77 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHO-

Scholion.

Tab. IV. Fig. 75. 278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi poteſt. Neque opus eſt, ut angulus A ſit rectus; ſed idem obliquus eſſe poteſt.*

Corollarium.

279. Quodſi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K; erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

Problema XXV.

Tab. IV. Fig. 76. 280. *Invenire diſtantiam duorum locorum* AB, *quorum unus B tantum accedi poteſt.*

Resolutio.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus ſit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C conſtituatur angulus ECF ipſi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum verſus D, donec baculus in D defixus ſit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico eſſe DC=BA.

Demonstratio.

Nam BE=EC, $o=x$, *per conſtruct.* & $y=u$ (§. 156). Ergo AB = DC (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 77.
1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus ſit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico eſſe MN=BA.

Demonstratio.

BK=KM, & IK=KL, *per conſtruct.* $o=u$, (§. 156). Ergo IB=ML, & $y=x$ (§. 179). Quare cum ſit $o+m=u+n$ (§. 156), & IK = KL, *per conſtr.* erit IA=NL (§. 251); conſequenter AB=NM (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 78.
1. Menſula geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*.
2. Quæratur diſtantia ſtationis a loco acceſſo AC (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica in *ac* transferatur (§. 277).
4. Translocetur menſula in A, ita ut punctum *a* ipſi A immineat, & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima ſtatione C defixus conſpiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.
6. Denique in Scala geometrica capiatur intervallum ipſius *ab* (§. 277).

Ita diſtantia quæſita AB innoteſcet.

Demonstratio.

Quoniam $c=C$, & $a=C$, (*per conſtruct.* & §. 167), erit $ac:ab$ = AC : AB (§. 267), hoc eſt, iidem numeri rationes $ac:ab$ & AC : AB indigitant (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Baculo in C defixo inveſtigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipſius AC (§. 126).
2. Ope Inſtrumenti tranſportatorii & Scalæ geometricæ conſtruatur triangulum *acb* (§. 264).

Tab. IV. Fig. 78. 3. Ad Scalam geometricam applicetur recta *ab* (§. 277).

Ita diſtantia AB innoteſcet.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. *Metiri diſtantiam duorum locorum inacceſſorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 76. Sine Inſtrumentis tædioſior eſt Problematis reſolutio, quam ut commendari poſſit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E aſſumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).
2. His datis reperiet DC ipſi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79.

1. Duabus ſtationibus in C & D electis, in prima C collocetur menſula, & per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.
2. Quæratur diſtantia ſtationum CD (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica transferatur in *cd* (§. 279).
4. Baculo in C defixo, menſula collocetur in D, ea lege ut punctum *d* ipſi D, hoc eſt puncto in quo defigebatur ante baculus immineat, & per dioptras regulæ ad *cd* applicatæ reſpicienti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ *da* & *db*.
6. Tandem diſtantia punctorum *a* & *b* inveſtigetur in Scala geometrica (§. 279).

Dico eſſe *cd* : *ab* = CD : AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *cdb*=CDB, & *bcd*=BCD (*per conſtruct.* & §. 167). Ergo *dc* : *cb* = DC : CB (§. 267). Similiter cum ſit *acd* = ACD, & *adc* = ADC (*per conſtruct.* & §. 167), erit *dc* : *ac*=DC : AC, adeoque *bc* : *ac* = BC : AC (§. 196 *Arithm.*); conſequenter, ob *acb* =ACB (*per conſtruct.* & §. 167), *ac* : *ab* = AC : AB (§. 183), & ob *dc* : *ac* = DC : AC (*per demonſtr.*) *dc* : *ab* =DC : AB (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 79.

Aliter.

Tab. IV. Fig. 80.

1. Electis duabus ſtationibus C & D, inveſtigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item *z* & *w* (§. 152), quorum ſummæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).
2. Quæratur porro diſtantia ſtationum CD (§. 126), &
3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala geometrica transferatur recta *cd* ipſi CD reſpondens (§. 279).
4. Super ea, ope angulorum *x* & D, conſtruatur triangulum *bcd*, &, ope angulorum *z* & C, alterum *acd* (§. 264).
5. Tandem in Scala geometrica inveſtigetur diſtantia punctorum *a* & *b* (§. 279).

Dico eſſe *ab* : *cd* = AB : CD.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum proxime præcedente.

SCHO-

SCHOLION I.

282. *Levi attentione patet, non abſimili methodo ex duabus ſtationibus reperiri diſtantias plurium locorum.*

SCHOLION II.

Tab. IV. *Fig.* 81. 283. *Nec minus manifeſtum eſt, menſulæ ſitum in iſtiuſmodi operationibus horizontalem eſſe debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem acceſſam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

Tab.V. *Fig.*82. 1. Baculus DE tantæ longitudinis ſumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.
2. Humi proſtratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).
3. Quodſi contingat, ut E & B ſint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; ſin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit; propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus eſt; ſin punctum ſuperius; procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.
4. Tandem diſtantiam oculi C ab altitudine AB metiaris neceſſe eſt (§. 126).

Dico eſſe CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per conſtruct.* ad AC perpendiculares, inter ſe parallelæ ſunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268). Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In diſtantia plurium, ex. gr. 30, 40, & amplius, pedum defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F conſtituto E & B ſint in eadem recta. Tab.V. *Fig.*83.
2. Inveſtigetur diſtantia baculorum GF, & baculi minoris ab altitudine quæſita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).
3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arithm.*).
4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico ſummam eſſe altitudinem AB.

Ex. gr. Sit HF = 48′; GF = 20′; GE = 16′; FC = 5′.

```
20 : 16 = 48 | 5) 192 (38 2/5 = BH
 5    4    4 |    15     5   = FC
         192 |    42    43 2/5 = AB
                  40
                   2
```

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipſi AC parallela ſupponatur, ſintque BA (§. 227) & ED *per conſtruct.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230); adeoque GE & BH parallelæ (§. 256); conſequenter GF : GE = HF : HB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas HF &

Tab.V. Fig.83. & AC (*per conſtr.* & §. 227); erit FC = HA (§. 226). Quare BH = FC = BH + HA (§. 88 *Arithm.*) = BA (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Fig.84. Tab. IV. Fig.81.

1. Menſula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipſius FE ſit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.
2. Ducatur recta *ef* lateri menſulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur menſula, donec collineatio in altitudinem quæſitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras tranſpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur diſtantia ſtationis ab altitudine *e*C (§. 126), &
5. Ex Scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod
7. Ad Scalam geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifeſtat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, ſummam eſſe altitudinem AB.

Demonstratio.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227), & C*e* ipſi BD parallela *per conſtr.* erit eadem AC perpendicularis ad C*e* (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per conſtr.* Ergo *bc* ipſi AC parallela (§. 256); conſequenter *ec* : *cb* = *e*C : CA (§. 268).

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli *e* (§. 152), & diſtantia ſtationis *e* C (§. 126). Tab.V. Fig.84
2. Super *ec* in Scala geometrica minore aſſumta (§. 279) conſtruatur triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

Demonstratio.

Eſt enim *c* = C, & *e* = E, *per conſtr.* Ergo *ec* : *cb* = *e*C : CB (§. 267). *Q. e. d.*

Scholion.

285. *In omnibus iſtis reſolutionibus ſupponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rariſſime in praxi occurrat, ſi notabilis fuerit declivitas, non tam Inſtrumenti altitudo, quam ipſa* CB *addenda, in altitudine acceſſa facile inveſtiganda. Neceſſe etiam eſt, ut baculi, quantum fieri poteſt, exactiſſime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in Inſtrumentis præſcripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo* BC *eodem modo inveſtigari poteſt, quo ipſam* AC *invenimus.*

Problema XXVIII.

286. *Altitudinem inacceſſam* AB *metiri.* Tab.V. Fig.83.

Resolutio.

Sine Inſtrumentis prolixa eſt operatio. Nimirum

1. Diſtantia ſtationis CA vel FH quæritur, per Problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in Problemate præcedente (§. 284).

Aliter.

1. Statione in D electa, menſula collocetur ut in Problemate præcedente (§. 234). Tab.V. Fig.85. n. 1.

2. Du-

Tab.V. 2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
*Fig.*85. 3. Baculi in G defixi, ut ſit in recta *f*C, quæratur diſtantia a puncto *f* (§. 126), &
n. 1.

4. Ex Scala geometrica transferatur in *fe* (§. 279).

5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus, & menſula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipſi G immineat, & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ reſpicienti baculus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras proſpiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.

7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216): quæ

8. Ad Scalam geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.

n. 2. 9. Quodſi puncta, B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; ſin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras deſpiciens videat B, ducatur *eb*, & perpendiculum *ac* continuetur, donec ipſi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam geometricam translata manifeſtabit AB.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim *fea* & F*e*A, eſt angulus *afe* = AF*e*, & *aef* = A*e*F, *per conſtruct.* Ergo *fe* : *ea* = F*e* : *e*A (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (*per* §. 227 *& conſtr.*) adeoque inter ſe parallelæ (§. 256). Quare *ae* : *ac* = A*e* : AC (§. 268), conſequenter *fe* : *ac* = F*e* : AC (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat unum.* Tab.V. *Fig.*85.

Quoniam *ab* parallela ipſi AB, *per demonſtrata* : erit *ae* : *ab* = A*e* : AB (§. 268); conſequenter *fe* : *ab* = F*e* : AB (*per demonſt. &* §. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Inveſtigetur quantitas anguli AFC in D, & anguli A*e*C in G; itemque C*e*B in eadem ſtatione G (§. 152).

2. Quæratur diſtantia F*e* (§. 126).

3. Conſtruatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279).

4. Demittatur ex vertice *a* in baſin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216) indefinite producenda.

5. Fiat angulus *ceb* ipſi C*e*B æqualis (§. 208), & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21).

Dico eſſe *fc* : *ab* = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LII.

Tab. I. Fig. 5. 287. *Circuli ſe intus tangentes ſunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare ſi ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121); ea peripheriam minoris in M ſecabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipſius CN (§. 9 *Arithm.*). Quodſi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL=CM, & CL=CN (§. 40), adeoque CM=CN (§. 87 *Arithm.*), quod cum ſit abſurdum (*per demonſtr. &* §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

Tab. V. Fig. 86. 288. *Duo circuli ſe mutuo ſecantes ſunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z ſecat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z ſecabit peripheriam illius in E (§. 50); eritque CB pars ipſius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodſi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit CB=AC, & CE=AC (§. 40); adeoque CB=CE (§. 87 *Arith.*). Quod cum ſit abſurdum (*per demonſtr. &* §. 84 *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

289. *In eodem vel in æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *æquales arcus ſubtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* BC=CE, & AC=CD (§. 40); angulus ACB=DCE (§. 204); conſequenter arcus AB & DE, menſuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales ſunt (§. 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales ſunt, *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem menſuræ angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur iſti æquales ſunt (§. 142). Quoniam porro BC=CE, & AC=CD (§. 40); erit quoque AB=DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LV.

290. *Si in circulis inæqualibus arcus* AB *&* ab *fuerint ſimiles; chordæ cognomines ad ſuos radios* AC *&* ac *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* ſimiles ſunt, *per hypoth.* iidemque menſuræ angulorum ACB & *acb* (§. 57); erit ACB =*acb* (§. 141). Eſt vero AC : BC=*ac*: *bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo AB : BC=*ab* : *bc* (§. 183). *Q.e.d.*

THEOREMA LVI.

Tab.V. Fig.88. 291. *Radius* CE, *chordam* BA *bifariam ſecans in* D, *etiam arcum bifariam ſecat in* E; *& ad chordam* BA *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD=DB, *per hypoth.* AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo *o*=*x*, & *y*=*u* (§. 204); conſequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum *u* & *y* menſuræ (§. 57), æquales ſunt (§. 142): *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* cum iidem ſint menſuræ angulorum *u* & *y* (§. 57); erit *y*=*u* (§. 142). Eſt vero etiam AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo AD=DB, & *o*=*x* (§. 179); conſequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat ſecundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit *o*=*x* (§. 79). Eſt vero etiam AC =CB (§. 40), & hinc *m*=*n* (§. 184); conſequenter *y*=*u* (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum *u* & *y* menſuræ (§. 57), æquales ſunt (§. 142), & AD=DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LVII.

292. *Si recta* NE *chordam* AB *bifariam ſecet, & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum tranſit, & tam arcum* AEB *quam* ANB *bifariam ſecat.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit *o* = *x* (§. 79). Eſt vero etiam AD=DB, *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB (§. 179); Tab.V. Fig.88. conſequenter arcus cognomines æquales ſunt (§. 289). Eodem modo oſtenditur, arcus AE & EB æquales eſſe. *Quod erat unum.*

Arcus AN=NB, & AE=EB, *per demonſtr.* Ergo NA+AE=NB+BE (§. 88 *Arithm.*); conſequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum tranſit (§. 39). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XXIX.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210): hæc arcum AB bifariam ſecabit (§. 292). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXX.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B *&* C *circulum deſcribere.* Tab.V. Fig.89.

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant interſectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121).

Dico I eſſe centrum circuli per A, C, & B deſcribendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B ſunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad EC perpendicularis; & ED ipſam AC, GH vero

 BC

Tab.V. Fig.89. BC bifariam ſecat (§. 210). Ergo utraque per centrum tranſit (§. 292). Quare, cum DE & GH tantum in I ſe mutuo ſecent (§. 250), erit I centrum circuli per puncta data A, C, & B tranſeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

295. Aſſumtis in peripheria, vel arcu circuli tribus punctis; centrum inveniri, datuſque arcus perfici poteſt.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales ſunt (§. 161).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum eſt circulo inſcriptibile (§. 116).

THEOREMA LVIII.

Tab.V. Fig.87. 298. *In eodem vel æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *a centro* C *æqualiter diſtant: & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG ſunt diſtantiæ chordarum AB & DE a centro C, *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc *o* & *x* recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Porro cum AB=DE, *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis *per demonſtrata*, ipſam AB; CG vero perpendicularis ad DE, *per demonſtrata*, ipſam DE biſecet (§. 291); erit FA=DG (§. 177 *Arithm.*). Quare cum etiam ſit AC=CD (§. 40); erit CF=CG (§. 235). *Quod erat unum.*

Quodſi diſtantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum ſit *o*=*x* *per demonſtr.* & AC=CD (§. 40); erit AF=DG (§. 235). Sed AF=½AB, & DG=½DE (§. 291). Ergo AB=DE (§. 177 *Arithm.*). *Quod erat alterum.* Tab.V. Fig. 87.

THEOREMA LIX.

299. *Chordarum maxima eſt diameter* AB. Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim CO=BC & CN=CA (§. 40). Sed CO+CN > ON (§. 190). Ergo BC+CA, hoc eſt, BA > ON (§. 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

300. *Si intra triangulum* ACB *ſupra ejuſdem baſi* AB *conſtruatur triangulum* ADB; *erunt crura interioris* AD *&* DB *ſimul ſumta minora cruribus exterioris* AC *&* CB *ſimul ſumtis: angulus vero ad verticem interioris* D *major angulo ad verticem exterioris* C. Tab.V. Fig.90.

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC+CE (§. 190); AE+EB < AC+CE+EB (§. 90 *Arithm.*), hoc eſt, AD+DE+EB < AC+CB (§. 86, 89 *Arithm.*). Sed DB < DE+EB (§. 190). Ergo multo magis AD+DB < AC+CB. *Quod erat unum.*

Quoniam *o* > *x*, & *u* > *m* (§. 188); erit *o*+*u* > *x*+*m* (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LXI.

301. *Chorda arcus majoris* AB *major eſt; chorda minoris* AD *minor.* Tab.V. Fig.91.

DEMONSTRATIO.

EB+EC > BC (§. 190), hoc eſt, quia DE+EC=BC (§. 40), EB +EC

Tab.V. Fig.91. +EC > DE+EC (§.89 *Arithm.*); conſequenter EB > DE (§. 92 *Arithm.*). Eſt vero AE+DE > DA (§. 190). Ergo multo magis AE+EB > DA, hoc eſt, AB > DA (§. 86, 89 *Arithm.*). *Q. e d.*

THEOREMA LXII.

Tab. I. Fig. 7. 302. *Secantium* MA, MN, ME *ex eodem puncto* M *ductarum maxima eſt* MA, *quæ per centrum tranſit: reliquæ ſunt tanto minores, quo à centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum* MD, MO, MB *ſunt tanto majores, quo magis a centro diſtant: minima eſt* MB *ſecantis* MA *per centrum tranſentis.*

DEMONSTRATIO.

1. NC+MC > MN (§. 190). Sed NC=CA (§. 40). Ergo MA=CA+CM (§. 86 *Arithm.*) = NC+CM (§. 88 *Arithm.*) > MN (§. 89 *Arithm.*) *Quod erat primum.*

2. MO+EO > ME (§. 190). Sed ON > EO (§. 301). Ergo multo magis MO+ON, hoc eſt, MN (§. 86 *Arithm.*) > ME. *Quod erat ſecundum.*

3. CO+OM > MC (§. 190). Sed CO=CB (§. 40). Ergo OM > MB (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. CD+DM > CO+OM (§. 300). Sed CD=CO (§. 40). Ergo DM > OM (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIII.

Tab.V. Fig.92. 303. *Si ex puncto* E *intra circulum aſſumto ducantur in peripheriam rectæ* EF, EB, EG, *&c. item* EA, ED, EH *&c. maxima erit* EF, *quæ per centrum* C *tranſit: reliquæ* EB, EG *&c. tanto majores, quo maximæ propiores. Contra minima eſt* EA, *quæ continuata per centrum tranſit: reliquæ* ED, EH *&c. ſunt tanto majores, quo ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1. EC+BC > EB (§.190). Sed BC=CF (§. 40). Ergo EC+BC=EC+CF (§ 88 *Arithm.*) hoc eſt, EF (§. 86 *Arithm.*) > EB (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. EI+GI > GE, & IB+IC > BC (§. 190), hoc eſt, ob BC=GI+IC (§. 40), IB+IC > GI+IC (§. 89 *Arithm.*), adeoque IB > GI (§. 92 *Arithm.*). Quare EI+IB > EI+GI (§. 90 *Arithm.*); adeoque EI+IB, hoc eſt, EB (§. 86 *Arithm.*) > GE. *Quod erat alterum.*

3. CE+ED > CD (§. 190), Sed CD=CE+EA (§. 40). Ergo CE+ED > CE+EA (§. 89 *Arithm.*); conſequenter ED > EA (§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. EK+KD > ED, & KH+KC > CH (§. 190), hoc eſt, ob CH=CK+KD (§. 40), KH+KC > KC+KD (§. 98 *Arithm.*), adeoque KH > KD (§. 92 *Arithm.*). Quare EK+KH > EK+KD (§. 90 *Arithm.*); adeoque EK+KH, hoc eſt, EH (§. 86 *Arithm.*), > ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIV.

304. *Recta* IL *radio* CL *perpendicu-*

Tab. I. Fig. 3. *lariter inſiſtens tangit circulum in unico puncto* L : *nec inter tangentem* HL & *circulum alia recta duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL, *per hypoth.* adeoque L eſt rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK > CL (§. 220); conſequenter quodlibet punctum K a L diverſum, hoc eſt tota linea LI, ſeu HI, extra circulum cadit (§. 40); & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, ſi fieri poteſt, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), adeoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypotheſi repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum tranſiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, eſt quovis rectilineo minor: angulus vero ſemicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, eſt quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* EUCLIDIS *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt de eo controverſia inter* Jacobum PELETARIUM Cenomani *in Gallia Matheſeos Profeſſorem,* & Chriſtophorum CLAVIUM *Jeſuitam* Bambergenſem: *quorum (a) hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea eſt ſuperficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum ſuſtulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem* De angulo contactus & ſemicirculi *Tractatum, An.* 1656, *conſcripſit* WALLISIUS, *qui legitur Operum Vol. II. f.* 605 *& ſeqq. ubi, cum* PELETARIO, *angulum contactus omni aſſignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis eſſe defendit.*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & ſeqq. Tom. I. Oper.

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L nonniſi unica recta HI tangere poteſt. Tab. I. Fig. 3.

PROBLEMA LXV.

308. *Omnis recta* HI *circulum tangens radio* CL *ad punctum contactus ducto perpendicularis eſt.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non eſſe ipſi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216); hæcque, utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47); conſequenter CK > CN (§. 84 *Arithm.*) > CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arithm.*). Eſt vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum ſit abſurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

311. *Ducere rectam* HI *circulum in dato puncto* L *tangentem.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 3. 1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.

2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVI.

Tab. V. Fig. 91. 312. *Arcus* FG *&* HI *inter chordas parallelas intercepti ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH & GI *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF — KG = KH — KI, hoc eſt, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVII.

Tab. I. Fig. 13. 313. *Angulus ad centrum* ACD *eſt duplus anguli ad peripheriam* ABD, *eidem arcui* AD *inſiſtentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipſi BD parallela (§. 258); erit EB = DF (§. 312); adeoque $o = x$ (§. 142). Sed $o = y$ (§. 156). Ergo $x = y$ (§. 87 *Arithm.*) $= \frac{1}{2}$ACD. Porro $o = u$ (§. 233). Ergo $u = y = \frac{1}{2}$ACD (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Tab. V. Fig. 93. II. In caſu altero, $o = 2y$, & $u = 2x$, *per caſ.* 1. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 88 *Arithm.*), hoc eſt, ABD $= \frac{1}{2}$ACD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat ſecundum.*

Fig. 94. III. In caſu tertio, $o + u = 2y + 2x$, *per caſ.* 1. & $o = 2y$, *per caſ.* 1. Ergo $u = 2x$ (§. 91 *Arithm.*), hoc eſt, $\frac{1}{2}$ACD = ABD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LXVIII.

314. *Anguli ad peripheriam* ABD *menſura eſt arcus dimidius* AD, *cui inſiſtit.* Tab. I. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore ſegmento: inſiſtet ergo arcui minori AD quam ſemicirculo (§. 70, 56); adeoque ipſi reſpondet angulus ad centrum ACD (§. 72, 135). Sed anguli ACD menſura eſt arcus AD (§. 73). Ergo ipſius ABD menſura dimidius arcus AD (§. 313, 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in ſemicirculo. Tab. V. Ducatur utcunque recta CD: erit ar- Fig. 95. cus dimidius AD menſura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB menſura ipſius DCB, *per caſ.* 1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB menſura anguli ACB. *Quod erat ſecundum.*

III. Sit denique HIK angulus in mi- Tab. V. nore ſegmento. Ducatur utcunque Fig. 96. recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL menſura anguli HIL, & $\frac{1}{2}$ LK menſura anguli LIK, *per caſ.* 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK menſura anguli HIK. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus inſiſtentes, æquales ſunt (§. 142). Tab. I. Fig. 14.

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro ſit $o = x + u$ (§. 239); erit anguli extra centrum menſura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipſe & ejus verticalis K inſiſtunt (§. 314).

COROL-

Corollarium III.

Tab.V. Fig.95. 317. Cum angulus in ſemicirculo ACB ſemicirculo inſiſtat, *per hypoth.* menſura ejus eſt circuli quadrans (§. 314), adeoque ipſe rectus eſt (§. 143).

Corollarium IV.

Tab.V. Fig.96. 318. Cum angulus in majore ſegmento DIF arcui DF, minori quam eſt ſemicirculus, inſiſtat (§. 70); menſura ejus eſt ſemiquadrante minor (§. 314); adeoque ipſe recto minor (§. 143); conſequenter acutus §. *66*).

Corollarium V.

319. Non abſimili ratione liquet, angulum in minore ſegmento HIK eſſe obtuſum.

Corollarium VI.

Tab. VI. Fig.97. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239), & anguli o menſura eſt $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam G menſura eſt differentia inter dimidium arcum concavum LM cui inſiſtit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

Problema XXXII.

Tab. VI. Fig.98. 321. *Normam examinare, utrum exacta ſit, nec ne.*

Resolutio.

1. Deſcribatur intervallo arbitrario ſemicirculus AEF, &
2. Ducantur in eo, ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario aſſumtum, rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex ſuper E cadat. Hoc enim ſi fieri poteſt, erit norma exacta.

Demonstratio.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis eſt angulo AEF (§. 167), adeoque rectus (§. 317), conſequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

Theorema LXIX.

322. *Menſura anguli minoris ſegmenti* ATB *eſt dimidium arcus* TDB; *anguli vero majoris ſegmenti* BTH *dimidium arcus majoris* BGT. Tab. VI. Fig.99.

Demonstratio.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus menſura ſit arcus dimidius EBT (§. 135, 143), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB menſura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius ſemicirculus EGT ſit menſura anguli ETH (§. 135, 143), & dimidius arcus EB menſura anguli BTE (§. 314), eſſe dimidium arcum BGT menſuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

Corollarium I.

323. Cum anguli G menſura etiam ſit dimidius arcus BDT, ipſius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore ſegmento G æqualis eſt angulo minoris ſegmenti ATB, & angulus in minore ſegmento D æqualis eſt angulo majoris ſegmenti BTH (§. 142).

Corollarium II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF menſura ſemiſumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus ſubtenſorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus menſura dimidius arcus TG (§. 322). Eſt vero anguli ATB menſura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare ſemiſumma eorundem arcuum eſt menſura anguli BTF.

Corol-

COROLLARIUM III.

Tab. VI. *Fig.* 100. 325. Si LM & MN ſint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL menſura arcus dimidius LN (§. 322); conſequenter anguli ipſi ſunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N menſura eſt ſemicirculus (§. 240, 243), angulorum vero L & N junctim ſumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti menſura differentia arcus intercepti LN a ſemicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

Tab. VI. *Fig.* 101. 327. *Inter duas lineas* AB *&* BE *mediam proportionalem* BD *invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C, intervallo ipſius AC, deſcribatur ſemicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico eſſe AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per conſtruct.* *m* & *n* ſunt anguli recti (§. 78). Sed $o+x$ eſt itidem rectus (§. 317) & *y* utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o = z$ (§. 246); conſequenter $y = x$ (§. *cit.*); & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

328. Cum ſit AB : BD = BD : BE; ex data ſagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. AB = 80''', BD = 300'''; erit BE = 1125''', adeoque AB + BE = AE = 1205''' ſeu fere 12'. Tab. VI. *Fig.* 101.

COROLLARIUM II.

329. Ex demonſtratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB, ex angulo recto D in hypothenuſam AE demiſſam, reſolvi in duo triangula ABD & BDE inter ſe & toti ADE ſimilia (§. 267).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam ſit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); ſi lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factiſque reliquis, ut in reſolutione Problematis, erit AD media proportionalis quæſita.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB ſit unitas, erit BD radix ipſius BE, aut AD ipſius AE (§. 247 *Arithm.*)

THEOREMA LXX.

332. *Si duæ chordæ* HM *&* LI *ſe mutuo ſecent in* K; *erit* HK : LK = KI : KM. Tab. I. *Fig.* 14.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315): ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

333. *Si fuerint duæ ſecantes* GL *&* GM *ex eodem puncto* G *ductæ*; *erit* GM : GL = GN : GO. Tab. VI. *Fig.* 97.

DEMONSTRATIO.

Angulus *x* eſt utrique triangulo GNO & GML communis. Anguli GNO menſura eſt ſemiſumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli GML menſura eſt ſemiſumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142); conſequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

Theorema LXXII.

Tab. VI. Fig. 102. 334. *Si ex eodem puncto* A *ducantur duæ rectæ* AD *&* AB, *quarum altera circulum tangit, altera ſecat; erit tangens* AD *media proportionalis inter totam ſecantem* AB *& ejus portionem* AC *extra circulum.*

Demonstratio.

Angulus A eſt utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales ſunt (§. 323). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 267). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 102.

Caput V.

De Figurarum deſcriptione.

Theorema LXXIII.

Tab. VI. Fig. 103. 335. *In parallelogrammis latera oppoſita ſunt æqualia: & ſi in figura quadrilatera latera oppoſita fuerint æqualia, erint eadem parallelogrammum.*

Demonstratio.

Quoniam OPQN parallelogrammum, *per hypoth.* erit OP parallela ipſi NQ & ON parallela ipſi PQ (§. 102); conſequenter, ducta diagonali PN, erit $x = o$ & $n = m$ (§. 233); adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodſi OP = NQ & ON = PQ, *per hypoth.* cum etiam ſit NP = NP; erit $x = o$ & $n = m$ (§. 204); conſequenter OP ipſi QN, & ON ipſi PQ parallela (§. 255); adeoque OPQN parallelogrammum (§. 102). *Quod erat alterum.*

Corollarium.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo, & Rhomboide latera oppoſita æqualia ſint (§. 98, 99, 100, 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus, & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

Theorema LXXIV.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales: anguli in iis diagonaliter oppoſiti ſunt æquales: anguli vero ad idem latus oppoſiti duobus rectis æquantur: & duo latera ſimul ſumta ſunt diagonali majora.*

Demonstratio.

In Parallelogrammis ON = PQ & PO = QN (§. 335). Sed PN = PN. Ergo △ NOP = △ NQP (§. 204). *Quod erat unum.* Tab. VI. Fig. 103.

Quoniam in parallelogrammis OP ipſi NQ & ON ipſi PQ parallela (§. 103): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O ſimul ſumti æquantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat ſecundum.*

Quoniam angulus O + N = N + Q, *per demonſtrata*; erit O = Q (§. 91 *Arithm.*). Similiter quoniam Q + P = Q + N, *per demonſtrata*; erit P = N (§. 91 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP, & PQ + QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

Pro-

PROBLEMA XXXIV.

Tab. VI. *Fig.* 104. 338. *Super data recta* CD *Quadratum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A, intervallo ipſius CD, fiat interſectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per conſtr.* Ducta ergo diagonali AD, patet eſſe C = B (§. 204). Sed C rectus eſt *per conſtr.* Ergo B etiam rectus (§. 145); conſequenter o & x, item y & m ſemirecti (§. 241), adeoque $o+y$ & $x+m$ itidem recti. Quare figura eſt Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipſi CD æquales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim CA = DB = CD, *per conſtr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD, *per conſtr.* anguli ad D & C ſunt recti (§. 78); adeoque BA parallela ipſi DC (§. 226); conſequenter anguli A & B ſunt recti (§. 233); & ob parallelas AC & BC (§. 256) AB = CD (§. 238). Eſt igitur ABCD Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Datis duabus rectis* MI *&* IK, *Rectangulum parallelogrammum, ſeu Oblongum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249). Tab. VI. *Fig.* 105.
2. Ex M, intervallo ML = IK, deſcribatur arcus; & ex K, intervallo KL = IM, alius priorem interſecans in L (§. 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL, & ML = IK, *per conſtr.* Eſt ergo MIKL parallelogrammum (§. 335); conſequenter I = L, & I+M, ac I+K, = duobus rectis (§. 337). Sed I eſt rectus, *per conſtr.* Ergo & L (§. 145); itemque M & K recti ſunt. Eſt ergo figura conſtructa Oblongum (§. 100). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

340. *Data recta* GH, *una cum angulo obliquo* G, *Rhombum conſtruere.* Tab. VI. *Fig.* 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH conſtituatur in G angulus dato æqualis (§. 208).
2. Fiat GE = GH, & reliqua peragantur ut in Probl. 34 (§. 338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per conſtruct.* Eſt ergo EFHG parallelogrammum (§. 335); conſequenter G = F & G+H ac G+E = duobus rectis (§. 337). Sed G eſt angulus obliquus *ex hypotheſi:* Ergo & F; conſequenter etiam E & H ſunt obliqui. Adeoque figura conſtructa Rhombus eſt (§. 99). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 103. 341. *Datis duabus rectis* ON *&* OP, *una cum angulo intercipiendo* O, *Rhomboidem conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP ſub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in Probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ Problematis præcedentis.

THEOREMA LXXV.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales, ducanturque ſubtenſæ* AB, BC, CD, *&c. figura circulo inſcripta regularis eſt.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. ſint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales ſunt (§. 289); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. inſiſtant, ipſi quoque æquales ſunt (§. 315). Figura igitur circulo inſcripta regularis eſt (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire ſummam omnium angulorum in quocunque Polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto ſubtrahantur 360°: reſiduum eſt ſumma quæſita.

Ex. gr. Pentag. 180 Hexag. 180

Pentag.	Hexag.
180	180
5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 108. Quælibet figura, ex aſſumto in ea puncto F, in tot triangula AFB, BFC, CFD, &c. reſolvitur, quot habet latera AB, BC, CD, &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit ſumma omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos Polygoni, ſemper efficiunt 360° (§. 159). Quodſi ergo a facto ſupra invento ſubtrahantur 360°, ſumma angulorum Polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 111. Cum numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ reſolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA conſtanter binario differat; ſi 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit ſumma omnium angulorum A, B, C, D, & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

pro Pentag.	pro Hexag.
180	180
3	4
540	720

COROLLARIUM I.

344. Quodſi ſumma inventa per numerum laterum dividatur; quotus eſt angulus Polygoni regularis (§. 106).

SCHOLION.

345. *En tibi Tabulam, in qua ſumma angulorum in figuris rectilineis quibuſcunque, & quantitas unius in regularibus, a Trigono uſque ad Dodecagonum exhibetur* (§. 343). *Conſtruitur columna ſecunda continua additione* 180; *tertia vero numeris in columna ſecunda per numerum angulorum ſive laterum,*

terum diviſis (§. 344). *Utimur hac Tabula tum in figuris regularibus deſcribendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum ſcilicet Inſtrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim eſſe intelligimus, ubi eorum ſumma minor vel major deprehenditur ea, quæ in Tabula definitur: ex. gr. ſi in Heptagono ſuperet* 900.

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM II.

Tab. VI. *Fig.* 108. 346. Si latera figuræ polygonæ cujuſcunque continuentur, anguli externi, 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera (§. 147). Sed interni ſoli efficiunt bis tot rectos quot ſunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni caſu conficiunt 4 rectos ſeu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

Tab. VI. *Fig.* 107. 347. *Dato Polygono regulari cuicunque* ABCDE *circulum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209), ob angulos FED & FDE duobus rectis minores, concurſuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concurſus F deſcribatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* ſunt angulorum Polygoni dimidii, *per conſtruct.* erit $o = u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arithm.*); conſequenter EF = FD (§. 253). Circulus adeo tranſiens per E tranſit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$, *per conſtr.* ED = EA (§. 106), & EF = EF; erit AF = FD (§. 179). Ergo circulus tranſiens per D & E tranſit etiam per A (§. 40). Porro quia AF = EF *per demonſtr.* erit $m = x$ (§. 184). Sed *x* dimidius angulus Polygoni, *per conſtr.* Ergo & *m* (§. 87 *Arithm.*); conſequenter etiam *y*. Quare ſi ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB = FE, adeoque radius circuli. Eodem modo oſtenditur FC, & ſi quæ plures fuerint rectæ iſtiuſmodi, eſſe radios circuli, adeoque circulum tranſire per omnes angulos Polygoni, hoc eſt, eidem circumſcribi (§. 116). *Q. e. d.* Tab. VI. *Fig.* 107.

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis eſt circulo inſcriptibilis (§. 216).

PROBLEMA XL.

349. *Invenire angulum in dato Polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur Polygonum regulare ABCDE circulo inſcriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE eſt menſura anguli quæſiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipſius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum diviſa (§. 289); angulus Polygoni A relinquitur, ſi arcum AB a ſemicirculo ſubtraxeris. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Quæratur angulus Pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 eſt arcus AB, qui ex 180 ſubductus relinquit 108 angulum Pentagoni quæſitum.

THEOREMA LXXVI.

Tab. VI. Fig. 109. 350. *Quadrilateri circulo inſcripti* GHIK *anguli bini oppoſiti* H & K, *item* G & I *conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Inſiſtunt enim junctim ſumti integro circulo; ex. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56); adeoque ipſorum menſura eſt ſemicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. * 351. *Circulo Quadratum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE ſe mutuo in centro C ad angulos rectos ſecantes (§. 210).
2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant interſectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.

Erit FGHI Quadratum circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D ſunt recti (§. 338); adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§ 338), & FG = GH = HI = FI = 2 AC, *per conſtr.* Ergo FGIH eſt Quadratum (§. 98) idque circulo circumſcriptum (§. 117). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352. *Super data recta* ED *Polygonum regulare quodcunque deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulis Polygoni (§. 344, 349). Tab. VI. Fig. 107.
2. Fiat in E ipſi æqualis (§. 155), & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D deſcribatur circuli peripheria (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri poteſt.

Ita deſcribetur figura quæſita (§. 342, 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo Polygoni ſigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF ſe mutuo ſecabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro, radio EF, deſcribatur circulus, qui erit circulus Polygono circumſcriptus (§. 347).
3. Reliqua abſolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato Polygonum regulare quodcunque inſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innoteſcat quantitas anguli EFD (§. 59). Tab. VI. Fig. 107.
2. Conſtruatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri poteſt.

Ita figura regularis erit circulo inſcripta (§. 342, 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. *Reſolutio Problematis præſentis & præcedentis mechanica quidem eſt, cum ad conſtructionem Inſtrumento transportatorio utamur (§. 155): non tamen ideo contemnenda,*

nenda; tum quia univerſalis & facilis, tum quia conſtructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni conſtructionem tradunt Euclides *(a) &* Ptolemæus *(b): de qua in Analyſi. Equidem & Heptagoni, Enneagoni & Hendecagoni conſtructiones geometricæ paſſim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt: ſed a rigore demonſtrationum abhorrent.* Joh. Carolus Renaldinus *(c) omnium Polygonorum deſcribendorum regulam catholicam præſcribit, paſſim Geometriis practicis inſertam: ſed quantum fallat, Cl.* Wagnerus, Mathemat. in Academia Helmſtad. Profeſſor *oſtendit (d), & nos inferius in Analyſi oſtendemus.*

Problema XLIV.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumſcribere.*

Resolutio.

Tab. VI. *Fig.* 107.

1. Inſcribatur figura regularis ſimilis circulo dato, v. gr. Pentagonum ABCDE, ſi Pentagonum *abcde* circumſcribendum (§. 353).
2. Chorda AB bifariam ſecetur in H per rectam F*h* ad eandem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *h* ſecat.
3. Per A & B producantur radii FA & FB.
4. Per *h* ducatur ipſi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum Polygoni circumſcripti.
5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e*=F*d*=F*c*=F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *abcde* Polygonum circulo circumſcriptum. *Q. e. f.* Tab. VI. *Fig.* 107.

Demonstratio.

Quoniam *ab* parallela ipſi AB, *per conſtruct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem, *per conſtruct.* FHA rectus eſt (§. 78). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145); conſequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78, 304). Eſt vero etiam angulus F*ab*=FAB (§. 233); adeoque dimidius angulus Polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE, *per conſtruct.* & FA = FE = FB (§. 40); erit angulus *b*F*a* = *a*Fe (§. 204). Quare, cum etiam ſit F*a* = Fe *per conſtruct.* &, ob F*ab* = F*ba per demonſtrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*hb* commune, F*b* = F*a* (§. 252); erit *ae* = *ab* & F*ae* = F*ab* (§. 179); conſequenter *a* angulus Polygoni, ex. gr. in noſtro caſu Pentagoni. Eodem modo oſtenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* eſſe angulos Polygoni circumſcribendi, & *ed*=*dc*=*cb* =*ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonſtratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216); erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro F*ah*=F*ag*, *per demonſtrata*, & F*a* = F*a*; erit F*h* = F*g* (§. 252). Quare cum F*h* ſit radius circuli *per conſtruct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit

(a) *Elem.* IV. Prop. 11. 16. & *Elem.* XIII. Prop. 10.

(b) *Almag.* Lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. *Joannes* Regiomontanus in *Epitome* hujus *Almag.* Lib. 1. prop. 1.

(c) Lib. 2. *De Reſolut. & compoſit. Mathem.* f. 367.

(d) In peculiari Diſſertatione *Helmſtadii* 1700 habita.

tangit

Tab. VI. Fig. 107. tangit (*§. 304*). Idem eodem modo oſtenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo eſt circumſcriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

Tab. VI. Fig. 110. 356. *Latus Hexagoni* AB *æquatur radio circuli circumſcripti* AC.

DEMONSTRATIO.

Angulus C = 60° (§. 57). Ergo A+B = 120° (*§. 245*); conſequenter, ob AC = BC (§. 40), A = B = 60° (§. 184). Quare △ ACB æquilaterum (*§. 254*); conſequenter AB = AC (§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo inſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſexies applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si ſuper linea data AB Hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ACB conſtruitur (§. 198): eſt enim vertex C centrum circuli Hexagono quæſito circumſcribendi (*§. 356*).

PROBLEMA XLV.

Tab. VI. Fig. 111. 359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuſcunque, & tot diagonalibus quot ſunt latera demtis tribus; figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE reſolvatur, quot ſunt latera demtis tribus; non alia re opus eſt, quam ut unum triangulum ſuper altero excitetur (§. 205).

PROBLEMA XLVI.

360. *Datis omnibus lateribus figuræ, & tot angulis quot ſunt latera demtis tribus; figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis. Tab. VI. Fig. 112.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155); & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155); & determinetur latus DC, &c.
4. Tandem ex E & D fiat interſectio in F, intervallo laterum EF & DF.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur, eritque æqualis quæſitæ (§. 161, 177).

Eodem modo conſtrui poſſunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non eſt.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut ſe exerceant in figuris irregularibus deſcribendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus, aſſumere debent. Quodſi contingat figuram non terminari, id indicio erit, caſum eſſe impoſſibilem; adeoque vel in angulorum, vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

PROBLEMA XLVII.

363. *Areæ cujuſdam campeſtris rectilineæ* abcde *libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc eſt, figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.* Tab. VI. Fig. 111.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VI. *Fig.* 111. 1. Inveſtigetur longitudo ſingulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126).

2. Conſtruatur figura ABCDEA (§. 359) juxta Scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico figuram ABCDE eſſe figuræ campi *abcde* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim AB : BC = *ab* : *bc*, BC:CD = *bc* : *cd*, CD : DE = *cd* : *de*, &c. Etenim ex. gr. *ab*, 6, & *bc*, 7 pedum in campo exiſtentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta, *per conſtr.* Quare cum porro ſit AC : AB = *ac* : *ab*, AC : AD = *ac* : *ad*, AD : AE = *ad* : *ae*, &c. *per conſtr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207); conſequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE eſt figuræ campi *abcde* ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 113. 1. Poſita menſula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in ſingulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

2. Inveſtigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126), &

3. Exinde juxta Scalam modicam (§. 279) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* eſſe ſimilem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. *Fig.* 113. Quoniam in △△ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab* : *ac* = *a*B : *a*C *per conſtr.* erit angulus *abc* = *a*BC & *acb* = *a*CB, nec non *ab* : *bc* = AB : BC & *ac* : *bc* = AC : BC (§. 183). Similiter quoniam in △△ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac* : *ad* = *a*C : *a*D, atque in △△ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & *ad* : *ae* = *a*D : *a*E *per conſtruct.* erit angulus *acd* = *a*CD & *adc* = *a*DC, nec non *ac* : *cd* = *a*C : *c*D & *ad* : *cd* = *a*D : *c*D, itemque angulus *ade* = *a*DE & *aed* = *a*ED, nec non *ad* : *de* = *a*D : DE & *ae* : *ed* = *a*E : ED (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, *acb* + *acd* = *a*CB + *a*CD, hoc eſt, $c = C$, *adc* + *ade* = *a*DC + *a*DE, hoc eſt, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonſtrata*; figuræ *abcde* & *a*BCDE inter ſe æquiangulæ ſunt (§. 109). Porro cum ſit *ac* : *bc* = *a*C : BC & *ac* : *cd* = *a*C : CD *per demonſtr.* erit etiam *bc* : *cd* = BC : CD (§. 196 *Arithm.*) & cum ſit *ad* : *dc* = *a*D : DC & *ad* : *de* = *a*D : DE *per demonſtr.* erit denuo *dc* : *de* = DC : DE. Quamobrem, cum quoque ſit *ab* : *bc* = *a*B : BC & *ae* : *ed* = *a*E : ED, *per demonſtrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia ſunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE ſimiles (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 114. 1. Menſula intra figuram poſita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E defi-

Tab. VI. *Fig.* 114. deſixos, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.

2. Inveſtigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§. 126).
3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc*, &c. juxta Scalam modicam (§. 279).
4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd*, &c.

Dico *abcdeg* eſſe figuræ ABCDEG ſimilem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f*AB communis, eſtque *fa* : *fb* = *f*A : *f*B, *per conſtr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales ſunt, atque *fa* : *ab* = *f*A : AB (§. 183). Eodem modo oſtenditur eſſe in △△ *fga* & *f*GA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa* : *ag* = *f*A : AG, conſequenter *ab* : *ag* = AB : AG (§. 196 *Arithm.*) & angulus *bag* = BAG (§. 86 *Arithm.*). Quare, cum eadem ratione demonſtretur eſſe *g* = G, *e* = E, *d* = D, *c* = C, *b* = B, & *ag* : *ge* = AG : GE, *ge* : *ed* = GE : ED, *ed* : *dc* = ED : DC, *dc* : *cb* = DC : CB & *cb* : *ba* = CB : BA, figura *abcdeg* eſt majori ABCDEG ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 111.

1. Collocato Inſtrumento goniometrico in *a*, inveſtigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 126).
2. Conſtruantur juxta Scalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§. 180).

Dico ABCDE eſſe ſimilem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum ſecunda Problematis præſentis.

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 114.

1. Collocato Inſtrumento goniometrico in *f*, inveſtigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152), & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126).
2. Conſtruantur, ut ante, juxta Scalam modicam △△ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

Dico *abcdeg* eſſe ſimilem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Problematis præſentis.

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 111.

1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus diviſa & quæ in cardine Meridiei ac Septentrionis dioptris inſtructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipſi *a* immineat, & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipſi *ab* imminente verſus ortum vel occaſum.
2. Pyxidis dioptræ convertantur ſucceſſive ad baculos in *c*, *d*, & *e* defixos, notenturque, ut ante, in ſingulis caſibus anguli declinationis.
3. Inveſtigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126).
4. Ducatur in charta recta LM & aſſumto in ea puncto A applicetur centrum Inſtrumenti tranſportatorii &

Tab. VI. *Fig.* 111. & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per Scalam modicam determinetur longitudo ipſarum AB, AC, AD, AE, (§. 279).

Dico figuram ABCDE eſſe alteri *abcde* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica ſemper eidem lineæ reſpondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile eſt, etſi diverſis in pyxide ſucceſſive immineat. Lineam iſtam deſignet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo deſcriptus eſt circulus. Quodſi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In Inſtrumento tranſportatorio initium numerandi fit in *f*, & ſi arcus *fg* declinationi in campo obſervatæ æqualis aſſumitur, angulus *i* idem erit, qui ante, ſituſque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipſius AB a linea meridiana, quam monſtrat acus, ſive numerandi principium in *f*, ſive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare ſitum rectarum AC, AD, AE reſpectu lineæ LM; conſequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His ſuppoſitis reliqua demonſtrantur ut ſupra in Demonſtratione ſecunda.

Aliter.

Quodſi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit inſtructa, ſed lignea regula *fg* ita affixa, ut linea meridiana ejuſdem *bd*, tranſiens per centrum pyxidis *c*, ſit eidem parallela: Tab. XI. *Fig.* 174.

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur; quo facto, AB erit ipſi *bd* parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuſpis *a*: dico eſſe angulum *bca* ipſi BAL æqualem, ſi ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo, ſi regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta *ae* deſignet ſitum acus, *bd* autem ipſi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *acb* ipſi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonſtrari debet, angulum *acb* eſſe ipſi BAL, & in altero ſitu pyxidis ipſi EAL æqualem. Quoniam ex reſolutione patet, *bd* eſſe ipſi BA parallelam, erit angulus IHA ipſi *ecd* (§. 233), conſequenter ejus verticali *bca* æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum ſit ML ipſi I*a* parallela, *per conſtruct.* erunt alterni IHA & HAL æquales (§. 233); conſequenter HAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter, ſi pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum ſit *bd* ipſi EA parallela, *vi ſolutionis*; erit NKA = *ecd* (§. 233). Quare cum porro ſit *bca* = *ecd* (§. 156); erit NKA = *bca* (§.

Tab. XI. Fig. 174. (§. 87 *Arithm.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota ſitum obtinet priori, quem habuerat, parallelum, eſtque adeo N*a* ipſi l*a* parallela; ML vero parallela ipſi l*a*, *per conſtruct.* erit etiam ML ipſi N*a* parallela (§. 232); conſequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 115.

1. Charta ſuper menſula expanſa, ex centro *o* deſcribatur circulus.
2. In eodem defigatur ſtylus, cui inſeratur regula cum dioptris.
3. Collineetur in ſingulos areæ angulos A, B, C, &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter oppoſita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.
4. Inveſtigetur longitudo rectarum *o*A, *o*B, *o*C &c. (§. 126).

Tab. VII. Fig. 116.

5. Charta, a menſula remota, alteri mundæ coextendatur in tabula, & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipſi parallela AA commode duci poſſit (§. 258).
6. Idem Parallelismus applicetur ad *bb* & eo uſque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipſi *aa* parallelam in puncto commodo O interſecet.
7. Applicetur porro ſucceſſive ad rectas *cc*, *dd*, *ee*, quæ confuſionis evitandæ gratia in Schemate non omnes ſunt expreſſæ, & aperiatur uſque ad punctum interſectionis O ipſis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ CC, &c.
8. Tandem ex puncto interſectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipſis *o*A, *o*B, *o* C, &c. reſpondentium juxta Scalam modicam (§. 279). Ita enim ut ſupra Ichnographiam abſolvere licebit. Tab. VII. Fig. 116.

Demonstratio.

Coincidit cum tertia Probl. præſ. modo demonſtretur, ſi plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. ſe interſecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. ſe itidem in O interſecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipſi *aa* occurrat in *f*; continuentur etiam CC & *cc*, donec ipſis *bb* & AA occurrant in *g* & *k*. Erit, ob parallelas *aa* & AA, $m = f$, &, ob parallelas *bb* & BB, $y = f$ (§. 233); adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter, ob parallelas *bb* & BB, $n = g$, &, ob parallelas *cc* & CC, $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item, ob parallelas *aa* & AA, $z = k$, &, ob parallelas *cc* & CC, $l = k$ (§. 233), adeoque $l = z$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Scholion I.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo ſufficiat. Si enim campus in plures reſolutus fuerit partes, littera initialis in ſingulis nota quadam numerica notanda &, ubi unum alphabetum fuerit abſolutum, aliud litteris aliis uſurpandum.*

Scho-

SCHOLION II.

Tab. VII. Fig. 115. 365. *Etiam ſine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, ſi puncta* a & a, *item* b, c, d &c. *ſubtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo incluſus trajiciatur. Puncta enim* a & a *dabunt rectam, qua bifariam diviſa determinatur centrum* O: *reliqua puncta* b, c, d &c. *ſitum angulorum figuræ reſpectu hujus centri determinant.*

SCHOLION III.

366. *Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri ſolet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne ſuperet, ne ſphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præſtat major minore, ut angulus, quo in uſu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innoteſcat. Communiter utuntur acu duorum vel ad ſummum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari ſufficit: affricanda autem eſt pars acus, quæ ſeptentrionem reſpicere debet, polo auſtrali, nec ductu contrario deſtruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemiſpherio ſeptentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis poſt contactum magnetis ponderoſior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet auſtrali. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; ſtylus, cui capitellum acus ex ære, cupro, vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam ſtyli apicem chalybeum faciunt.*

PROBLEMA XLVIII.

Tab. VII. Fig. 117. 367. *Ichnographiam areæ* ABCDE *ex duabus ſtationibus* A & B *perficere.*

RESOLUTIO.

1. Poſita menſula in A, collineatio fiat in ſingulos areæ angulos B, C, D, & E; ducanturque rectæ verſus eos ex *a*.
2. Quæratur diſtantia ſtationum AB (§. 126), & in menſulam ex Scala geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Menſula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea deſignatum ipſi B reſpondeat, & regula ad lineam *ba* applicata, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in ſingulos rurſus figuræ angulos collineatio fiat, & verſus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c*, interſecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico, Ichnographiam eſſe abſolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC = *abc*, & CAB = *cab*, *per conſtr.* erit AB : BC = *ab* : *bc*, & AB : AC = *ab* : *ac* (§. 267). Similiter 2°. quia EAB : *eab*, & EBA = *eba*, *per conſtr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA : AB = *ea* : *ab* & EB : AB = *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum ſit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA : AB = *da* : *ab* & DB : AB = *db* : *ab* (§. *cit.*). 4°. DBC = *dbc*, *per conſtr.* &, quoniam DB : AB = *db* : *ab* (*per num.* 3), atque AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1); DB : BC = *db* : *bc* (§. 194 *Arithm.*). Ergo CDB = *cdb*, atque BCD = *bcd*, & BC : CD = *bc* : *cd*, nec non BD : CD = *bd* : *cd* (§. 183). 5°. DB : BC = *db* : *bc* (*per demonſtra-*

Tab. VII. Fig. 117.

ta n. 4.) & AB : BC = *ab : bc (per num.* 1). Ergo DB : AB = *db : ab* (§. 195 *Arithm.*). Eſt vero etiam EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2). Ergo DB : EB = *db : eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam ſit DBE = *dbe* , *per conſtruct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB : DE = *db : de* & DE : EB = *de : eb* (§. 183). 6°. BD : CD = *bd : cd* (*per num.* 4) & DB : DE = *db : de* (*per num.* 5). Ergo CD : DE = *cd : de* (§. 196 *Arithm.*). 7°. EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2) & DE : EB = *de : eb* (*per num.* 5). Ergo DE : AB = *de : ab* (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro ſit EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2) erit DE : EA = *de : ea* (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb* (*per num.* 4) & BDE = *bde* (*per num.* 5); erit CDE = *cde* (§. 88 *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb* (*per num.* 2) & DEB = *deb* (*per num.* 5) erit DEA = *dea* (§. 88 *Arithm.*). Cum itaque ſit EAB = *eab*, & ABC = *abc*, *per conſtr.* BCD = *bcd* (*per num.* 4), CDE = *cde* (*per num.* 8), & DEA = *dea* (*per num.* 9); atque præterea AB : BC = *ab : bc* (*per num.* 1), BC : CD = *bc : cd* (*per num.* 4), CD : DE = *cd : de* (*per num.* 6), DE : EA = *de : ea* (*per num.* 7), tandemque EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2); figuræ ABCDE altera *abcde* ſimilis eſt (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A inveſtigetur quantitas angulorum EAD, DAC, & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD, & DBC (§. 152); quæraturque ſtationum diſtantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta *ab* per Scalam modicam diſtantiæ ſtationum AB convenienter determinetur (§. 279).
3. In *a* conſtituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipſis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta interſectionum *b*, *c*, *d*, *e*, *a*, rectis connectantur.

Dico *abcde* eſſe ſimilem areæ ABCDE.

Tab. VII. Fig. 117.

Demonstratio.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ obſerventur, ut in Probl. præc. ex duabus ſtationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE, itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in Probl. præc. determinetur ſitus rectarum *ab*, *ac*, *ad*, &c. ac puncta interſectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit abſoluta.

Demonstratio.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonſtratione penultima Problematis præcedentis dicta ſunt.

Problema XLIX.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

Reso-

RESOLUTIO.

Tab. VII. *Fig.* 117. 1. Menſula in A collocata, collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem deſignari poſſit.

2. Longitudo utriuſque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex Scala minore transferatur in menſulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).

3. Menſula in B transloceṭur, ita ut ipſi B punctum cognomine in eadem reſpondeat, & viſus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,

4. Idem dirigatur per eaſdem in C, quo ſicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in menſula deſignari poſſint.

5. Quodſi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt, *per conſtr.* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126), & quantitas tot angulorum quot ſunt latera demtis tribus (§. 152). His enim datis Ichnographia *per Probl.* 46 (§. 360), vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

Aliter.

1. Notetur in ſingulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ, ut in Probl. 47 (§. 363). Tab. VII. *Fig.* 118. n. 1.

2. Quæratur ſimul longitudo laterum (§. 126).

3. In charta deſignetur linea *ab*, & in eam transferatur ex Scala modica longitudo lateris AB (§. 279). n. 2.

4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejuſdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipſius ſeptentrionale ſeptentrionem reſpiciat, & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.

5. Charta immota, idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per Scalam modicam ipſi AE proportionalem determinare licet.

6. Quodſi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonſtrandum eſt, quam angulum *bae*, ope pyxidis magneticæ in charta ſic deſignatum, eſſe alteri BAE in campo æqualem. Superius uſum pyxidis magneticæ nullis dioptris inſtructæ exponentes demonſtravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejuſdem ſit huic parallela, angulum declinationis

Tab. VII. *Fig.* 118. nis acus eſſe ipſi BAM æqualem, ſi ML ita ducatur, ope pyxidis, ut ejuſdem lineæ meridianæ parallela exiſtat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonſtratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata, eſſe angulum EAL angulo declinationis acus in hoc ſitu æqualem. His jam datis, ſi latus pyxidis lineæ meridianæ ejuſdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente ſitu, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monſtret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter, ſi eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monſtret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*l angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe, rectam KI per *a* ea lege eſſe ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili reſpondeat, centro in *a* collocato. Eſt igitur $1 = I$ & $6 = VI$, *per conſtruct.* Sed $1 + 7 + 6 = 180°$, & $I + VII + VI = 180°$ (§. 147); conſequenter $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 87 *Arithm.*). Quare $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel:

Tab. VII. *Fig.* 118. n. 2.

1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.
2. Inſtrumentum tranſportatorium Parallelismo inſtructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum ſit in *a*, radius vero ipſi *a*K reſpondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria Inſtrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A. Tab. VII. *Fig.* 118.
3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex Scala modica longitudo rectæ AB in campo menſuratæ.
4. Regula Parallelismi ſolitaria unam parallelarum ſtringente, altera cui cohæret Inſtrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipſum *b* attingat & ad gradum declinationis in B obſervatæ deſignetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

$1 = I$, $2 = II$, $3 = III$, $4 = IV$ & $5 = V$, *per conſtr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum Inſtrumenti tranſportatorii refert) ipſi *a*K parallela, *per conſtruct.* acus vero magnetica in B eſt parallela ſitui in A; erit $1 = 8$, & $I = VIII$ (§. 233), conſequenter $8 = VIII$ (§. 87 *Arithm.*). Simili modo oſtenditur eſſe $6 = VI$. Quare cum ſit $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). Porro $2 = II$, *per conſtr.* & $8 = VIII$, *per demonſtr.* Ergo $8 + 2 = VIII + II$ (§. 88 *Arithm.*). Similiter $12 = 2$ & $XII = II$ (§. 233) & $3 = III$, *per conſtr.* Quare cum ſit

ſit 12+9+3=XII+IX+III (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit 9=IX (§. 91 *Arithm.*). Porro 4=IV, *per conſtr.* & hinc, cum ſit 10=3 & X =III (§. 233), adeoque ob 3=III, *per demonſtr.* 10=X (§. 87 *Arithm.*); 4+10=IV+X (§ 88 *Arithm.*). Denique 5=V, *per conſtr.* & 4+11 =IV+XI (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). adeoque ob 4=IV, *per conſtr.* 11=XI (§ 91 *Arithm.*). Quare 5+11=V+XI (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* ſunt æquales ſingulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſint, *per conſtr.* figura *abcde* areæ ABCDE ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figuræ in charta delineatæ ſimilem in campo deſignare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc Problema eſt inverſum alterius, quo Ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur caſus, quot hujus commemoravimus, ſed & ipſius reſolutio ex reſolutionibus Problematum inmediate præcedentium intelligitur. Ex. gr. Si ſemicirculo, vel menſula & pertica utimur: anguli ſinguli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti, &c. in Solo deſignantur *per Probl.* 7 (§. 155), & latera, vel diagonales, &c. per menſuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimenſione ac Diviſione.

PROBLEMA LI.

370. *Invenire aream Quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in ſeipſam.

Factum exprimit aream Quadrati. Sit ex. gr. Latus Quadrati = 345

```
       345
      ----
      1725
     1380
    1035
    ------
erit Area = 119025
```

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati inveſtigans quærit, quot digiti quadrati, hoc eſt, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero eſt, ſi latus Quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & Quadratum ipſum per rectas puncta diviſionum in lateribus oppoſitis connectentes in Quadrata minora diviſum; tot eſſe quadratulorum ſeries, quot partes habet latus AB, & in qualibet ſerie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB, habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, ſi latus in ſeipſum ducatur. *Q. e. d.* Tab. VII. *Fig.* 119.

Corollarium I.

371. Si latus Quadrati fuerit 10, Area erit 100. Cum igitur decempeda ſit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos, &c. continet (§. 118).

Corollarium II.

372. Si latus Quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

Corollarium III.

373. Datus igitur numerus in priori caſu facile in digitos, pedes, & perticas quadratas reſolvitur, ſi ſcilicet a dextra ſiniſtram verſus duæ notæ digitis, duæ pedibus reſecentur: quæ enim ſiniſtram verſus reſiduæ fiunt, perticis cedunt. Ex. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

Corollarium IV.

374. Quadrata ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). Ex. gr. Quadratum lateris dupli eſt quadruplum Quadrati lateris ſimpli. Et Quadrata æqualia ſunt, quorum latera æqualia ſunt.

Problema LII.

Tab. 375. *Invenire aream Rectanguli*
VII. ABCD.
Fig.
120.

Resolutio.

1. Inveſtigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC.

Factum erit area Rectanguli.

Ex. gr. Sit AB = 345
AC = 123
1035
690
345
erit Area = 42435

Demonstratio.

Eadem eſt, quæ Problematis præcedentis.

Corollarium I.

376. Rectangula ſunt in ratione compoſita ſuorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*)

Corollarium II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, Quadratum mediæ Rectangulo extremarum æquale eſt (§. 298 *Arithm.*).

Corollarium III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; Rectangulum ſub extremis æquatur Rectangulo ſub mediis (§. 297 *Arithm.*).

Corollarium IV.

379. Quare ſi ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB ſecat; erit Quadratum tangentis AD Rectangulo ſub ſecante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377). Tab. VI. *Fig.* 102.

Corollarium V.

380. Si duæ vel plures ſecantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt Rectangula ſub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379). Tab. VI. *Fig.* 97.

Corollarium VI.

381. Si duæ chordæ HM & LI ſe mutuo ſecent in K; erunt Rectangula ſub ſegmentis inter ſe æqualia (§. 332 & 378). Tab. I. *Fig.* 14.

Corollarium VII.

382. Cum orgya, qua lignorum ſtrues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per Probl. præc. vel præſ.* inveniri poteſt. Per hanc itaque ſi factum ex longitudine in latitudinem ſtruis dividatur; quotus indicat, quot ipſa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

Theorema LXXVIII.

383. *Duo Parallelogramma* ABDC
&

Tab. VII. *Fig.* 121. *& ECDF ſuper eadem baſi* CD *& inter eaſdem parallelas* AF *&* CD *conſtituta ſunt inter ſe æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD ſunt latera oppoſita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB = CD & EF = CD (§. 335); conſequenter AB = EF (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro AE = BF (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro AC = BD & CE = DF (§. 335); erit △ ACE = △ BDF (§. 204); adeoque ABGC = FEGD (§. 91 *Arithm.*); conſequenter ABDC = EFDC (§. 88 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD ſunt parallelæ, *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum ſint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter eaſdem parallelas conſtituta ejuſdem altitudinis ſunt. Patet adeo Parallelogramma ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis æqualia eſſe (§. 383).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & Triangula ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis æqualia ſunt. Nam Parall. ACDB = Parall. ECDF (§. 384), ſed △ ACD = ½ Parall. ACDB & △ FCD = ½ Parall. ECDF (§. 337). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 94 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo Triangulum CFD eſt dimidium Parallelogrammi ACDB ſuper eadem vel æquali baſi CD, & ejuſdem altitudinis, ſeu intra eaſdem parallelas. Nam △ CFD = △ ACD (§. 385). Sed △ ACD = ½ Parall. ACDB (§. 337). Ergo △ CFD = ½ Parall. ACDB (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, ſeu Parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro baſi aſſumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 227). Tab. VII. *Fig.* 122.
2. Multiplicetur baſis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4
1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2
Erit Area = 10° 6 7′ 0 4″

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo ſuper eadem baſi CD & ejuſdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex baſi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis eſt area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & Triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem exiſtunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo ſi altitudines ſunt æquales, baſium; ſi baſes ſunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma æqualia baſes & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX.

391. *Triangulum eſt æquale Parallelogrammo ſuper eadem baſi ſed dimidiæ altitudinis; itemque Parallelogrammo ſuper dimidia baſi & ejuſdem altitudinis.* Tab. VII. *Fig.* 123.

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque ſuper eadem baſi AB & intra eaſdem

Tab. VII. Fig. 123. baſi parallelas AB & EF exiſtenti æquale ſit (§. 383) atque adeo eidem ſalva quantitate ſubſtitui poſſit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, aſſumta AD pro baſi, erit CD altitudo; ſumta vero DC pro baſi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) ſit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis, *per hypoth.* & angulus ad D ſit rectus (§. 91), adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 102), is ad G ſimiliter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G=E (§. 145); ſint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit △CGH=△EHA (§. 252); conſequenter EGDA = △ACD (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB reſolvetur (§. 78, 91). Ergo ſi fiat EB =DG dimidiæ altitudini; erit DGFB =△DCB & AEGD=△ACD, *per caſ.* 1. Ergo AEFB=△ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Sit DK=KB=½DB & DG=GA =½DA; erit GK=½AB, adeoque dimidia baſis. Jam CFKD=△DCB & GECD=△ACD, *per caſ.* 1. Quare EGKF=△ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. Fig. 124. 392. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Multiplicetur baſis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejuſdem baſeos & altitudinis (§ 387).
2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area Trianguli ABC (§. 386). Tab. VIII. Fig. 125.

Aliter.

Baſis dimidia ½ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel baſis AB per altitudinem dimidiam ½ CD. Factum erit area Trianguli (§. 391, 387).

Ex. gr. AB = 3° 4′ 2″	AB = 3° 4′ 2″
CD = 2 3 4	½CD = 1 1 7
1 3 6 8	2 3 9 4
1 0 2 6	3 4 2
6 8 4	3 4 2
8 0 0 2 8	△=4 0 0 1 4
2)	
△ACB, 4 0 0 1 4	

½ AB = 1° 7′ 1″
CD = 2 3 4
6 8 4
5 1 3
3 4 2
△=4 0 0 1 4

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia baſes & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*); conſequenter etiam baſes & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area Trianguli per baſin dimidiam dividitur, quotus eſt altitudo (§. 210 *Arith.*).

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus Quadrati Parallelogrammo, vel Triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quæratur inter baſin & altitudinem Parallelogrammi, vel inter dimidiam baſin & altitudinem, aut integram baſin & dimidiam altitudinem Trianguli media proportionalis, *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arithm.* Ita prodit latus Quadrati quæſitum.

D.E-

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex baſi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375, 387); & factum ex dimidia baſi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in baſin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti ſit in utroque caſu facto iſti æquale (§. 298 *Arithm.*); erit Quadratum iſtud in priori caſu Parallelogrammo, in poſteriori Triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

396. *In Parallelogrammis & Triangulis ſimilibus, altitudines ſunt lateribus homologis proportionales; & baſes ab iis lateribus proportionaliter ſecantur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 122. Cum altitudines AE & *ae* ſint ad baſes CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipſi *abdc*, triangulum CAD ipſi *cad* ſimile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC:AE = *ac*:*ae* (§. 267). Eſt vero etiam AC:CD = *ac*: *cd* (§. 175). Ergo AE:CD = *ae*:*cd* (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonſtr.* erit AC:CE = *ac*:*ce* (§. 267). Eſt vero etiam AC:CD = *ac*:*cd* (§. 175). Ergo CE:CD = *ce*:*cd* (§. 196 *Arithm.*); adeoque ED:CE = *ed*:*ce* (§. 193 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc & △ ACD ∽ △ acd, *per hypoth. perpendicula* AE & ae, *pariterque ſegmenta baſium* CE & ce, *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 119, 216), *adeoque ſimilia ſunt* (§. 120). *Cum adeo ea eadem ſint, per quæ a ſe invicem diſcerni debebant* (§. 24 Arithm.), *lineæ autem rectæ, utpote ſimiles* (§. 17), *non aliter niſi ratione diſcerni poſſint* (§. 132 Arithm.); *tam perpendicula, quam ſegmenta baſium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quaſcunque in figuris ſimilibus eodem modo determinatas tum inter ſe, tum ad latera homologa eandem rationem habere.* Tab. VII. Fig. 122.

COROLLARIUM I.

398. Quoniam Parallelogramma & Triangula ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§. 388); ſimilia vero habent baſes altitudinibus proportionales (§. 396); igitur Parallelogramma & Triangula ſimilia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam ſint in ratione duplicata altitudinum ac ſegmentorum baſeos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & ſegmentorum baſium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA LV.

400. *Invenire aream Polygoni irregularis, ac Trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Reſolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ ſingulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit ſumma area quæſita (§. 86 *Arithm.*).

Tab. VIII. *Fig.* 126. n. 1.

Ex.gr. ½AD = 43′	½AD = 43′	½AC = 42′
EF = 35	GC = 45	BH = 30
215	215	△ABC, 1260
129	172	
△AED, 1505	△DAC, 1935	
	△AED, 1505	
	△ABC, 1260	

Area Polygoni irreg. 4700′

Quodſi ½ AD multiplicetur per ſummam altitudinum EF + GC, vel integra AD per ½ (EF + GC); prodibit area Trapezii AEDC.

Ex. gr. EF = 35	½ AD = 43
GC = 45	EF + GC = 80
EF + GC = 80	AEDC = 3440
½(EF + GC) = 40	
AD = 86	
AEDC = 3440	

Tab. VIII. *Fig.* 127. Similiter ſi in Trapezio fuerit AB ipſi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226, 227); conſequenter Trapezii area prodit, ducta ſemiſumma baſium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

Ex. gr. Sit AB 246′′, CD = 378′′, BF = 195′′

erit ½ (AB + CD) = 312
BF = 195
1560
2808
312

Area Trapezii 60840

Theorema LXXXI.

Tab. VI. *Fig.* 107. 401. *Figura regularis* ABCDE *ex centro circuli circumſcripti* F *in triangula æqualia atque ſimilia reſolvitur, & area ejus æquatur Triangulo, cujus baſis peripheria totius Polygoni* AB+BC+CD, *&c. altitudo perpendiculum* FG *ex centro* F *in latus unum* AB *demiſſum. Idem valet de area circumſcripti* abcde, *niſi quod altitudo ſit radius* FG. Tab. IV. *Fig.* 107.

Demonstratio.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 106), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & ſimilia ſunt (§. 204). *Quod erat unum.*

Conſtituantur triangula AFB, BFC, CFD, &c. in quæ reſolutum eſt Polygonum ABCDE, ſuper eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis A*f* (§. 249) ipſi altitudini triangulorum æqualis. Erit A*f*B = AFB, B*f*C = BFC, C*f*D = CFD, &c. (§. 385); conſequenter A*f*A = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 *Arithm.*) æqualis eſt areæ Polygoni regularis (§. 86, 87 *Arithm.*). *Quod erat ſecundum.* Tab. VIII. *Fig.* 128.

Cum recta F*g* ex centro F ad contactum *g* ducta ſit radius & ad latus *ae* perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli *a*F*e* (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI. *Fig.* 107.

Problema LVI.

402. *Invenire aream Polygoni regularis.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Latus Polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus Hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumſcripti in latus AB demiſſum.

Ita prodit area quæſita (§. 392, 401).

Ex.

Tab. VI. *Fig.* 107. Ex. gr. AB = 5°4′

dimidius Numer. later. $2\frac{1}{2}$

	27
	108
Semiperimeter =	135
FG =	29
	1215 °
	270
Area Pentagoni	39°15′

THEOREMA LXXXII.

Tab. VI. *Fig.* 111. 403. *Quadrilatera & Polygona ſimilia* ABCDE & abcde *per diagonales* AC, AD & ac, ad *in ſimilia triangula* ABC & abc, ACD & acd, ADE & ade *dividuntur, & inter ſe & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE ∽ *abcde*, *per hypoth.* erit $o = o$, & $AB : BC = ab : bc$ (§. 175). Ergo $\triangle bac$ ∽ $\triangle BAC$, $y = y$ atque $bc : ca = BC : CA$ (§. 183). Eſt vero etiam $bc : cd = BC : CD$, & $n + y = n + y$ (§. 175). Ergo $ca : cd = CA : CD$ (§. 196 *Arithm.*) & $n = n$ (§. 91 *Arith.*); conſequenter $\triangle cad$ ∽ $\triangle CAD$, $cd : da = CD : DA$, & $u = u$ (§. 183). Eſt vero etiam $u + s = u + s$, & $cd : de = CD : DE$ (§. 175). Ergo $s = s$ (§. 91 *Arithm.*) & $da : de = DA : DE$ (§. 196 *Arithm.*); conſequenter $\triangle dea$ ∽ $\triangle DEA$ (§. 183), *Quod erat primum.*

Quoniam $\triangle ABC$ ∽ $\triangle abc$, $\triangle DAC$ ∽ $\triangle dac$ & $\triangle DAE$ ∽ $\triangle dae$, *per demonſtrata*; erit $\triangle ABC : \triangle abc = CA^2 : ca^2$, $\triangle DAC : \triangle dac = CA^2 : ca^2 = DA^2 : da^2$ & $\triangle DAE : \triangle dae = DA^2 : da^2$ (§. 398); conſequenter $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DAC : \triangle dac$ & $\triangle DAC : \triangle dac = \triangle DAE : \triangle dae$ (§. 167 *Arith.*); adeoque etiam $\triangle DAE : \triangle dae = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. *cit.*). Sunt igitur $\triangle\triangle$ ABC, ACD, ADE, & *abc*, *acd*, *ade* inter ſe proportionalia. *Quod erat ſecundum.* Tab. VI. *Fig.* 111.

Quoniam denique $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca = \triangle DEA : \triangle dea$, *per ſecundum hujus*; erit $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA : \triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. 192 *Arithm.*). Sed $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA =$ polygono ABCDE & $\triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = abcde$ (§. 86 *Arithm.*). Ergo $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca$, &c. (§. 168 *Arithm.*); conſequenter $ABCDE : \triangle ABC = abcde : \triangle abc$, & $ABCDE : \triangle DCA = abcde : \triangle dca$ &c. (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum Polygona regularia ſint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam ſibi mutuo æquiangula (§. 344); Polygona regularia ejuſdem ordinis, veluti omnia Pentagona, omnia Hexagona, &c. regularia, inter ſe ſimilia ſunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejuſdem ordinis per diagonales in triangula ſimilia dividuntur & inter ſe, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat Theorema præſens ex notione determinationis facilius demonſtrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *ſint ſimiles*, per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175), *atque præterea diagonales* AC, AD & ac, ad *ex angulis hiſce æqualibus* A *&* a *ducantur*; $\triangle\triangle$ ABC *&* abc, CAD *&* cad DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119); *conſequenter & inter ſe ſimilia ſunt & ſimiles partes figurarum exiſtunt* (§. 120); *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170 Arithm.), *immo eandem inter ſe rationem,*

Tab. VI. Fig. 111. *tionem quam Polygona aut Quadrilatera habent* (§. 171 Arithm.).

THEOREMA LXXXIII.

406. *Figuræ, tam regulares quam ſimiles irregulares, habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & *abcde*, ſive regulares, ſive irregulares ſimiles, eæque ſive quadrilateræ, ſive polygonæ quæcunque ejuſdem ordinis; erit $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle ADE : \triangle ade$ (§. 403, 404). Sed $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$; $\triangle ADC : \triangle adc = CD^2 : cd^2$ & $\triangle ADE : ade = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398). Ergo $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo oſtenditur, figuras rectilineas ſimiles eſſe in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A *&* a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA LXXXIV.

408. *Circuli & figuræ ſimiles ipſis inſcriptæ vel circumſcriptæ ſunt inter ſe ut Quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus deſcribi duos circulos & iis circumſcribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter ſe ſimiles (§. 120). Cum adeo utrobique eadem ſint, per quæ diſtingui debent (§. 24 *Arithm.*); quadrata circulis circumſcripta ad ſuos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arithm.*). Quamobrem Circuli inter ſe ſunt ut Quadrata diametrorum (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, figuras ſimiles circulis inſcriptas vel circumſcriptas eſſe ut circulos, quibus inſcribuntur vel circumſcribuntur. Sed circuli ſunt ut quadrata diametrorum, *per demonſtrata.* Ergo Figuræ ipſis inſcriptæ & circumſcriptæ ſimiles ſunt ut Quadrata diametrorum (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Reſolvantur Polygona circulis inſcripta ABCDE & *abcde* ex centris F & *f* in $\triangle\triangle$ AFB, BFC, CFD, & *afb*, *bfc*, *cfd*, &c. erit angulus $FAB = fab$ & $FBA = fba$, &c. (§. 344, 347); conſequenter $\triangle AFB \backsim \triangle afb$ (§. 267). Eodem modo patet, eſſe $\triangle BFC \backsim \triangle bfc$, $\triangle CFD \backsim \triangle cfd$ &c. Habemus itaque $\triangle AFB : \triangle afb = BF^2 : bf^2$, $\triangle BFC : \triangle bfc = BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398). Ergo $ABCDE : abcde = BF^2 : bf^2$ (§. 187 *Arithm.*); conſequenter cum radii BF & *bf* ſint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arithm.*), Polygona ſimilia circulo inſcripta ſunt ut Quadrata diametrorum (§. 260 *Arithm.*). Et idem eodem modo oſtenditur de Polygonis circulo circumſcriptis, cum triangula ſimilia etiam ſint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ reſolvitur polygonum circulo circumſcriptum, ſint radii circulorum (§. 355). Tab. VI. Fig. 107.

Quodſi

Quodſi jam Polygonum circulo inſcriptum tot ſumatur laterum, donec ſubtenſa a peripheria magnitudine inaſſignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam Circuli erunt inter ſe ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo Circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374): adeoque, cum radii ſint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*), & radiorum (§. 260, 259 *Arithm.*).

THEOREMA LXXXV.

410. *Circulus æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 129. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter ſe æquales adeoque infinite parvas diviſa; arcus infinite exigui *ab* ſupra chordam cognominem exceſſus erit quovis dato minor, ſeu inaſſignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240); conſequenter ſi *ab* ſumatur pro baſi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli reſolvatur in iſtiuſmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis eſt radius *ac*, baſes vero junctim ſumtæ ſunt peripheriæ circuli æquales, *per demonſtrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHOLION.

411. *Hac demonſtrandi methodo primus uſus eſt* KEPLERUS (*a*). *Eam exemplo ejus excitatus ſub nomine* Methodi indiviſibilium *magis excoluit* CAVALERIUS (*b*). *Demonſtrationem indirectam dedit* ARCHIMEDES (*c*) *non contemnendam, quoniam ipſius demonſtrandi methodo principia methodi infiniteſimalis rigidantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione compoſita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem ſunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ ſunt inter ſe ut radii (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo ſit, ut peripheria circuli unius ad ſuum radium, ita peripheria alterius cujuſcunque ad ſuum (§. 173 *Arith.*); ratio peripheriæ ad radium ſeu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo oſtenditur. Cum omnes circuli inter ſe ſimiles ſint* (§. 134); *per quæ diſtingui poſſent, ea eadem ſunt* (§. 24 Arithm.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros diſtingui poſſent, ſiquidem ea in diverſis circulis diverſa foret* (§. 132 Arithm.); *ratio in omnibus eadem eſſe debet.* Q. e. d.

THEOREMA LXXXVI.

415. *Sector circuli* ACD *æqualis eſt triangulo, cujus baſis arcus* AD, *altitudo radius* AC. Tab. VIII. Fig. 133.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ Theorematis præcedentis (§. 410).

Y THEO-

(*a*) *In Nova Stereometria doliorum vinariorum* Part. 1. Theor. 2. f. B. 2.

(*b*) Vide præfat. ad *Geometriam indiviſibilium continuorum nova ratione promotam.* p. b. 2.

(*c*) In libello *De circuli dimenſione*, prop. 1.

Theorema LXXXVII.

416. *Polygonum inſcriptum minus; circumſcriptum majus eſt Circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major eſt peripheria Circuli.*

Demonstratio.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inſcripti ſunt chordæ arcus cognomines ſubtendentes (§. 342). Sed chordæ ſunt arcubus minores (§. 191). Ergo ſingula polygoni latera AB, BC, CD &c. ſunt ſingulis arcubus eiſdem reſpondentibus minora; conſequenter perimeter polygoni circulo inſcripti eſt hujus peripheria minor (§. 90 *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt, area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipſi æqualis eſt (§. 161); conſequenter Polygonum inſcriptum Circulo minus (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat primum & ſecundum.*

Latera polygoni circumſcripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47); conſequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipſi æqualis (§. 161), hoc eſt, Circulus Polygono circumſcripto minor eſt (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumſcripti eſt ad aream circuli in ratione compoſita radii circuli & perimetrorum (§. 401, 410, 388); conſequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arithm.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arithm.*). Sed polygonum majus circ. per demonſtr. Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arith.*). *Quod erat quartum.*

Theorema LXXXVIII.

417. *In Triangulo rectangulo* ABC, *quadratum hypothenuſæ* AC *æquale eſt quadratis laterum* AHIB *&* BCED *ſimul ſumtis.* Tab. VIII. Fig. 130.

Demonstratio.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipſi CF parallela (§. 258). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas (§. 336) exiſtit; hujus dimidium eſt (§ 391). Ex eadem ratione △ BCF eſt dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=o$ (§. 98, 145), adeoque $x+y=o+y$ (§. 88 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179); conſequenter BCED = LCFK (§. 93 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 *Arithm.*) = ACFG (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Scholion.

418. *Hoc Theorema* Pythagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur, Ampliſſimi per Matheſin univerſam eſt uſus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc eſt, centum boum ſacrificio redemtum fertur.*

Corollarium I.

419. Quadratum conſtruitur duobus aut pluribus datis ſimul ſumtis æquale, ſi 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2°. ſuper ducta hypothenuſa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.), ducaturque hypothenuſa BD &c. Eſt enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & Tab. VIII. Fig. 131.

BD^2

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

Corollarium II.

Tab. VIII. *Fig.* 132. 420. Quodſi AB fuerit = 1, & AC = 1; erit CB = $\sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit DB = $\sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit BE = $\sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit FB = $\sqrt{6}$, & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ ſurdæ ſunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam; conſequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§. 43, 295 *Arithm.*).

Corollarium III.

421. Cum CB ſit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ eſt numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommenſurabilis (§. 43 *Arithm.*); conſequenter diagonalis quadrati eſt lateri incommenſurabilis.

Corollarium IV.

422. Dantur adeo quantitates incommenſurabiles, hoc eſt, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*); conſequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 419).

Problema LVII.

Tab. VIII. *Fig.* 133. 423. *Datis chorda* AB *& radio* AC, *invenire chordam arcus dimidii* AD.

Resolutio & Demonstratio.

Quoniam radius CD arcum AB biſecat in D, *per hypoth.* etiam chordam AB biſecat & ad eam perpendicularis eſt (§. 291); adeoque anguli ad E recti ſunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC ſubtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: reſiduum eſt quadratum ipſius EC (§. 417).
2. Ex hoc reſiduo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*), quæ erit EC. Tab. VIII. *Fig.* 133.
3. Hæc ex radio DC ſubducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, ſumma eſt quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo ſi extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Sit radius AC = 10000, & AB latus Hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356), & AE = 5000.

Quare

AC^2 =	100000000	AE^2 =	25000000
AE^2 =	25000000	ED^2 =	1795600
CE^2 =	75000000	DA^2 =	26795600
		DA =	5176
CE =	8660		
DC =	10000		
DE =	1340		

Problema LVIII.

424. *Dato latere Polygoni regularis inſcripti* AB, *invenire latus circumſcripti* FG. Tab. VIII. *Fig.* 134.

Resolutio & Demonstratio.

Quoniam FG parallela ipſi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit AE = $\frac{1}{2}$ AB & CE : EA = CD : DG (§. 268). Quare ſi, ob angulum rectum ad E (§. 291), EC inveſtigetur ut in Problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum eſt latus polygoni circumſcripti FG. Eſt enim CE : CD = EA : DG, & CE : CD = EB : DF (§. 268). Cum adeo ſit EA : DG = EB : DF (§. 167 *Arithm.*), & EA = EB *per demon-*

Tab. VIII. Fig. 134. *demonſtratâ:* erit etiam DG=DF (§. 177 *Arithm.*); adeoque FG=2DG. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423); adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam biſectionem latera polygonorum inſcriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum ſubtendens.
2. Invento hoc latere, quæratur porro latus polygoni ſimilis circumſcripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni, tam inſcripti, quam circumſcripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejuſdem ad perimetrum polygoni circumſcripti; minor vero, quam ejuſdem ad perimetrum inſcripti (§. 416 *Geom.* & *§.* 205 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit ex. gr. radius circuli 1, ſeu (ut latera Polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1:000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000; reperietur, continua a Quadrato biſectione, latus Polygoni 1, 073, 741, 824 laterum inſcripti vero proxime minus 0. 00000000058516723 170686387122; circumſcripti autem latus vero itidem proxime majus 0, 000000 000585167231706863873784. Hinc perimeter circumſcripta 6. 283185307179 58649156537 vero proxime major; inſcripta autem 6. 28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; poſita diametro 2: 000000000000000, erit peripheria minor quam 6. 28318530 71795865, major vero quam 6. 28318530 71795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 1000000000000000 ad 3141592653589793 2. Compendia calculi tradit *Ludolphus* A CEULEN (*a*).

SCHOLION I.

426. *In quadrando Circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, deſudarunt ingenia præſtantiſſima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut noſtra præſertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* ARCHIMEDES (*b*) *ea fini excogitavit methodum quadrandi Circulum per Polygona regularia inſcripta & circumſcripta, & Polygonis 96 laterum uſus invenit rationem diametri ad peripheriam eſſe ut 7 ad 22 fere. Nimirum ſi diameter 1, perimeter Polygoni inſcripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumſcripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus veſtigiis inſiſtentes poſteri rationes propiores inveſtigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho A CEULEN (*c*), *qui tandem reperit, poſita diametro 1, peripheriam eſſe minorem quam 3. 14159265358979323846264338327950, ſed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum reſpondent; in Geometria practica hodie a pleriſque aſſumitur, diametrum eſſe ad peripheriam.*

(*a*) In libro *De circulo & adſcriptis.* Conf. *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* lib. 6. probl. 1. p. m. 241. & ſeqq.

(*b*) In libello *De circuli dimenſione* prop. 2.

(*c*) In *Zetematum Geometricorum Epilogiſmo.* Zetem. 2. p. 92.

pheriam ut 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415 : *in qua proportione*, Ptolemæus, Vieta, Hugenius *cum* Ludolpho *conſentiunt.* Hugenius (*a*) *compendioſiorem monſtravit viam ; ſed pluribus Theorematis nixam, quæ in hiſce Elementis non demonſtrantur.*

Corollarium.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415 : 10000 (§. 272 *Arith.*) hoc eſt 355 quam proxime.

Scholion II.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus Metius *tradit* (*b*) *a parente ſuo inventam & demonſtratam* (*c*), *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratiſſima. Quodſi enim numerum* 355 *ſeptem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas ; quotus cum proportione* Ludolphina *collatus oſtendet eam ne quidem* $\frac{7}{10000000}$ *a vera differre.*

Problema LX.

429. *Data diametro Circuli invenire peripheriam & aream ejus ; & data peripheria diametrum.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426, 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arithm.*)
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410, 392).

Ex. gr. Sit diameter 56 : erit

100 — 314 — 56   Periph. 17584'''
56   ¼ Diam. 1400

1884   7033600
1570   17584

Per. 17°5'8''4'''   Area 24°61'76''00'''

(*a*) In *Inventis de circuli magnitudine* prop. 10. p. 15. & prop. 20. p. 40.

(*b*) In *Geometria practica*, part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89.

(*c*) In libello adverſus quadraturam circuli Simonis a Quercu conſcripto.

Corollarium I.

430. Si diameter 100 ; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Eſt vero Quadratum diametri 10000 (§. 370) : ergo hoc ad aream Circuli ut 10000 ad 7850, hoc eſt, ut 1000 ad 785 (§. 181 *Arithm.*) quam proxime.

Corollarium II.

431. Similiter ſi diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area Circuli 10028¼ (§. 429). Eſt vero Quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad 10028¼ hoc eſt, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arithm.*) ; conſequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arithm.*), quæ *Metiana* proportio priori accuratior.

Corollarium III.

432. Area igitur Circuli etiam invenitur, ſi ad 1000, 785 & Quadratum diametri ; vel ad 452, 355 & Quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*).

Sit ex. gr. diameter 560'', erit quadratum ejus 31° 36' 00''. Quare

1000 — 31° 36' 00'' — 785
785

1568000
25088
21952

24°61'76''   Area Circuli.

Corollarium IV.

433. Si area circuli minoris GEHF ſubtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF. Tab. VIII. *Fig.* 135.

Problema LXI.

434. *Data area Circuli, invenire diametrum.*

Resolutio.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus

 quar-

quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui eſt quadratum diametri (§ 430).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§ 269 *Arithm.*), quæ eſt diameter (§. 236 *Arithm.* & §. 370 *Geom.*)

PROBLEMA LXII.

Tab. VIII. Fig. 133. 435. *Dato radio circuli* AC, *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam; invenire aream Sectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui eſt ſemiperipheria (§. 436 *Geom* & §. 181 *Arithm.*).

2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB, & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem menſura, in qua radius AC datur.

3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream Sectoris (§. 415, 392).

Ex. gr. Sit radius 6′; arcus 60°.

100 — 314 — 600‴
6 00

Semiperiph. 1884|00
180 — 1884 — 60

60) 3 ——— 1
6 2 8‴ = AB
3 00 = $\frac{1}{2}$AC.
Area 18′ 8 4″|00| = ACB

PROBLEMA LXIII.

Tab. VIII. Fig. 133. 436. *Datis altitudine Segmenti* DE *& dimidia baſi* EA; *invenire aream ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 328). Tab. VIII. Fig. 133.

2. Deſcribatur circulus (§. 131), & in eo applicetur baſis ſegmenti AB.

3. Ducantur radii AC & BC, & ope Inſtrumenti tranſportatorii inveſtigetur numerus graduum arcus ADB.

4. Dato jam radio AC, una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, inveſtigetur area ſectoris ACB, &

5. Ex chorda AB atque altitudinis ſegmenti DE complemento ad radium EC, area trianguli ACB (§. 392).

6. Hoc denique ex illo auferatur: reſiduum erit Segmentum ADBEA.

Ex. gr. Sit AB = 600‴, DE = 80‴; erit DF = 1205‴ (§. 328), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area ſectoris ADBC = 18′84″ (§. 435). Jam EC = 522$\frac{1}{2}$‴, AE = 300‴. Quare △ ACB = 156750‴; conſequenter ſegmentum AEBDA = 31650‴.

COROLLARIUM.

437. Quodſi Segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA ſectori BFACB addendum.

SCHOLION.

438. *Ne pro invenienda area Sectoris atque Segmenti, peripheriam inveſtigare opus ſit; arcuum gradus atque ſcrupula, tam prima quam ſecunda, iſtiuſmodi particulis expreſſa in Tabula ſubſequente exhibere placet, qualium diameter eſt* 100000. *Conſtructio Tabulæ intelligitur ex reſolutione Problematis* 61 (§. 435). *Uſus talis eſt. Sit ex. gr. ut in caſu Problematis citati, diameter* 1200‴, *arcus* 60°. *Cum* 60 *gradibus in Tabula reſpondeant* 52359 *particulæ diametri; inferatur:*

100000

100000 — 52359 — 1200
1200
―――――
10471800
52359
―――――
628|30800

Eſt ergo arcus $628'''$, *ut ſupra* (§. cit.) *eundem reperimus.*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

PROBLEMA LXIV.

439. *Parallelogrammum* ABEC *ex dato puncto* D *in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. *Fig.* 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD, & ducatur recta DF: erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD=FE, *per conſt.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 252). Eſt vero △ ACE = △ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arithm.*); conſequenter ADFC =DBEF (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXV.

440. *Parallelogrammum atque Triangulum in partes quotcunque æquales dividere.* Tab. VIII. *Fig.* 137. 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur baſis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In Parallelogrammo ducantur rectæ 11, 22; in Triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter eaſdem parallelas AB & CD exiſtunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226, 227). Sunt itaque in baſium ratione (§. 389); conſequenter, ob C1=12 =2D, *per conſtr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonniſi unica duci poſſit (§. 213); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§.

(§. 228), adeoque baſium rationem habent (§. 389). Sed baſes æquales ſunt, *per conſtr.* Ergo & Triangula. *Quod erat alterum.*

Problema LXVI.

Tab. VIII. Fig. 139. 441. *Figuram rectilineam quamcunque* ABCDE *in partes æquales dividere.*

Resolutio.

1. Quæratur area figuræ (§. 400), & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, ex.gr. in 3.
2. Area partis, in noſtro caſu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED ſubtrahatur a parte tertia, & reſiduum dividatur per $\frac{1}{2}$AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI ſit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipſi AD (§. 258), quæ ſecabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abſcindentem.
5. Pars tertia dimidia, ſive ſexta totius figuræ, dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD ſextam figuræ partem conſtituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipſi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD ſextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipſi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL reſecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes reſolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

Ex. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350″ & ABC = 108750″ (§. 392); adeoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944; pars ſexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732
AID = 40212 (155 +, ſeu 156 fere = IM
$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.
$\frac{1}{2}$ DI = 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LO
$\frac{1}{2}$ DK = 287) 287
1127
861
2662
2583
79

Scholion.

442. *Si* AED *majus tertia ex. gr. parte figuræ; ipſam ab illo ſubtrahi neceſſe eſt & reſiduum erit triangulum a triangulo* AED *auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam conſultum eſt, ut prima pars* AEDI *per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

Scholion II.

443. *Ubi in charta diviſio abſoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK & DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ ſolidæ.

DEFINITIO I.

444. Solidum, ſive *Corpus*, eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem, atque profunditatem.

DEFINITIO II.

Tab. VIII. Fig. 141. 445. *Angulus ſolidus* B eſt plurium quam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *Anguli ſolidi æquales*, qui inter ſe invicem poſiti congruunt.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

SCHOLION I.

448. *Unde etiam* Angulus ſolidus *definitur, quod ſit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non conſiſtentibus, ad idem tamen punctum conſtitutis, continetur.*

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli ſolidi ſint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent, ut ſcilicet plana angulos planos æquales continentia æqualiter ad ſe invicem inclinentur.

SCHOLION II.

450. *Bene nimirum* TAQUETUS *obſervat, de angulis ſolidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo ratiocinandum eſſe, quo de planis, qui oriuntur ex linearum ad ſe invicem inclinatione.*

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli ſolidi diſtingui nequeant niſi per planos, quibus continentur (§. 445), ubi plani & numero, & magnitudine æquales, & planorum eos continentium eadem fuerit inclinatio, ea coincidunt per quæ a ſe invicem diſtingui debent. Sunt ergo ſimiles (§. 24 *Arithm.*); conſequenter anguli ſolidi ſimiles ſunt æquales & contra (§. 449).

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant ſummam 360 graduum; planum circuli ſternunt (§.41, 57), adeoque ſolidum angulum non conſtituunt (§.446). Quare ſumma eorum, qui ultra ſolidum non aſſurgunt, quatuor rectis ſeu 360° (§. 144) minor eſſe debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* eſt ſolidum planis regularibus & inter ſe æqualibus terminatum, totidem numero ad angulos conſtituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* PLATO *in* Timæo *corpora, quæ ſtatuit, ſimplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam, atque terramc um iiſdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuſlibet regularis æquales ſunt (§. 449).

DEFINITIO IV.

Tab. VIII. *Fig.* 140. 456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu ſibi ſemper parallelo deorſum feratur, *Priſma* ABCDFEA deſcribit: & quidem *rectum*, ſi linea directrix AE fuerit ad planum deſcribens perpendicularis, ſeu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, ſi ea ad idem fuerit obliqua. In ſpecie *Priſma* dicitur *triangulare* ſive *trigonum*, ſi planum deſcribens fuerit triangulum; *quadrangulare*, ſi fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo priſma habet duas baſes oppoſitas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot baſis latera habet. Eſt enim AC ipſi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipſi CD (§. 257); conſequenter ACDE eſt parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus oſtenditur. Tab. VIII. *Fig.* 140.

COROLLARIUM II.

458. Plana ſectionum priſmatis baſi ACB parallele factarum ſunt inter ſe æqualia. Æquantur enim plano deſcribenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); ergo & inter ſe æqualia ſunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO V.

459. Si planum deſcribens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* deſcribitur. Tab. VIII. *Fig.* 141.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur ſex quadratis inter ſe æqualibus: eſt enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF ſint inter ſe æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230); conſequenter ABFE quadratum (§. 338) ipſi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo oſtenditur, reliqua plana terminantia eſſe quadrata ipſi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt quadrata ipſi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); conſequenter etiam æqualia inter ſe (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

462. Si planum deſcribens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* deſcribitur. Tab. VIII. *Fig.* 142.

COROLLARIUM I.

463. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt parallelogramma ipſi æqualia (§. 462

(§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); adeoque & æqualia inter ſe (§. 87 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 142. 464. Cum LM & NO ſint æquales & inter ſe parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); etiam MO & LN æquales ſunt & parallelæ (§. 257); conſequenter LMNO parallelogrammum (§. 102). Eodem modo oſtenditur, plana terminantia reliqua eſſe parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum ſex parallelogrammis, quorum bina oppoſita inter ſe æqualia ſunt.

DEFINITIO VII.

Tab. VIII. Fig. 143. 465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu ſibi ſemper parallelo, deorſum feratur, *Cylindrus* deſcribitur; *rectus* quidem, ſi recta CF quam punctum C in deſcenſu deſcribit, centra baſium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *ſcalenus* vero, ſi ad angulos obliquos eidem inſiſtat. Quodſi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *Cylindrum* deſcribit *rectum.*

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo baſes cylindri AB & DE æquales; verum etiam ſectiones baſibus parallelæ ſunt circuli iiſdem & inter ſe æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 144. 467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut conſtanter inhæreat puncto fixo K; deſcribetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum baſis L ducta dicitur *Axis Coni*: qui ſi ad circulum baſim coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* eſt; ſi vero ad angulos obliquos eidem inſiſtat, *ſcalenus.* Linea deſcribens KM, ſeu recta ex vertice in peripheriam baſis ducta, vocatur *Latus Coni.* Poſſumus quoque *Coni* geneſin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu ſibi ſemper parallelo ita deorſum fertur, ut centrum continuo ſit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodſi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur: *Conus* deſcribitur *rectus.* Tab. IX. Fig. 144.

COROLLARIUM.

468. Quodſi PQ ipſi LM parallela, per ultimam coni geneſin erit KL : KP = LM : PQ. Quare cum PQ & LM ſint radii circulorum ſibi invicem parallelorum; planum ſectionis baſi coni parallele factæ circulus eſt eadem minor.

SCHOLION.

469. *Ex geneſi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam poſſe miraculoſa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejuſdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam deſcribentem* KM, *quæ altero ſui extremo peripheriæ* NM *conſtanter adhæret, per punctum fixum* K *aliqua ſui parte nunc deorſum, nunc ſurſum moveri debere.*

DEFINITIO IX.

470. Si ſemicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* deſcribitur: diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ.* Tab. IX. Fig. 145.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex ſphæræ ſuperficie in centrum ductæ ſunt inter ſe æquales (§. 40).

DEFINITIO X.

472. *Pyramis* eſt ſolidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D coëun- Tab. IX. Fig. 146.

Tab. IX. Fig. 146. coëuntibus, quot baſis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. ſi baſis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA baſis ACB parallelæ ducantur; erit DC : D*c* = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 268); adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 167 *Arithm.*); conſequenter cum eodem modo oſtendi poſſit eſſe CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* ſimile triangulo ACB (§. 207). Quare ſi pyramis triangularis ACDB ſecatur plano baſi parallelo; planum iſtud huic ſimile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares reſolvi poteſt, quot ſunt latera baſis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres, &c. ſi pyramis multangularis plano baſi parallelo ſecetur, conſtabit id ex triangulis, quæ ſingula ſingulis ſimilia ſunt, in quæ reſolvitur baſis (§. 473); conſequenter cum vi demonſtrationis primæ Problematis 47 (§. 363) pateat, ſimiles eſſe figuras rectilineas quaſcunque, quæ ex triangulis ſimilibus eodem ordine inter ſe junctis componuntur, in quavis pyramide planum ſectionis baſi parallelum eſt figura baſi ſimilis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* eſt ſolidum quatuor; *Octaëdrum* eſt ſolidum octo; *Icoſaëdrum* eſt ſolidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehenſum; *Dodecaëdrum* vero ſolidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum. Tab. IX. Fig. 147. 148. 149. 150.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB eſt angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam ſectionis EG perpendiculares. Tab. XI. Fig. 151.

DEFINITIO XIII.

477. *Menſura ſolidi* eſt cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica.* Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc eſt, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

Tab. XI. Fig. 175. 478. *Rectæ lineæ pars quædam* AB *non eſt in ſubjecto plano* DE, *pars vero* BC *in ſublimi.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, ſi fieri poſſit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in ſublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci poſſit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB eſt pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam deſcribens in B mutat directionem, cum & verſus F, & verſus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum ſit abſurdum

Tab. XI. *Fig.* 175. ſurdum (*§.* 19), rectæ lineæ quædam pars AB non poteſt eſſe in ſubjecto plano DE, pars vero quædam BC in ſublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. XI. *Fig.* 176. 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF ſegmentum commune DE habere nequeunt (*§.* 478); conſequenter duæ rectæ AB & CF ſe mutuo non interſecant niſi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

Tab. XI. *Fig.* 177. 480. Cumque pars rectæ AD eſſet in ſubjecto plano, pars vero BD in ſublimi, ſi trianguli ABC pars ADE eſſet in ſubjecto plano, pars vero DBCE in ſublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

Tab. XI. *Fig.* 178. 481. Et quoniam rectarum BE & DC ſe mutuo ſecantium in A partes AB & AC ſunt crura trianguli ABC; erunt eædem in eodem plano (*§.* 480). Sed in eodem plano eſt EA, in quo eſt AB, & AD in eodem eſt, in quo eſt AC (*§.* 478). Ergo lineæ ſe mutuo ſecantes EB & DC in eodem ſunt plano.

THEOREMA II.

Tab. XI. *Fig.* 179. 482. *Si duo plana* ABCD *&* EFHG *ſe mutuo ſecent; erit communis ſectio recta* IK.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF ſe mutuo non interſecant niſi in puncto I, nec rectæ DC & GH niſi in puncto K (§. 479); ſi communis planorum ſectio non eſt recta unica, ſed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri poſſe patet, ſi ſectio communis planorum ABCD & EFHG non eſt recta unica IK, utut planum ſectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari ſumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170); conſequenter communis ſectio eſſe nequit niſi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.* Tab. XI. *Fig.* 179.

THEOREMA III.

483. *Si duæ rectæ* AB *&* CD *fuerint in eodem plano; recta* EF *eas ſecans in* G *&* H *erit in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.* 180.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo poſitæ ſunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta tranſiens per G & H eſt communis ſectio planorum (§. 482). Sed eadem eſt pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD ſecat, *per hypoth.* Recta igitur EF eſt in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. *Si recta* IE *fuerit perpendicularis ad duas rectas* KL *&* MN *in plano* ABCD *ductas, & ſe mutuo in puncto* E *ſecantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam* OP, *quæ per punctum* E *ducitur in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.* 181.

DEMONSTRATIO.

Fiat ME=EN & EL=EK. Quoniam MEL = KEN (§. 156), erit ML = KN, & angulus EMO = ENP (§. 179). Quare cum etiam ſit MEO = PEN (§. 156), erit MO=PN & EO = EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN, *per hypoth.* erit angulus IEM = IEN (*§.* 79); conſequenter, cum ſit ME = EN, *per conſtr.* & IE = IE, etiam IM=IN. Eodem modo oſten-

Tab. XI. Fig. 181. oſtenditur eſſe IL=IK. Quoniam itaque ML=KN, *per demonſtr.*; angulus INP=IMO, adeoque, ob IN=IM & PN=OM, *per demonſtr.*, IP=IO (§. 179). Eſt vero etiam EP=EO, *per demonſtr.*, & IE=IE. Quamobrem angulus IEP=IEO (§. 204); conſequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE, ad duas rectas KL & MN in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos inſiſtit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA V.

Tab. XI. Fig. 182. 487. *Si recta* IE *fuerit ad planum* ABCD *perpendicularis, & ex* E, *tanquam centro, in eodem plano deſcriptus ſit circulus; erunt rectæ* IG, IF, *&c. ab eodem puncto ſublimi ad peripheriam ductæ inter ſe æquales.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG, &c. erit EF=EG (§. 40); cumque anguli FEI & GEI ſint recti (§. 485), etiam FEI=GEI (§. 145). Quare cum porro ſit EI=EI; erit FI=GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. XI. Fig. 181. 488. *Ex eodem puncto* E *ad planum* ABCD *nonniſi unica perpendicularis* EI *duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, ſi fieri poteſt, adhuc alia EQ, & per punctum E tranſiens in plano recta OP ſit cum rectis EI & EQ in eodem plano: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum ſit abſurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonniſi unica perpendicularis ad planum EI erigi poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

489. *Ab eodem puncto* I *in ſublimi dato ad idem planum* ABCD *perpendicularis nonniſi unica* IE *demitti poteſt.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, ſi fieri poteſt, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad baſin anguli E & G recti ſunt (§. 486): quod cum ſit abſurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonniſi unica perpendicularis demitti poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

490. *Linea perpendicularis* IE *eſt breviſſima, quæ a puncto extra planum dato ad idem duci poteſt.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480), & angulus ad E rectus (§. 486). Eſt igitur IE $<$ IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

491. *Si recta* LE *tribus rectis* FE, HE, IE, *vel etiam pluribus in eodem puncto* E *concurrentibus perpendiculariter inſiſtat; erunt tres illæ rectæ* FE, HE *&* IE *vel etiam plures in eodem plano* ABCD. Tab. XI. Fig. 183.

De-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 183. Sit enim, ſi fieri poteſt, recta EF in plano LEGK, quod ſecat planum ABCD, in quo ſunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 482). Quoniam LE perpendiculariter inſiſtit duabus rectis EH & EI in plano ABCD, *per hypoth.* eadem quoque ad angulos rectos inſiſtit rectæ EG (§. 485). Sed cum LE etiam perpendicularis ſit ad EF, *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§ 78); conſequenter angulus LEF ipſi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), rectæ FE, HE, & IE, quibus LE perpendiculariter inſiſtit, in eodem ſunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Quod ſi lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter inſiſtit, cum ſit tertia cum prima & ſecunda in eodem plano, *per demonſtrata*, erit etiam quarta cum ſecunda & tertia in eodem plano, & ita porro. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

Tab. XI. Fig. 184. 492. *Lineæ rectæ* GE *&* HF *eidem plano* ABCD *perpendiculares ſunt inter ſe parallelæ; & ſi una parallelarum* GE *&* HF *fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF & EL=EF. Cum GE perpendicularis ſit ad planum ABDC, *per hypoth.* inſiſtet ea rectis EF & EL in plano iſto ductis ad angulos rectos (§. 486). Moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut ad planum ſemper ſit recta, deſcribet ea planum GELI, eritque LI, tum ad planum, tum ad EL perpendicularis; conſequenter ipſi GE parallela (§. 256). Moveatur planum GELI circa rectam quieſcentem GE, donec EL ipſi EF congruat (§. 168); cadet planum GELI in planum, in quo ſunt rectæ EG & EF: quoniam itaque tam HF, *per hypoth.*, quam LI ad planum ABCD in puncto F perpendicularis, *per demonſtr.*; ad idem vero punctum F nonniſi unica recta plano perpendicularis eſſe poteſt (§. 488); etiam recta LI cadet in FH; conſequenter FH erit parallela ipſi GE. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter ſe parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Quod ſi reliqua ponantur ut ante; dum planum GELI incidit in planum GEFH, rectæ EG parallela LI cadet in rectam eidem parallelam FH (§. 260); conſequenter cum LI ſit ad planum perpendicularis, etiam FH ad idem perpendicularis erit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares ſunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* EUCLIDES Planum *definit* ad planum rectum *ſive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH ſectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ ſunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA XI.

495. *Rectæ* AB *&* EF, *quæ ſunt eidem rectæ* CD *parallelæ, non tamen in eodem cum ipſa plano, ſunt inter ſe parallelæ.* Tab. XI. Fig. 185.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 185. Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad CD perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad CD in plano parallelarum CD & EF. Jungantur puncta G & I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§. 480). Quoniam CH ad planum GHI perpendicularis (§. 484); erunt etiam AG & EI ipſi CH parallelæ, *per hypoth.* ad idem planum perpendiculares (§. 492); conſequenter inter ſe parallelæ (§. *cit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. X. Fig. 167. 496. *Si duæ rectæ* AC *&* CB *fuerint parallelæ duabus rectis* DF *&* FE, *etiamſi non ſint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CB=FE & CA=FD: quoniam CB parallela ipſi FE & CA parallela ipſi FD, *per hypotheſin*; erit BE ipſi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257); conſequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipſi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipſi DE (§. 257). Eſt igitur angulus DFE=ACB (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab. XI. Fig. 186. 497. *Si recta* IK *duobus planis* ABCD *&* EFGH *fuerit perpendicularis, erunt plana inter ſe parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad iſtud perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque IK ad planum EG recta ſit, *per hypoth.* ad IK parallela eſt (§. 492). Tab. XI. Fig. 186. Quamobrem ſi puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K perinde ac I rectus (§. 486), conſequenter LM=IK (§. 238). Cum eodem modo demonſtretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipſi IK parallelam eidem æqualem eſſe; plana ABCD & EFGH ubivis a ſe invicem eodem intervallo diſtare (§. 490, 15) patet. Sunt igitur inter ſe parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* Planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela eſt* (§. 81), *ſi ubivis eandem ab eadem diſtantiam ſervat.*

THEOREMA XIV.

499. *Si planum* ADCB *ſecet duo plana parallela* EFGH *&* IKLM; *erunt ſectiones* AD *&* BC *inter ſe parallelæ.* Tab. XI. Fig. 187.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim ſectiones AD & BC non eſſe inter ſe parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81, 83). Cum igitur, ſi plana cum ipſis continuentur, totæ in iiſdem ſint (§. 478); ipſa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non ſunt (§. 498): quod cum ſit abſurdum, ſectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ ſunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

500. *Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes* AC *&* AB *duabus aliis ſe mutuo tangentibus* EG *&* EF *fuerint parallelæ, etiam plana* ACDB *&* EGLF *per ipſas ducta erunt parallela.* Tab. XI. Fig. 188.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. *Fig.* 188. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495.) & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis eſt ad AB & AC (§. 230) adeoque ad planum ABCD (§. 484, 486); conſequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

Tab. XI. *Fig.* 189. THEOREMA XVI.

501. *Duæ lineæ rectæ* NR *&* OS *a planis parallelis* ABDC, EFHG, IKLM *proportionaliter ſecantur, ut nempe ſit* PR : PN = TS : TO.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta ſectionum N & O, R & S, rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & ſimiliter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipſi NO, QT vero parallela ipſi RS (§. 499.). Eſt igitur RQ : QO = RP : PN, & QR : QO = TS : TO (§. 268); conſequenter RP : PN = TS : TO (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. XI. *Fig.* 182. PROBLEMA I.

502. *Ad datum planum* ABDC *in dato puncto* E *erigere perpendicularem* EI.

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuſcunque F & G æqualiter diſtet, quod mechanice præſtatur ope filorum æqualium ex dictis punctis extenſorum: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487). Tab. XI. *Fig.* 182.

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti EIF, ſit rectangulum; evidens eſt, ſi crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, ſit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ uſus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Neceſſe eſt ut normæ crura non deſinant in aciem tenuem, ſed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata ſit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM II.

505. Quodſi punctum I extra planum detur, norma ſuper plano erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, ſi e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodſi crus normæ brevius ſit, quam ut punctum I attingere poſſit, cum filo ex puncto I extenſo idem coincidere debet. Tab. XI. *Fig.* 190.

THEOREMA XVII.

506. *Si recta* IK *ſit ad planum* ABCD *perpendicularis; planum quodcunque, veluti* EHGF, *quod per eam ducitur, ad idem planum* ABCD *perpendiculare eſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad ſectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam ſit IK ad HG perpendicularis, (*per hypoth.* & §. 468) erit LM ipſi IK parallela (§. 256). Enimvero IK perpendicularis eſt ad planum ABCD, *per hypoth.* Ergó etiam LM (§. 492).

Eſt igitur planum EHGF ad planum ABCD rectum (§. 494). *Q. e. d.*

SCHOLION.

507. *Nemo non videt demonſtrationem ſubſiſtere eandem, etiamſi in locum plani EFHG planum quodcunque aliud ſurrogetur,* Tab. XI. Fig. 191. *quod per IK ducitur.*

THEOREMA XVIII.

508. *Sectio* NO *duorum planorum* EFGH *&* IKLM *ad idem tertium* ADCB *perpendicularium eſt ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare, *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 502). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci poſſe rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonniſi unica perpendicularis inſiſtere poſſit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH ſectio NO nonniſi unica recta ſit (§. 482); ſectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX. Tab. IX. Fig. 151.

509. *Plani* KLGE *ad planum* ABDC *in omnibus punctis* F, f *&c. inclinatio eadem.*

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§. 212); fiatque HF=*hf* & FI=*fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256); conſequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipſi F*f* & H*h*=F*f*, itemque I*i*=F*f* (§. 257), adeoque etiam H*h* parallela ipſi I*i* (§. 495) & H*h*=I*i* (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter ſe parallelæ atque æquales ſunt (§. 257): erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in ſingulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De Solidorum Conſtructione.

PROBLEMA II.

Tab. VIII. Fig. 141, 142. 510. *Cubum* ADCBFEHG, *vel Parallelepipedum* IKMLNOPQ *in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur pro cubo rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).
2. Conſtruantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338, 340); pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKOP (§. 339, 341). Tab. VIII. Fig. 141, 142.

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis conſtruantur; ut

Tab. VIII. *Fig.* 141, 142. ut plana lateralia FBCG & MKPO videri poſſint; erit ſolidum AG cubus (§. 459); ſolidum vero LP parallelepipedum (§. 462).

PROBLEMA III.

511. *Priſma* ACBFDE *in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. *Fig.* 140.
1. Deſcribatur baſis, ex. gr. triangulum ACB, ſi priſma fuerit triangulare.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).
3. Conſtruantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).

Erit ACBFDE priſma triangulare (§. 456, 457).

PROBLEMA IV.

Tab. IX. *Fig.* 146. 512. *Pyramidem* DACB *in plano deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribatur baſis, ex. gr. triangulum ACB, ſi triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie averſum, non exprimatur.
2. Super AC & CB conſtruantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: ſeu, aſſumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA V.

Tab. IX. *Fig.* 152. 513. *Rete deſcribere, ex quo Cubus conſtrui poſſit.*

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249), & parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339). Tab. IX. *Fig.* 152.
3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM, & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH, & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares ſunt, *per conſtr.* & AI=CK=AC, *per conſtr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non abſimili modo oſtenditur eſſe IKML, MLNO, &c. quadrata ipſi AK æqualia. Eſt itaque ADFG rete, ex quo cubus conſtrui poteſt (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

514. *Rete deſcribere, ex quo Parallelepipedum conſtrui poteſt.* Tab. IX. *Fig.* 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam baſibus conſtruantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI conſtruantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedi æqualis (§. 339).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF = HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum conſtruere licet (§. 463, 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA VII.

515. *Rete pro Priſmate deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 154.

1. Conſtruatur baſis priſmatis, ex. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB=BK & DE=DK.
3. Super AB, BD & DE conſtruantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini priſmatis æqualis (§. 339).
4. Denique fiat ſuper GH triangulum GIH ipſi BKD æquale (§. 205).

Ex hoc reti priſma triangulare, nec abſimili modo multangulare quodcunque conſtructur (§. 457).

THEOREMA XX.

Tab. IX. Fig. 155.

516. *Superficies Cylindri recti, ſecluſis baſibus, æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine Cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi poſſit, ducanturque rectæ EG & FH inter ſe parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipſi GH parallelus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipſi EFHG æqualia, reſolvitur, quorum communis altitudo eſt EG ſeu altitudo cylindri (§. 229), baſes vero junctim ſumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri (§. 389). *Q. e. d.*

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet caſu tam exiguus aſſumitur, ut, ſi ejus differentia multiplicari ſupponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur diviſa, prodeat particula in dato caſu inaſſignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri poſſe patet, quod polygonum circulo inſcriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum eſt in aliis caſibus, ubi de infinite parvo ſermo fuerit. Sed ex inſtituto ea de re dicimus in Philoſophia prima.*

PROBLEMA VIII.

518. *Rete pro Cylindro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro deſcribantur circuli AB & CD. Tab. IX. Fig. 156.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 429).
3. Super BC altitudini cylindri æquali conſtruatur rectangulum (§. 339), ita ut CD ſit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti conſtrui poteſt cylindrus (§. 516).

THEOREMA XXI.

519. *Superficies Coni recti ſecluſa baſi, æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo latus Coni.* Tab. IX. Fig. 157.

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur: cumque angulus K ſit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), eſtque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78), conſequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti ſuperficies in innumera iſtiuſmodi triangula inter ſe æqualia reſolvitur (§. 467, 251). Ergo integra coni recti ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus altitudo lateri, baſis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur ſectori circuli latere coni tanquam radio deſcripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 415), adeoque ad ſuam peripheriam eam rationem habet, quam diameter baſis ad latus coni (§. 412 *Geom.* & §. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

521. *Rete pro Pyramide deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX Fig. 158. Sit ex. gr. conſtruenda pyramis triangularis.

1. Radio AB deſcribatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter ſe æquales.
2. Super DC conſtruatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis conſtrui poteſt (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera baſis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens eſt fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid facto opus ſit, ſi baſis fuerit polygonum, ſive regulare, ſive irregulare.*

PROBLEMA X.

523. *Rete pro Cono recto deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 159.

1. Diametro baſis AB deſcribatur circulus, & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.
2. Quæratur ad 2 AC & AB, in numeris determinatas, atque 360°, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
3. Radio CA, ex centro C deſcribatur arcus DE, & ope Inſtrumenti transportatorii fiat angulus DCE, conſequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis.

Erit ſector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodſi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH deſcribatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quæratur, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Eſt enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abſciſſo (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. *Rete pro Tetraëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198). Tab. IX. Fig. 160.
2. Super ſingulis ejus lateribus conſtruantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. *cit.*)

Ex hoc reti tetraëdrum conſtrui poteſt (§. 475).

COROLLARIUM.

526. Quodſi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in reſolutione Problematis conſtruantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti Octaëdrum conſtrui poteſt (§. 475). Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA XII.

527. *Rete pro Icoſaëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198). Tab. X. Fig. 162.
2. In baſi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.
3. Per C agatur ipſi AB parallela CE (§. 258), & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

Tab. X. *Fig.* 162.

4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G, &c.
5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L, &c.

Dico ex hoc reti conſtrui poſſe icoſaëdrum.

DEMONSTRATIO.

Demonſtrandum eſt, viginti triangula ACB, ABY, CBI, CIN, BSF, BIF, IOK &c. æquilatera & inter ſe æqualia eſſe (§. 475): id quod ſequenti ratione pateſcit. Quoniam CI parallela & æqualis ipſi AB, *per conſtruct.* & AC æqualis & parallela ipſi BI (§. 257); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233); conſequenter CAB = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo oſtenditur eſſe CBI = & ∽ BIF = & ∽ FIK, &c. Porro quoniam CI & BF ſunt inter ſe æquales atque parallelæ, *per conſtr.* erit NT parallela ipſi CS (§. 257), adeoque $y = u$ & $t = o$ (§. 233); conſequenter CIN = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo oſtenditur eſſe CBI = & ∽ IOK = & ∽ KPL, &c. = & ∽ ABY = & ∽ BSF = & ∽ FTG, &c. Sunt itaque omnia triangula inter ſe æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

Tab. X. *Fig.* 163.

528. *Rete pro Dodecaëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Deſcribatur pentagonum regulare (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipſi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & CH, BL, & DK, BN & EM, &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat interſectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F, &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS, &c. Tab. X. *Fig.* 163.
5. Eodem modo conſtruantur pentagona reliqua *a, b, c, d, e, f.*

DEMONSTRATIO.

Demonſtrandum eſt pentagona omnia eſſe regularia ipſique ABCDE æqualia (§. 475). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per conſtr.* Cumque anguli x menſura ſit arcus dimidius ABCD (§. 324), anguli vero pentagoni E ſimiliter ſit menſura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus x angulo pentagoni E æqualis (§. 141). Et quoniam eodem modo oſtenditur, eſſe quoque angulum u angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), idque, ob latus commune AB, ipſi AEDCB æquale (§. 177, 161). Eadem demonſtratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens eſt, omnia & regularia, & inter ſe æqualia eſſe. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

529. *Corpora geometrica conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 513, & ſeqq.).
2. Delineata exſcindantur, reſecta charta ſuperflua juxta eorum perimetros.
3. Exſciſſa agglutinentur chartæ coloratæ.
4. Hujus ſuperfluum ita reſecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Sin-

Tab. IX. *Fig.* 160.

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, ex. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, ſcalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri ſolidi.
6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA XXII.

530. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum, & Icoſaëdrum ſunt corpora regularia; nec præter hæc quinque aliud poſſibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus ſex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icoſaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter ſe æqualibus terminatur (§. 460, 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icoſaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad ſolidum efficiendum concurrunt (§. 525, 526, 527). Quoniam vero ſumma ſex iſtiuſmodi angulorum eſt 360° (§. 243); triangulis regularibus nullum corpus, præter illa tria, contineri poteſt (§. 452). In cubo tres anguli quadrati ſolidum efficiunt (§. 513). Quare cum ſumma quatuor iſtiuſmodi angulorum ſit 360° (§. 98, 144); quadratis nullum corpus continetur niſi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis ſolidum conſtituunt (§. 528). Quia vero ſumma quatuor eſt 432°, & ſumma trium in hexagono regulari 360°, atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad angulum vero ſolidum conſtituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus nonniſi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari poteſt. Corpora igitur regularia nonniſi quinque ſunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT IV.

De Dimenſione Solidorum.

PROBLEMA XV.

531. *Superficiem ac ſoliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

I. Cum ſuperficies cubi ex ſex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in ſeipſum ducatur, & factum per 6 multiplicetur (§. 370).

II. Quodſi idem factum in latus ducatur: prodibit ſoliditas cubi.

Sit ex. gr. latus cubi AB 2° 7′ 4″. Tab. X. *Fig.* 164.

AB =	274	Baſis =	75076
	274	AB =	274
	1096		300304
	1918		525532
	548		150152
ABDC =	75076	Solidit.	20° 5 7 0′ 8 2 4″
	6		
Superfic.	45° 0 4′ 5 6″		

DEMONS-

Demonstratio.

Tab. X. *Fig.* 164. Cum menſuræ ſolidorum ſint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477); ſoliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodſi jam latus in partes quotcunque æquales diviſum concipiamus, tot erunt cuborum ordines quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem exiſtent quot in baſi ACFE quadrata. Quare ſi baſin ACFE, hoc eſt, factum ex latere cubi in ſeipſum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

Corollarium I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit ſoliditas 1000: ſi illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum ſit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25); pertica cubica eſt 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo noſtro ſoliditas cubi eſt $20^{\circ}\ 570'\,824''$. Similiter cum pertica *Rhenana* ſit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica eſt 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare ſi in noſtro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit $11904'$ & $712''$. Quodſi $11904'$ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, $1536'$ & $712''$.

Scholion.

533. *Patet adeo, quantum diviſio menſuræ in 10 partes præſtet diviſione in 12.*

Corollarium II.

534. Cubi ſunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*), & æquales, ſi latera æqualia ſint.

Theorema XXIII.

535. *Parallelepipeda, Priſmata & Cylindri, quorum baſes & altitudines æquantur, æqualia ſunt.*

Demonstratio.

Concipiantur hæc corpora planis eorum baſibus parallelis ſecari in diſcos craſſitici quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot diſci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana ſectionum baſi parallelarum eidem æqualia (§. 463, 458, 466); baſes vero illorum corporum inter ſe æquales ſunt, *per hypoth.* etiam diſci ſinguli unius corporis diſcis ſingulis alterius æquantur (§. 87. *Arithm.*); conſequenter cum diſci omnes ſimul ſumti cum corporibus idem ſint, corpora tota inter ſe æqualia ſunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Problema XVI.

536. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem Parallelepipedi.*

Resolutio.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375, 387). Tab. VIII. *Fig.* 142.
2. Addantur in unam ſummam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum ſuperficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodſi baſis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit ſoliditas ejuſdem.

Sit ex. gr. LM = $36'$, MK = $15'$, MO = $12'$ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54.	1152	
	2	
Solid. $6^{\circ}480'$	$23^{\circ}04'$ Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonſtratio, qua in Probl. 15 (§. 531) uſi ſumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis (§. 535); ducta baſi in altitudinem habetur quoque ſoliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

Tab. X. Fig. 165. 537. *Planum diagonale* AHFD *dividit Parallelepipedum* ABDCEFG *in duo Priſmata* ADCEFH *&* ADBFGH *inter ſe æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo priſmata baſes æquales. Quare cum DF perpendicularis ad planum ACDB (§. 462), ſit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 486); eadem quoque erit utriuſque altitudo DF (§. 227), & ipſa itidem æqualia ſunt (§. 535). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Eſt ergo priſma triangulare dimidium parallelepipedi ſuper dupla baſi & ejuſdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem Priſmatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur baſis (§. 392, 400, 402) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum priſma circumcirca terminantium, & earum ſumma addatur facto antecedenti.

Ita prodibit ſuperficies integra priſmatis (§. 457). Tab. VIII. Fig. 140.

3. Quodſi baſis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejuſdem ſoliditas.

Ex. gr. Sit BC = 4° 3′ 2″, AG = 3° 5′ 7″
CD = 8° 6′ 9″.

½BC = 2 1 6″	AC = 4 3 2″
AG = 3 5 7	CD = 8 6 9
1 5 1 2	3 8 8 8
1 0 8 0	2 5 9 2
6 4 8	3 4 5 6
Baſis 7 7 1 1 2″	ACDE 3 7 5 4 0 8
	3
CD = 8 6 9	1 1 2 6 2 2 4
6 9 4 0 0 8	2 ABC 1 5 4 2 2 4
4 6 2 6 7 2	
6 1 6 8 9 6	Superfic. 128° 04′ 48″
67° 010′ 328″ Solidit.	

DEMONSTRATIO.

Priſma triangulare eſt dimidium parallelepipedi ſuper dupla baſi, ſed ejuſdem altitudinis (§. 539). Quodſi vero dupla baſis, hoc eſt parallelogrammum multiplicetur per altitudinem, ſoliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo ſi ſimpla, hoc eſt, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc eſt priſmatis ſoliditas habetur. Omnia priſmata reliqua cum in triangularia reſolvi poſſint; eorum quoque ſoli-

ſoliditas prodit, baſi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo noſtro aſſumſimus, priſmatis baſin eſſe triangulum regulare. Quodſi vero baſis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia ſunt, adeoque area uniuſcujuſque ſigillatim invenienda.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. VIII. *Fig.* 143. 541. *Data diametro* AB *& altitudine Cylindri* CF; *invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baſeos & baſis ipſa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit eſt ſuperficies, ſecluſis baſibus (§. 516).
3. Quare ſi eidem addatur factum antecedens; habebitur ſuperficies integra.
4. Ducatur quoque baſis in altitudinem. Factum erit ſoliditas cylindri.

Ex. gr. Sit AB = 5° 6′, CF = 24° 6′; erit

peripheria = 1 7°5 8 4
CF = 2 4°6 0 0
——————
1 0 5 5 0 4 0 0
7 0 3 3 6
3 5 1 6 8
——————
Sup. abſque Baſ. 4 3 2°5 6′6 4″|00
Dupl. Baſ. 4 9 2 3 5 2
——————
Superfic. 4 8 1°8 0′1 6″
Baſis = 2 4°6 1′7 6″
CF = 2 4 6 0
——————
1 4 7 7 0 5 6 0
9 8 4 7 0 4
4 9 2 3 5 2
——————
Solidit. 6 0 5°5 9 2′9 6 0″

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis ſit triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus æqualis erit priſmati triangulari eandem cum ipſo altitudinem & baſin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo ſoliditas habetur, ducta baſi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

542. *Pyramides & Coni ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis ſunt æquales.* Tab. X. *Fig.* 166.

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipſi AB parallela (§. 258), erit IK = LM (§. 226); adeoque ob CK = DM, *per hypoth.* CI = DL (§. 91 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus ſecantur pyramides baſibus ſuis parallelorum. Jam cum ſit △CEF ∽ △CAB, & △DGH ∽ △DAB (§. 268); erit CI : CK = EF : AB, & DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL & CK = DM, *per demonſtr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 *Arithm.*); conſequenter EF = GH (§. 177 *Arithm.*). Jam ſi pyramides ſecantur planis baſi parallelis, plana ſectionum baſi ſimilia ſunt (§. 474); conſequenter planum, cujus latus eſt EF, erit ad baſin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus eſt GH, erit ad eandem baſin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$, *per demonſtr.* planum, cujus latus eſt EF & planum, cujus latus eſt GH, ad baſin eandem rationem habent (§. 168 *Arithm.*); conſequenter plana

Tab. X. *Fig.* 166. plana iſta inter ſe æqualia ſunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & diſci, quantumlibet exiguæ craſſitiei, in eadem a baſi diſtantia inter ſe æquantur. Quoniam itaque, ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot diſci ſecari poſſunt quot ex altera; pyramis una alteri æqualis ſit neceſſe eſt (§. 88 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quodſi triangula ACB & ADB fuerint ſectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum baſi communi parallelorum (§. 468). Cum adeo circuli iſti æquales ſint (§. 171); eodem quo ante modo demonſtratur, conos æquales eſſe. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Priſma triangulare in tres Pyramides æquales dividi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. *Fig.* 167. Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498), atque baſes ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC ſit parallelogrammum (§. 457), △CFB = △BFE (§. 337). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales baſes. Quoniam vero hæ baſes in eodem ſunt plano, quod per ſe patet, & verticem communem in A habent; ab eodem vero puncto ſublimi A ad idem planum BEFC nonniſi unica perpendicularis duci poteſt (§. 489); pyramides iſtæ eandem quoque altitudinem habent; conſequenter æquales ſunt (§. 542). Quamobrem tres iſtæ pyramides inter ſe æquantur (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur priſma & debita ratione ſecetur; demonſtratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi poteſt.*

COROLLARIUM I.

545. Pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia reſolvi poteſt; quælibet pyramis eſt pars tertia priſmatis ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

547. Quia Conus pro pyramide infinitangula haberi poteſt, & Cylindrus pro priſmate infinitangulo; Conus pars tertia eſt Cylindri ſuper æquali baſi & ejuſdem altitudinis.

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem Pyramidis & Coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur ſoliditas priſmatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono baſin habentis (§. 539, 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit ſoliditas pyramidis vel coni (§. 546, 547).

Ex. gr. Si ſoliditas priſmatis fuerit 67010328‴, ut in Probl. 17 (§. 539); erit ſoliditas pyramidis 22336776‴. Si ſoliditas cylindri fuerit 605592960‴ ut in Probl. 18 (§. 541); erit ſoliditas coni 201864320‴.

Superficies pyramidis habetur, ſi tam baſis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ inveſtigentur (§. 392), atque in unam ſummam colligantur. Tab. IX. *Fig.* 146.

Coni denique recti ſuperficies prodit, peripheria baſeos in latus ejus dimidium ducta (§. 519), & baſi, qui circulus eſt, eidem addita.

Tab. IX. Fig. 144. Ex. gr. Sit diameter coni NM = 56′; erit peripheria 17584‴, baſis 246176″ (§. 429). Sit altitudo KL = 246′. Quoniam $LM = \frac{1}{2} NM = 28'$ & $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 61300$ (§. 417); erit KM = 2475″ (§. 269 *Arithm.*), conſequenter ſuperficies coni, ſecluſa baſi, 2176020″ & hinc integra 2422196″.

PROBLEMA XX.

549. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem Coni truncati: datis ejus altitudine* CH *& diametris baſium* AB *&* CD.

Tab. X. Fig. 168. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris baſium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH, & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut habeatur latus AC. (§. 417).
3. Semiſumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit ſuperficies coni truncati.

Sit ex. gr. AB = 8′, CD = 6′, CH = 10′, erit AH = 1′.

100 — 314 — 8′
8
―――
2512‴ periph. maj.

$CH^2 = 100'$
$AH^2 = 1$
―――
$AC^2 = 101$

Ergo AC = 1005‴ fere,

100 — 314 — 6′
6
―――
1884‴ Periph. min.

2512 Periph. maj.
1884 min.
―――
4396 Summa.
―――
2198 Semiſumma.
1005 AC
―――
10990
219800
―――
2020′89″90‴ Superfic. coni trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, ſi ſuperficies coni minoris ECD a ſuperficie majoris AEB ſubtrahitur. Sed ſuperficies minoris æquatur triangulo, cujus baſis HI peripheria diametro CD deſcripta, altitudo MK, latus EC; ſuperficies majoris vero triangulo, cujus baſis NO peripheria diametro AB deſcripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior ſit pars poſterioris; illa ex hac ſubtracta, relinquitur pro ſuperficie coni truncati trapezium parallelarum baſium HION, cujus quidem baſes HI & NO peripheriis diametris CD atque AB deſcriptis æquales ſunt, altitudo KL vero latus AC exiſtit. Habetur igitur ſuperficies coni truncati ſemiſumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 168. n. 1. n. 2.

II. Demiſſa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam ſit axis EF ad candem in cono recto perpendicularis (§. 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF ſecet duo plana parallela CD & AB, *per hypoth.* erunt ſemidiametri CG & AF parallelæ (§. 499); conſe-

conſequenter CG=HF (§. 226), & CH=FG (§. 238). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia ſemidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita ſemidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per Probl. 33 Arithm. (§. 302 *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa ſubducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat ſoliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; reſidua erit ſoliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE=40′, & hinc EG=30′.

Periph. major	2512‴
$\frac{1}{4}$ AB	200
Baſis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Periph. min.	1884‴
$\frac{1}{4}$ CD	$1\frac{1}{2}00$
	94200
	1884
Baſ. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Con. trunc.	$387266666\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus baſis æqualis ſuperficiei, altitudo autem radio ſphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur ſuperficies ſphæræ in quadratula infinite exigua reſoluta, quæ a planis non amplius diffident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens eſt ſphæram conſtare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inaſſignabili, hoc eſt, revera nulla, baſes vero ſimul ſumtæ ſuperficiei ſphæræ æquantur. Tota igitur ſphæra recte habetur pro pyramide, cujus baſis ſuperficies, altitudo radius ſphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

551. *Sphæra eſt ad Cylindrum ſuper æquali baſi & ejuſdem altitudinis ut 2 ad 3.* Tab. X. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inſcripto circa latus DC gyretur, quadratum quidem cylindrum (§. 465), quadrans hemiſphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) deſcribit. Altitudo horum corporum cum eadem ſit nempe DC (§. 227); ſi ea in diſcos quantumlibet exiguæ craſſitiei ſecentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH ſemidiameter unius diſci cylindri; erit EG ſemidiameter diſci reſpondentis in hemiſphærio, EF ſemidiameter diſci in cono. Cum vero hi diſci ſint circuli, quod ex geneſi patet (§. 131); erunt ipſi inter ſe ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc eſt, cum ſit, ob parallelismum EH & CB, *per hypoth.* EH=CB (§. 238)=CG (§. 40), atque ob CD : DA=CE : EF (§. 268) & CD =DA (§. 98), EC=EF, ut quadrata

rectarum CG, EG & EC. Quare ſi diſcum coni a diſco cylindri ſubtrahas, relinquitur diſcus ſphæræ (§ 417). Idem cum valeat de ſingulis diſcis ex reliquis diviſionibus emergentibus, ſoliditas ſphæræ relinquetur ſoliditate coni ex ſoliditate cylindri ſubducta. Eſt vero conus triens cylindri (§. 547). Ergo ſphæra duas ejuſdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri eſt ad Sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter ſphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habens 785000 (§. 541); conſequenter ſphæra 1570000 : 3. (§. 551). Eſt itaque cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc eſt, ut 300 ad 157 (§. 181, 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri eſſe ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In Demonſtratione enim aſſumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 426.).

THEOREMA XXX.

554. *Superficies Sphæræ eſt quadrupla circuli radio Sphæræ deſcripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ſphæra æqualis eſt pyramidi, cujus baſis eſt ſuperficies, altitudo radius ſphæræ (§. 550); ſuperficies ejus habetur, ſi ſoliditas per tertiam ſemidiametri aut ſextam diametri partem dividitur (§. 548). Eſt vero ſoliditas ſphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551, 541). Quare ſi hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, ſeu, quod perinde eſt, primum per diametrum, ut quotus ſint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc eſt, circuli circa diametrum ſphæræ deſcripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208, 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm.*), hoc eſt quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem eſt ſuperficies ſphæræ, *per demonſtrata.* Ergo ſphæræ ſuperficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi eſt factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli eſt factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo ſphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta; conſequenter rectangulo æqualis eſt, cujus baſis peripheria circuli radio ſphæræ deſcripti, altitudo diameter ſphæræ (§. 375).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro Sphæræ, invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio ſphæræ deſcribendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum eſt ſuperficies ſphæræ (§. 555).
3. Hoc ſi porro multiplicetur per ſextam diametri partem; prodibit ſphæræ ſoliditas (§. 550, 548).

Ex. gr. Sit diameter 5600''', erit

Periph. Circuli	17584''''
Diam.	5600
	105504000
	87920
Superf. ſphær.	98470400''''

Superf.

Superf. Sphær.	984704″ | 00
Diamet.	560″
	59082240
	4923520
	551434240

1 5 4
5 5 1 4 3 4 2 4 0 (91905706$\frac{2}{3}$ Sol. Sphær.
6 6 6 6 6 6 6 6

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000″ (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000″ numerus quartus proportionalis 91905706$\frac{2}{3}$ (§. 302 *Arithm.*), qui erit ſoliditas ſphæræ (§. 552).

SCHOLION.

557. *Segmenta ſphæræ ac ſectores inferius in Analyſi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA XXII.

558. *Metiri ſoliditatem ac ſuperficiem quinque Corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi ſoliditas inveſtigatur per Probl. 15 (§. 539). Tetraëdrum cum ſit pyramis, & Octaëdrum pyramis geminata, Icoſaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus conſtet, quarum baſes in ſuperficie Icoſaëdri & Dodecaëdri ſunt, vertices in centro coëunt (§. 472, 475); horum corporum ſoliditas habetur per Probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, ſi area figuræ unius ex terminantibus ipſa quæratur (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro ſeu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icoſaëdro per 20 (§. 475).

PROBLEMA XXIII.

559. *Corporis irregularis cujuſcunque ſoliditatem invenire.* Tab. X. *Fig.* 170.

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua aut arena ſuperfundatur, & altitudo aquæ ſeu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, obſervetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus baſis ECGF, altitudo BC; ejus ſoliditas invenietur per Probl. 16 (§. 536).

Sit ex. gr. AB 8′, AC 5′; erit BC 3′. Sit porro DB 12′, BE 4′; erit ſoliditas corporis 144′.

SCHOLION I.

560. *Quodſi corpus in aqualiculo iſtiuſmodi commode deponi nequeat, ex. gr. ſi ſtatuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; priſma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipſum conſtrui debet ex aſſeribus. Reliqua peragenda ſunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo poteſt, quot linearum cubicarum ſit aliquod lignum, ſaxum, metallum, aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION II.

562. *Hinc in uſus futuros conſtrui poteſt Tabula gravitatem diverſorum corporum oſtendens ſecundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydroſtaticas aliis*

aliis adhuc modis fieri poteſt, uti ſuo loco oſtendetur.

PROBLEMA XXIV.

563. *Invenire ſoliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, reſolutio eadem, quæ Problematis præcedentis (§. 559).

Caſus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, priſma, cylindrus, ſphæra, pyramis, vel conus; ſoliditas primum totius corporis cavitate incluſa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere ſupponitur, per methodos ſupra traditas (§. 536, 539, 541, 548, 556) inveniatur: hac enim ex iſta ſubducta, relinquitur ſoliditas corporis cavi.

Sit ex. gr. ſoliditas cylindri cavi ABCD inveniende, ſitque diameter totius corporis AB 56'', longitudo AC 2° 4' 6'', erit ſoliditas cylindri incluſa cavitate 605' 592'' 960'''. Sit diameter cavitatis 500''' ; erit ſoliditas 482' 775'' 000''': quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi 122' 817'' 960'''. Tab. X. Fig. 171.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. *Corpora ſimilia ſunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & ſimilia exiſtunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concurſu gigni poſſe concipiamus; eodem modo determinantur, ſi plana terminantia & numero æqualia fuerint & ſimilia (§. 119). Sunt igitur & ipſa ſimilia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis ſimilibus anguli homologi ſint æquales (§. 175), anguli vero ſolidi homologi ex concurſu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus ſimilibus multitudine æqualium oriantur (§. 564); in corporibus ſimilibus anguli ſolidi homologi æquales ſunt (§. 449).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia (§. 175); ſi ex. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud ſimile *abdcehgf* (quod in Tabula non expreſſimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd*, & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo ſit AB : *ab* = BD : *bd*, & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arithm.*); corporum ſimilium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione exiſtunt. Tab. X. Fig. 165.

COROLLARIUM III.

567. Cubus ſex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia ſimilia (§. 98, 175). Ergo cubi omnes ſunt ſimiles (§. 564).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regu-

regularibus, adeoque ſimilibus (§. 106, 175) & ejuſdem quidem ſpeciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejuſdem ſpeciei ſimilia ſunt (§. 564).

Corollarium V.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icoſaëdra ſimilia ſunt (§. 475).

Theorema XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum ſimilium altitudines ſunt ut radii baſium; axes ſunt itidem ut radii baſium & iis ſub eodem angulo junguntur.*

Demonstratio.

Tab. VIII. Fig. 143. Tab. IX. Fig. 144.

Si coni & cylindri ſimiles ſunt, ea in iiſdem eadem ſunt, per quæ a ſe invicem diſcerni poſſunt (§. 24 *Arith.*). Patet vero conos & cylindros non poſſe diſtingui, niſi per rationem axis CF vel KL ad diametrum baſis DE vel NM, atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465, 467). Axes igitur in conis & cylindris ſimilibus ad diametros baſium eandem rationem habent, & ad eas ſimiliter inclinantur, ſeu ad eundem angulum inſiſtunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris ſolidis, perinde ac in planis (§. 227), altitudo ſit recta ex vertice in baſin ad angulos rectos ducta; in conis & cylindris rectis axes ſunt altitudines (§. 465, 467), adeoque patet *per demonſtrata*, altitudines tum eſſe diametris baſium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis ſubtendunt eoſdem angulos obliquos, ſub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 267), conſequenter etiam diametris baſium (§. 167 *Arithm.*) proportionales ſunt. *Quod erat alterum.*

Theorema XXXIII.

571. *Omnis Sphæra eſt alteri ſimilis.*

Demonstratio.

Omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem, patet ex demonſtratione Theorematis 1 Part. 1 (§. 135). Sed ſphæra deſcribitur ſemicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 470): omnes igitur ſphæræ eodem modo determinantur (§. 119), adeoque ſimiles ſunt (§. 120). *Q. e. d.* Tab. IX. Fig. 145.

Theorema XXXIV.

572. *Omnia Priſmata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

Demonstratio.

Sunt enim ut facta ex baſibus in altitudines (§. 536, 539, 541, 548, *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Corollarium I.

573. Quare ſi baſes fuerint æquales, altitudinum, ſi altitudines, baſium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

Corollarium II.

574. Cylindrorum & conorum baſes ſunt circuli (§. 465, 467). Circuli ſunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicunque ſunt in ratione compoſita ex ſimplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & ſi fuerint æque alti, ſunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

Corollarium III.

575. Quare ſi in cylindris altitudo fuerit diametro baſium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum baſium (§. 159 *Arithm.*).

Problema XXV.

576. *Invenire Cubum dato corpori, cujus ſoliditas inveniri poteſt, æqualem; vel qui ſit ad hoc in data quacunque ratione, ex. gr. ut* 3 *ad* 1, *vel ut* 1 *ad* 4.

Resolutio.

1. Inveſtigetur ſoliditas corporis per Problemata *Cap præc.* tradita.
2. Ex ea, vel ejus multiplo aut ſubmultiplo deſiderato, ex. gr. triplo aut ſubquadruplo, extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quæ erit latus cubi deſiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

Ex.gr.Sit ſoliditas cylindri 107° 171′875″ reperietur latus cubi æqualis 4° 7′ 5″.

Problema XXVI.

577. *Dato corpore, cujus ſoliditas inveniri poteſt; invenire dimenſiones alterius ipſi æqualis dati generis & altitudinis vel baſeos datæ.*

Resolutio.

1. Inveniatur ſoliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per baſin datam: quotus erit altitudo in priſmatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536, 539, 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).
3. Si altitudo detur, ſoliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur baſis priſmatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur baſis pyramidum & conorum (§§. *cit.*)
4. Pro parallelepipedis & priſmatis triangularibus & quadrangularibus area baſeos diſcerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387, 392, 402, 456, 462), quorum alteruter pro baſi triangularis priſmatis per 2 multiplicanda (§. 392); & inſuper pro multangularis baſi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex baſi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

Ex. gr. Sit ſoliditas alicujus corporis 3°456′978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2°4′6″. Reperietur baſis 1°40′53″ fere; diameter 134″.

Theorema XXXV.

578. *Corpora ſimilia, Priſmata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides, atque Coni ſunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

Demonstratio.

Sunt enim in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 572). Sed baſes ſunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406, 409) & altitudines lateribus baſium homologis proportionales ſunt (§. 566). Ergo corpora ipſa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, exiſtunt (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Theo-

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæræ ſunt ut Cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. *Fig.* * Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumſcriptum (§. 351). Quodſi ſemicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille ſphæram, hoc cylindrum deſcribet, cujus altitudo AB diametro baſis IH æqualis (§. 470, 465). Quare ſi ponamus circulum adhuc alium cum quadrato ſimiliter circumſcripto; quoniam ex Theorematis 1 Part. 1. demonſtratione conſtat (§. 135), omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem, & AB ad BH utrobique eſt ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri ſimile (§. 175); inde generabitur ſphæra & cylindrus alteri ſimilis (§. 119, 120). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a ſe invicem diſtingui debebat, quod in utroque caſu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad ſuam ſphæram ut alter ad ſuam ſphæram (§. 132 *Arithm.*); conſequenter ſphæræ ſunt inter ſe ut iſti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc eſt, ut cubi earundem exiſtunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia Parallelepipeda, Priſmata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant baſes & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex baſibus in altitudinem æqualia ſunt (§. 536, &c.). Quamobrem altitudo corporis A eſt ad altitudinem alterius B uti reciproce baſis ipſius B ad baſin ipſius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, eſt ad Cubum diametri ut* 785 *ad* 1000. Tab. X. *Fig.* 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit baſis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* ſoliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

Problema XXVII.

582. *Virgulam conſtruere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus menſurarum fluidi alicujus, ex. gr. vini, cereviſiæ, &c. in vaſe cylindrico contenti.*

Resolutio.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. 1. Diameter vaſis cylindrici ABDE, uni menſuræ qua ad fluida menſuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249).

2. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vaſis, quod duas menſuras capit, ſed eandem cum vaſe priori altitudinem habet.

3. Fiat A2 = B1, erit B2 diameter vaſis tres menſuras capientis, ſed ejuſdem denuo altitudinis cum vaſe, quod nonniſi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vaſorum capaciorum A3, A4, A5, A6, A7 &c.

4. In unum virgulæ latus transferantur diviſiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni menſuræ æqualis, quoties fieri poteſt. Ita virgula conſtructa eſt.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, Tab. X. Fig. 172.
A7, &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum Scalæ geometricæ diviſæ (§. 277) centeſimis aut milleſimis determinari poſſunt. Sit nempe diameter AB = 1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in uſum conſtructa eſt Tabula ſequens:

Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

De-

DEMONSTRATIO.

Tab. X. *Fig.* 172. Cylindri eandem altitudinem habentes ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vaſis duas, tres, quatuor &c. menſuras capientis eſt duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vaſis menſuram nonniſi unam capientis. Quare ſi inde radices extrahantur, habebuntur in reſolutione altera diametri ipſæ (§. 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB=A1, erit ipſius B1 quadratum duplum, quadratum ipſius B2 triplum, quadratum ipſius B3 quadruplum &c. quadrati ipſius A1 (§. 417). Unde denuo patet eſſe rectas A2, A3, A4 &c. diametros vaſorum quæſitas. Quodſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat vas cylindricum eandem cum iſto baſin, ſed altitudinem illius habens, quod unam menſuram capit. Quare ſi porro, ope alterius diviſionis in virgula factæ, inveſtiges quoties altitudo unius menſuræ in altitudine vaſis dati contineatur, & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus menſurarum cavitatem vaſis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. *Ex. gr. Sit diameter vaſis cylindrici* 8, *altitudo* 12; *erit numerus menſurarum, quas capit* 96.

SCHOLION II.

584. *Altitudo cylindri menſuram unam capientis quo minor aſſumitur, eo diameter baſis fit major. Unde tam ipſa, quam diametri cylindrorum plures menſuras capientium poſtea facilius in ſuas minutias ſubdividuntur.* BAYERUS (*a*) *ſuadet, ut altitudo nonniſi unius digiti aſſumatur.*

SCHOLION III.

585. *Inveniuntur autem diametri vaſorum unam vel plures partes decimas menſuræ capientium, ſi decima vel plures decimæ partes vaſis unam menſuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur baſis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per Probl.* 58 (*§.* 434). *Eodem modo inveniuntur diametri pro ſcrupulis vaſorum duas & plures menſuras capientium.*

SCHOLION IV.

586. *Quodſi altitudo vaſis conſtanter eadem retineatur, diametri pro menſuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius menſuræ* 1 *ſeu* 1000 *partium decimalium; erit ejus quadratum* 1000000: *cujus pars decima* 100000. *Inde extracta radix quadrata* 316 *continet partes decimales diametri unius menſuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam menſuræ partem continentis, ejuſdem tamen cum cylindro integram menſuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, nempe* 200000, *radix extrahatur; prodit diameter baſis duas decimas unius menſuræ capientis* 447, *& ita porro. Quodſi quadrato diametri unius menſuræ* 1000000 *adjicias partem decimam* 100000 *& ex ſumma extrahas radicem quadratam* 1.049; *erit ea diameter vaſis, quæ capit* $1\frac{1}{10}$ *menſuræ. Ratio patet per Demonſtrationem Problematis præſentis. Atque ſic patet, quomodo Virgula pithometrica accuratius conſtrui poſſit, ut intervalla inter menſuras integras ſubdividantur in partes decimales.*

(*a*) *In der vollkommenen Viſier-Kunſt,* c. 25. *p.* 126.

Diametri pro menſuris integris & earum partibus decimalibus.

		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

SCHOLION V.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum menſuram hic conſtitui cylindrum, quemadmodum ſupra ſolidorum omnium menſura aſſumtus eſt cubus. Unde & Virgula pithometrica ſic conſtructa* Virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum menſura conſtituitur circulus, ſicuti ſupra omnium ſuperficierum menſura quadratum.*

PROBLEMA XXVIII.

588. *Invenire ſoliditatem Dolii, hoc eſt, determinare numerum menſurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi Probl. præc. (§. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB. Tab. X. *Fig.* 173.
2. Cum, experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus baſis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 330 *Arithm.*), qui *Diameter æquata* dici ſolet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum, *vi demonſtrationis Problem. præced.* (§. 582) numerus menſurarum, quas capit Dolium.

Sit ex. gr. AB = 8, GH = 12

erit AB + GH = 20

$\frac{1}{2}$ (AB + GH) = 10.

AC = 15

$\frac{1}{2}$(AB + GH) = 10

capac. dolii 150 menſ.

SCHOLION I.

589. *Quodſi contingat, fundum non eſſe perfecte circularem, ſed unam diametrum eſſe altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum ſemiſummam pro diametro circuli fundo Dolii æqualis aſſumere ſolent.*

SCHOLION II.

590. *Tabulæ, ex quibus inter ſe coaſſatis Dolia conſtrui ſolent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non aſſumenda eſt recta FE, ſed AC, quæ habetur, ſi quantitas prominentiæ tabularum,*

una

Tab. X. Fig. 173. *una cum ejus dimidio cui fundi craſſities æqualis ſupponitur, a recta FE utrinque ſubtrahitur. Solent autem quantitates ſubtrahendas creta notare utrinque in ipſa ſuperficie Dolii, ex. gr. in K, ſi quantitas ſubtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem Virgulam parant, in partes minutas æquales diviſam.*

SCHOLION III.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema craſſis & orbibus ligneis pariter craſſis Dolium conſtruunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION IV.

592. *Poſſemus equidem ſoliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo ſupra corpora cava metiri docuimus (§. 563): ſi enim per ſoliditatem unius menſuræ divideretur, prodiret Dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obſtat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION V.

593. *Proſtat etiam methodus, qua ſine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in* Batavia *& variis* Germaniæ *locis. Sed cum ſupponat, omnia Dolia eſſe inter ſe ſimilia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc eſt, ſemiſummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* KEPLERUS (*a*) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas menſorum in ſe continet.* Virga enim, *inquit,* introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum qui vincula ſunt, viminumque quibus circuli lignei ſtringuntur. Eliminat exceſſum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia menſurandi una eademque opera præſtare nulla poteſt. *Unde ad privatorum ſecuritatem fraudeſque eliminandas ſuadet,* ut lex illa Dolii conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum, magiſtratuum autoritate diligentiaque conſervetur, pœniſque & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in Doliis* Auſtriacis *obſervatur.*

SCHOLION VI.

594. *Sunt, qui aſſumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus ſoliditatem per Probl. 20 (§. 549) quærunt. Alii cum aliis corporibus geometricis id comparant.* CLAVIUS (*b*) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro fruſto ſphæroidis* Archimedeæ *habet, quoad prius conſentiente, quoad poſterius vero contradicente* KEPLERO (*c*). CLAVIO *tamen aſſentitur* OUGHTREDUS, *eumque in finem regulam a ſe inventam propoſuit* (*d*). WALLISIUS *pro fruſto fuſi parabolici habet* (*e*). *Enimvero cum methodus propoſita praxi ſatis reſpondeat, reliquæ vero quæ ab* Anglis *potiſſimum proponuntur* (*f*), *utut ex profundiori Geometria derivatæ, moleſtiores ſint, nec ex Elementis Geometriæ demonſtrari poſſint; illa contenti eſſe poſſumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ menſoriæ a* KEPLERO *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA XXIX.

595. *Conſtruere Virgulam pithometricam, qua ſine calculo capacitatem Dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum vaſa pro quibus Virga hæc paratur, eſſe debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoliditas unius menſuræ ad numerum quartum proportionalem, per Probl. 33 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam menſuram capientis (§. 581). Tab. X. Fig. 172. n. 1.

2. In-

(*a*) In *Stereometria doliorum vinariorum*, Part. 3. art. 3. f. n. 3.

(*b*) *Geom. pract.* lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.

(*c*) In *Stereometria* part. 2. fol. H. 3.

(*d*) In *Clave mathematica* c. 19. p. m. 103.

(*e*) In *Algebra* c. 81. Vol. II Oper. f. 350.

(*f*) Vid *The general Gauger* by Mr. DOUGHARTY p. 141 & ſeqq.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. Inde ergo ſi extrahitur radix cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vaſis cylindrici menſuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem, & diagonalis BE aſſumatur pro indice capacitatis, *per hypoth.* ſi ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vaſis BE menſuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales ſimilium vaſorum, quæ capiunt menſuras duas, tres. quatuor &c. tenendum eſt, ea eſſe ut cubos diametrorum (§. 578), conſequenter etiam, ob ſimilitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260 *Arithm.*). Quare ſi diagonalis vaſis unam menſuram capientis concipiatur in 1000 partes diviſa, & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000, &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vaſorum, quæ duas, tres, quatuor, &c. menſuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in Virgulam, & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac Scala particulas milleſimas diagonalibus reliquis competentes in Virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præſente caſu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis eſt ſemiſummæ diametrorum orbis AB & ventris GH, eſtque $FB = \frac{1}{2}(AB+GH)$, adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter ſemiſumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus ſtatim innoteſcit, ſi per orificium G virgula uſque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.* Tab. X. Fig. 173

SCHOLION I.

596. *Conſtructioni Virgulæ itaque inſervit Tabula ſequens.*

Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag	Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

SCHOLION II.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari ſolet, quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia Dolia ſimilia conſtruitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam menſuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PRO-

PROBLEMA XXX.

598. *Virgam pithometricam conſtruere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus menſurarum ex. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum viſum fuerit.

Tab. IV. *Fig.* 81.

2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus ſit horizonti parallelus, Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emiſſa, quæ numero menſurarum per diviſionem paulo ante n. 1. invento reſpondet, in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigeſimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigeſimis quantitatis fluidi in Dolio contenti reſpondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter ſe æquales, ultra vigeſimarum intervalla inæqualia continuandas, ex. gr. in 200 aut plures.

Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo conſtructa eſt.

SCHOLION.

599. *Quodſi in uſum domeſticum pro eodem Dolio iſtiuſmodi Virgulam parare volueris, ſufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus eſt facici alterius in partes æquales diviſione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emiſſæ reſpondent, ex. gr. ſi integrum Dolium capiat 64 menſuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis ſcribitur 63.*

PROBLEMA XXXI.

600. *Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur capacitas totius Dolii *per Probl.* 28 (§. 588). Tab. X. *Fig.* 173.
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus ſit horizonti parallelus, ne ſcilicet fluidum in una Dolii parte altius ſit, quam in altera, Virga per Problema præcedens (§. 598) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rurſus extracta, notetur quot partes in facie æqualium vino madidæ ſint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie profunditati totius Dolii GH reſpondentium ad numerum ſimilium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo ſcrupulorum vigeſimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per Probl.* 33 *Arithm.* (§. 302) inveniendum.

Tab. X. *Fig.* 173. 5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i.*

Ex. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 menſurarum.

```
Fiat :  160 —— 58 —— 120     +2
 40)      4     3      3    +7* (43¼
               174           **
```

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in Scala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt.

SCHOLION.

601. *Si Dolia omnia eſſent ſimilia per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in Dolio non pleno: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori geometrico ſatisfaciens & praxi reſpondens. Quam enim* KEPLERUS *dedit* (*a*), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (*b*): *ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* BAYERUS (*c*) *&* DOUGHARTY (*d*) *tradunt.*

(*a*) In *Stereometria Doliorum*, f. O. 2. b.

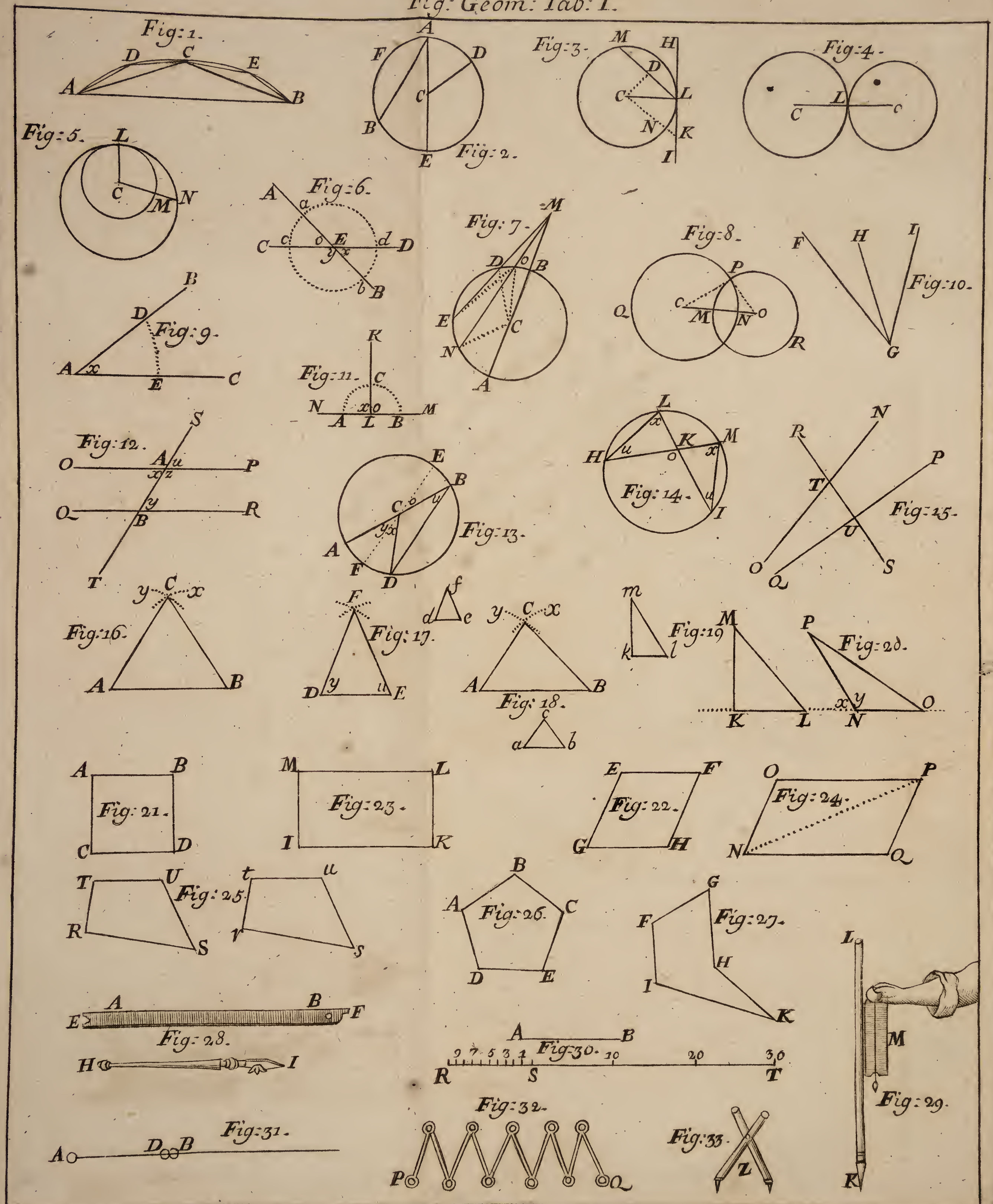
(*b*) *In dem Auszuge der uhralten Meſſe-Kunſt* ARCHIMEDIS §. 88. f. 95.

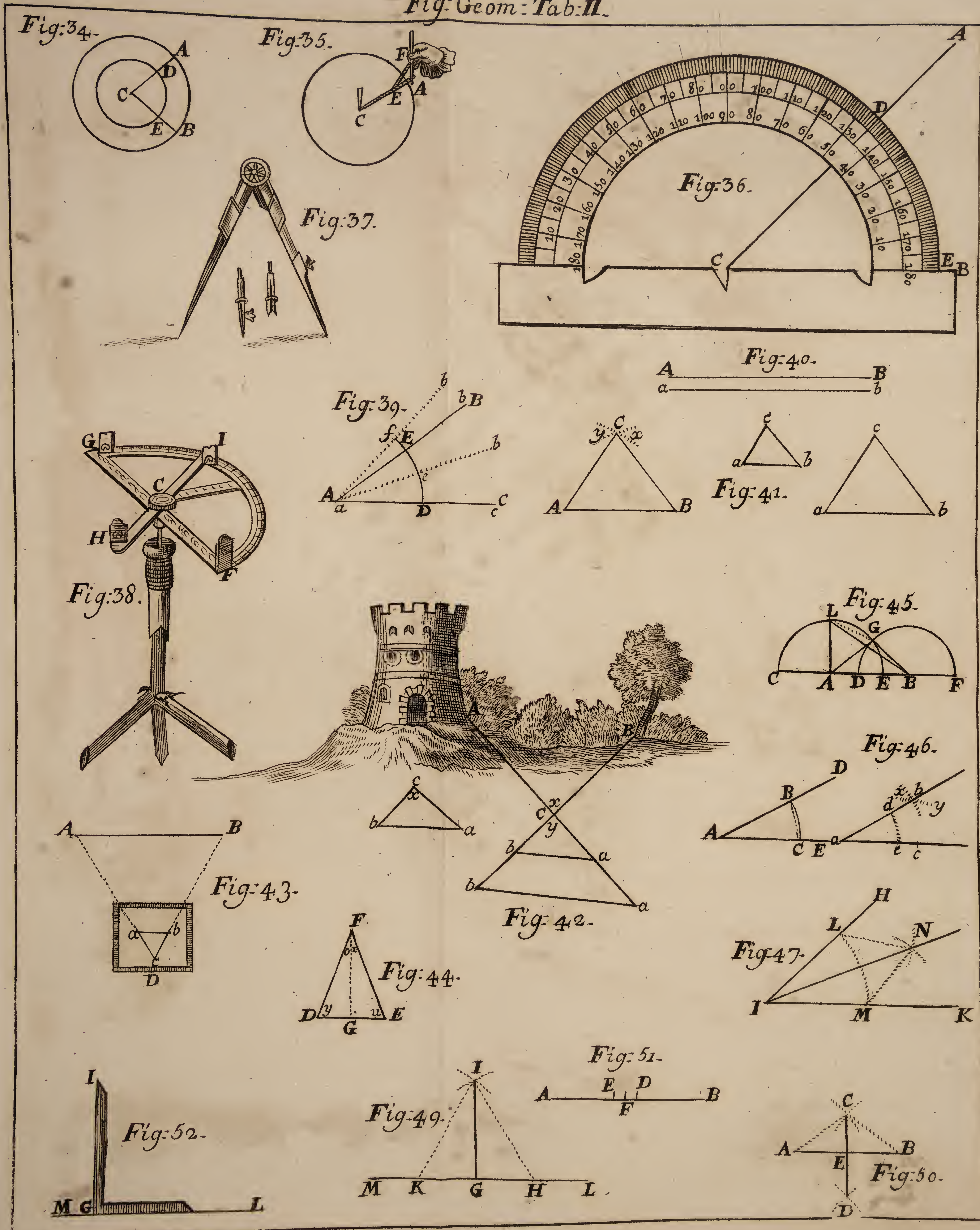
(*c*) In *Conometria Mauritiana* c. 9. p. 102. & ſeqq.

(*d*) *The General Gauger* p. 164. & ſeqq.

Finis Elementorum Geometriæ.

Fig: Geom: Tab: I.




Fig:34.
Fig:35.
Fig:36.
Fig:37.
Fig:38.
Fig:39.
Fig:40.
Fig:41.
Fig:42.
Fig:43.
Fig:44.
Fig:45.
Fig:46.
Fig:47.
Fig:49.
Fig:50.
Fig:51.
Fig:52.

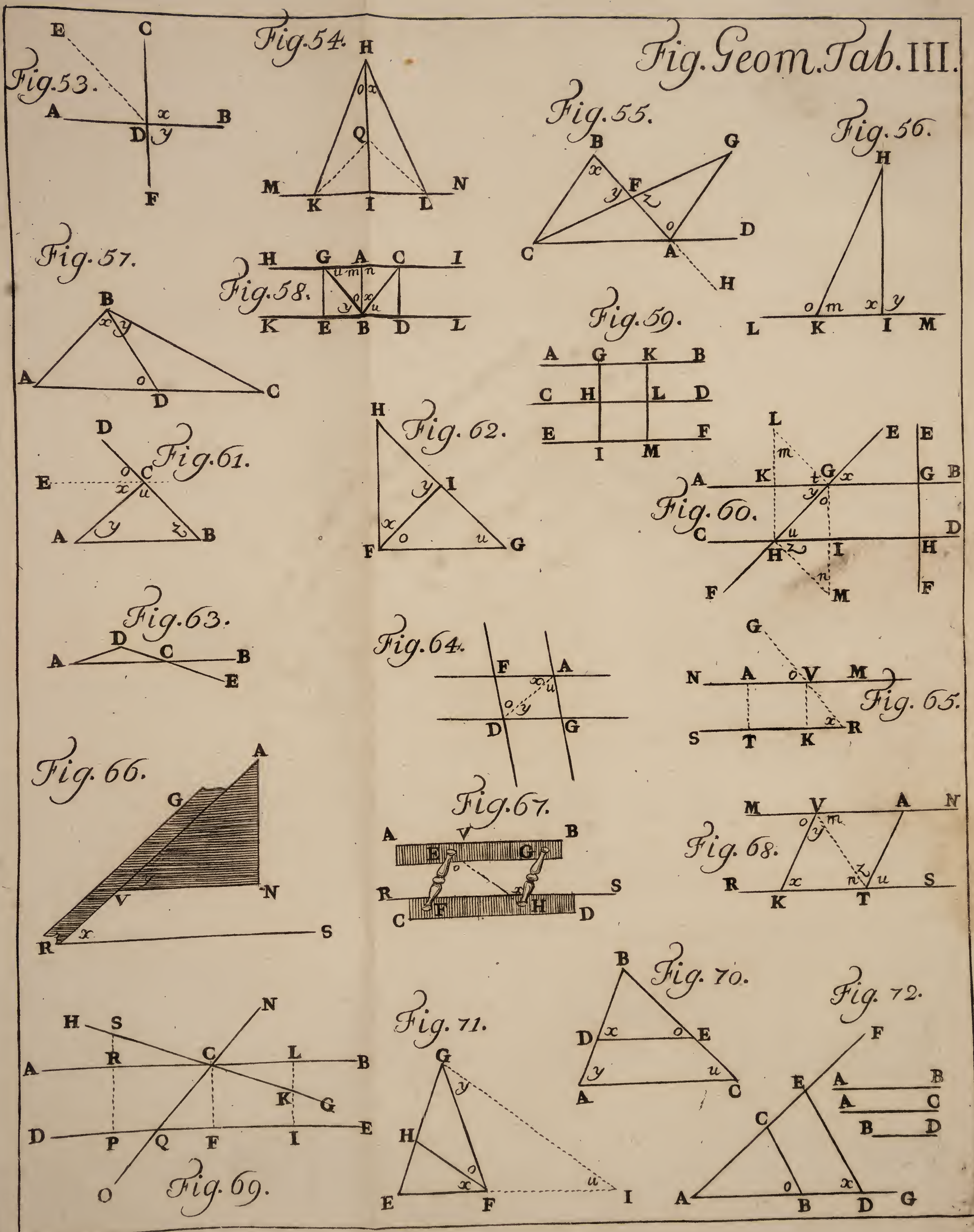


Fig. Geom. Tab. III.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.

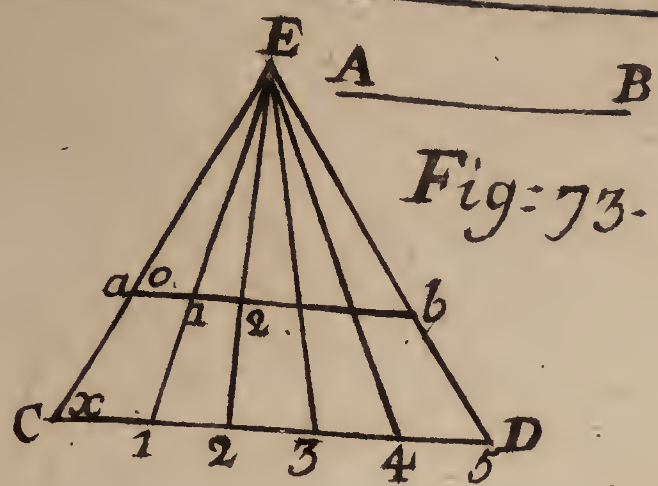


Fig: 73.

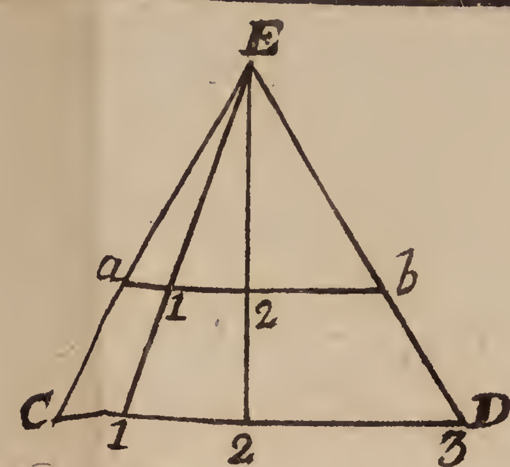


Fig: 74.

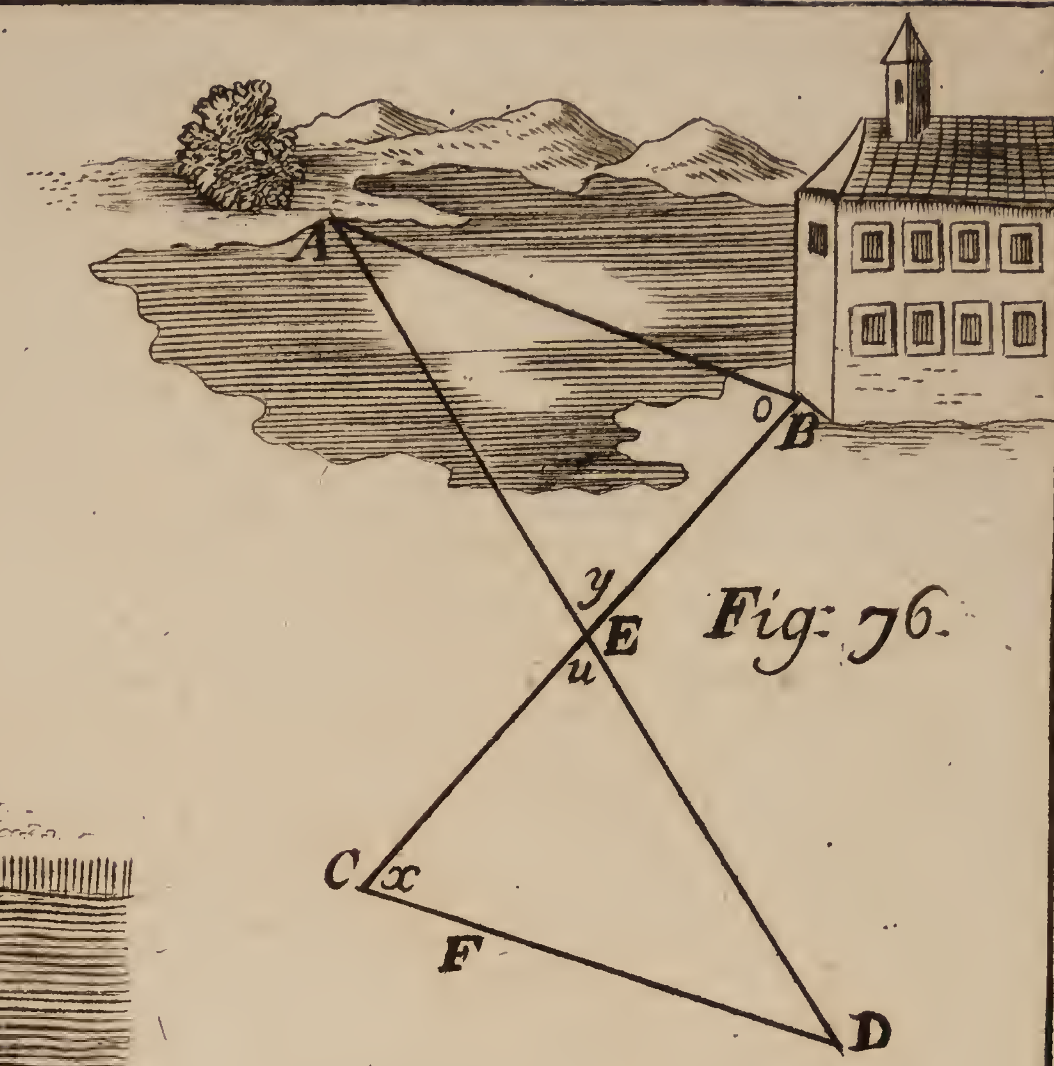


Fig: 76.

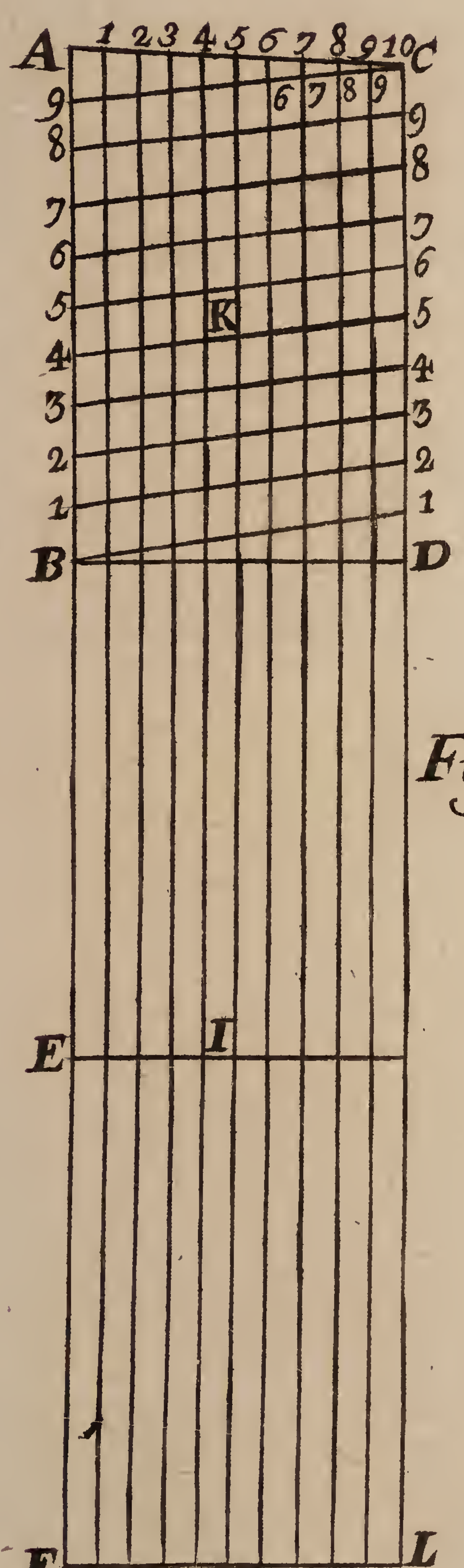


Fig: 75.

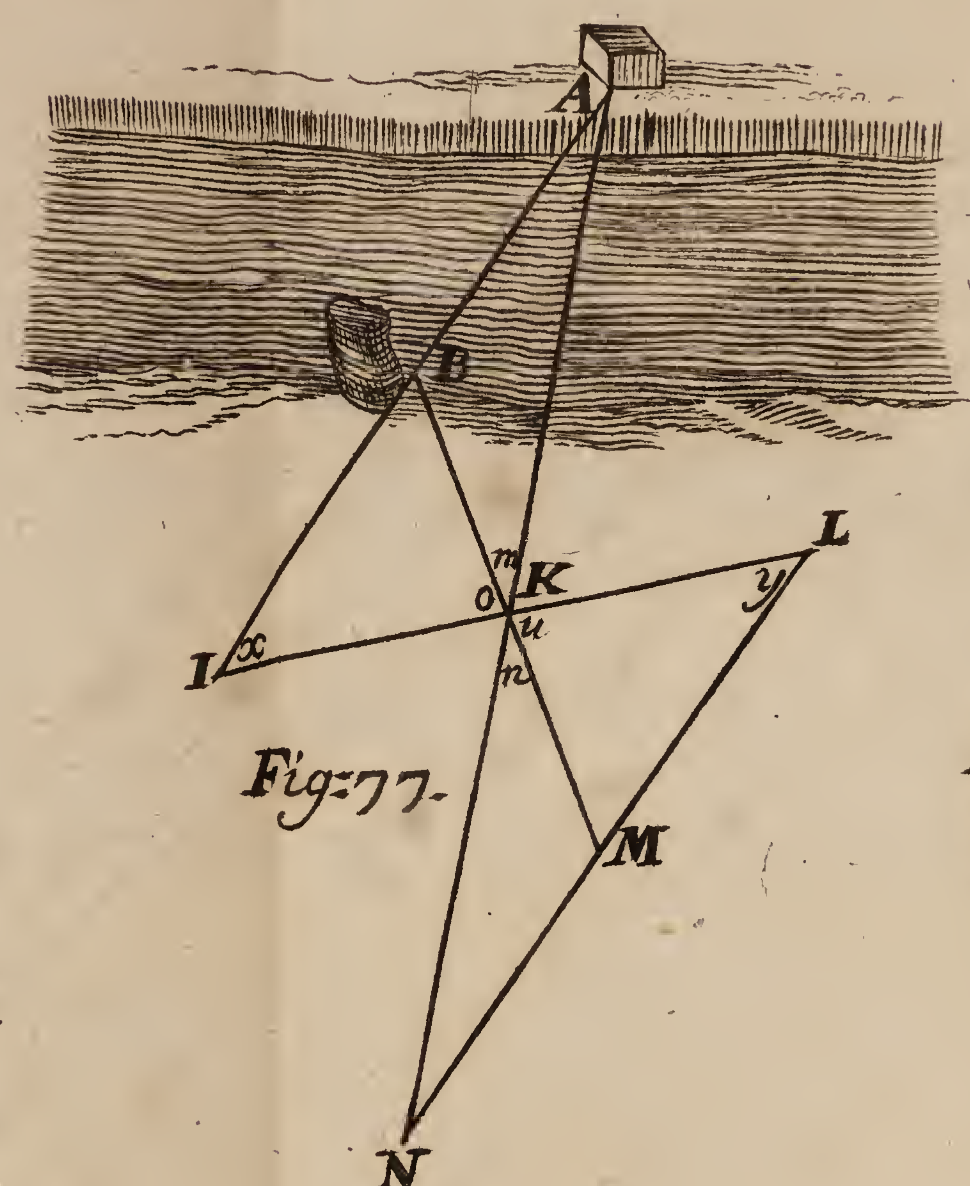


Fig: 77.

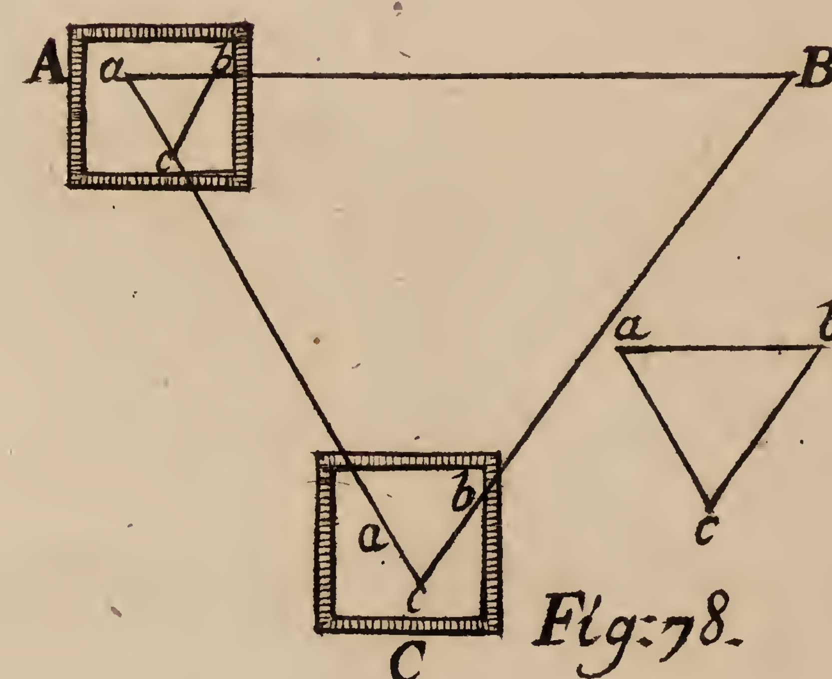


Fig: 78.

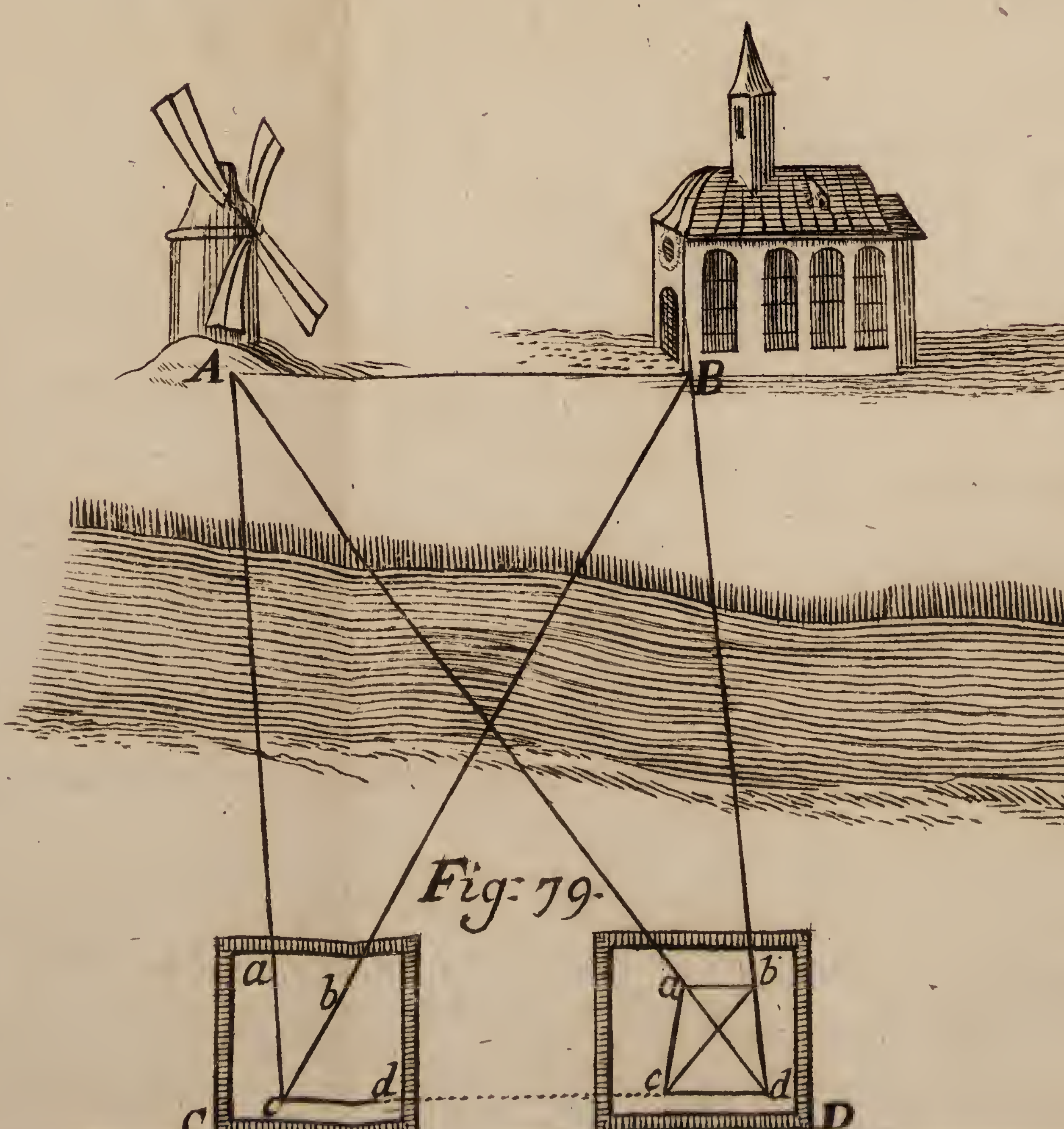


Fig: 79.

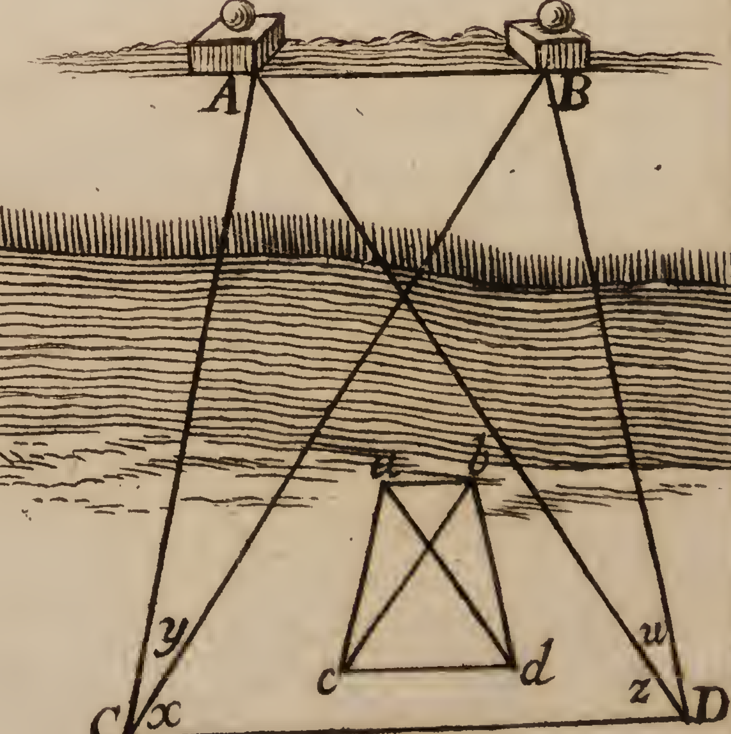


Fig: 80.

Fig: 81.

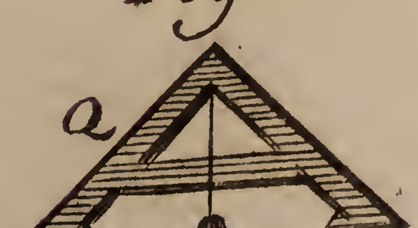


Fig: Geom: Tab: V.

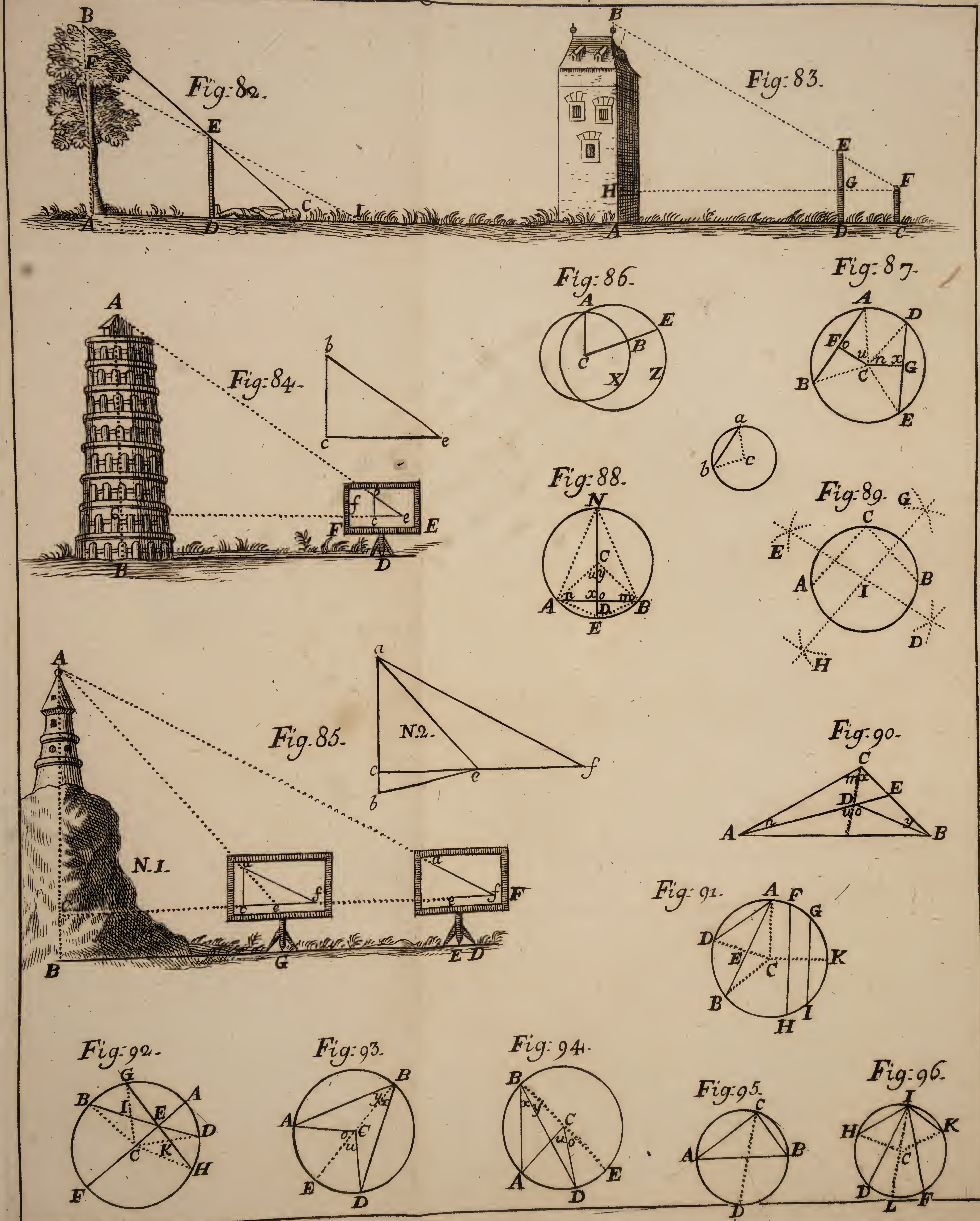


Fig. Geom. Tab. VI

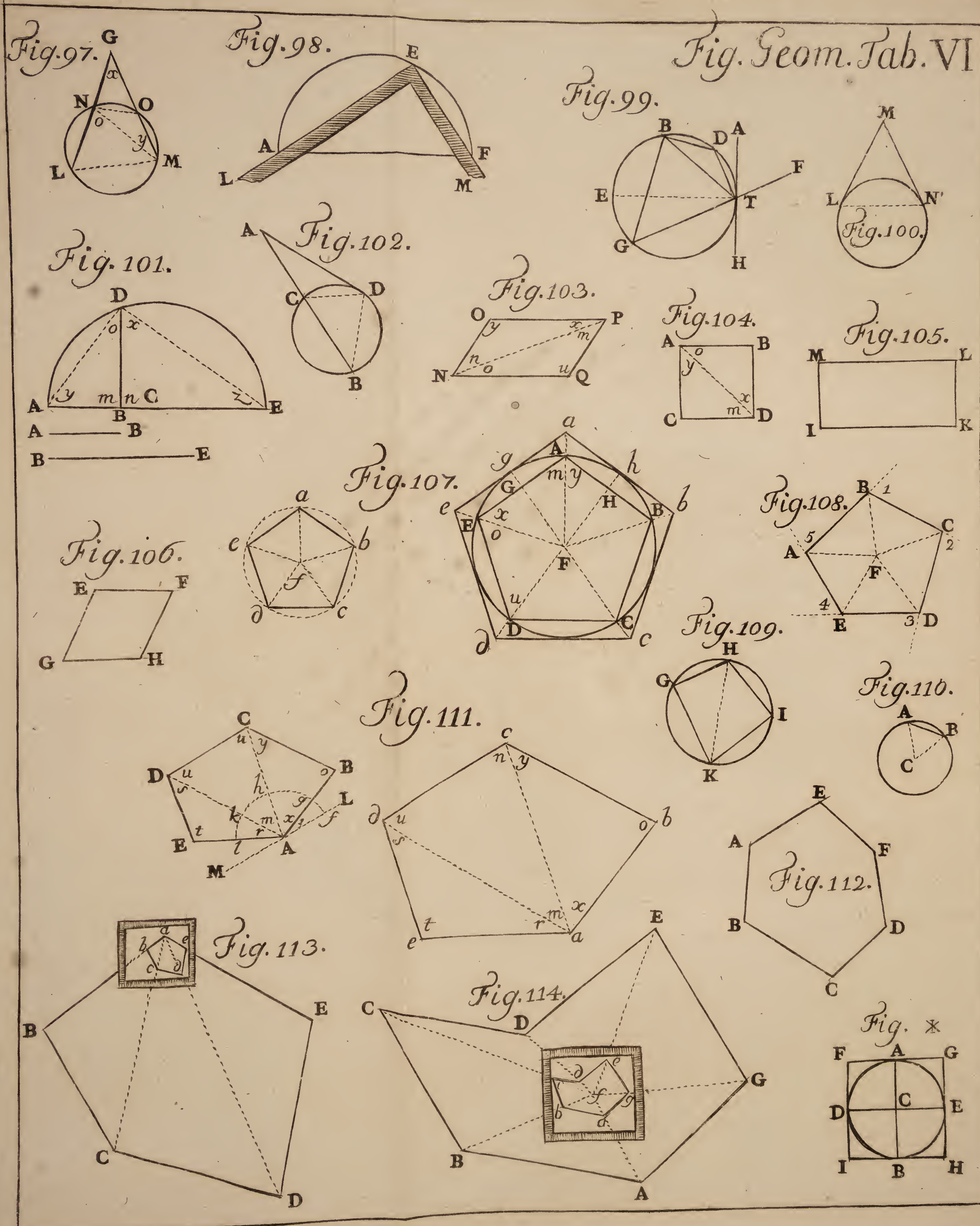
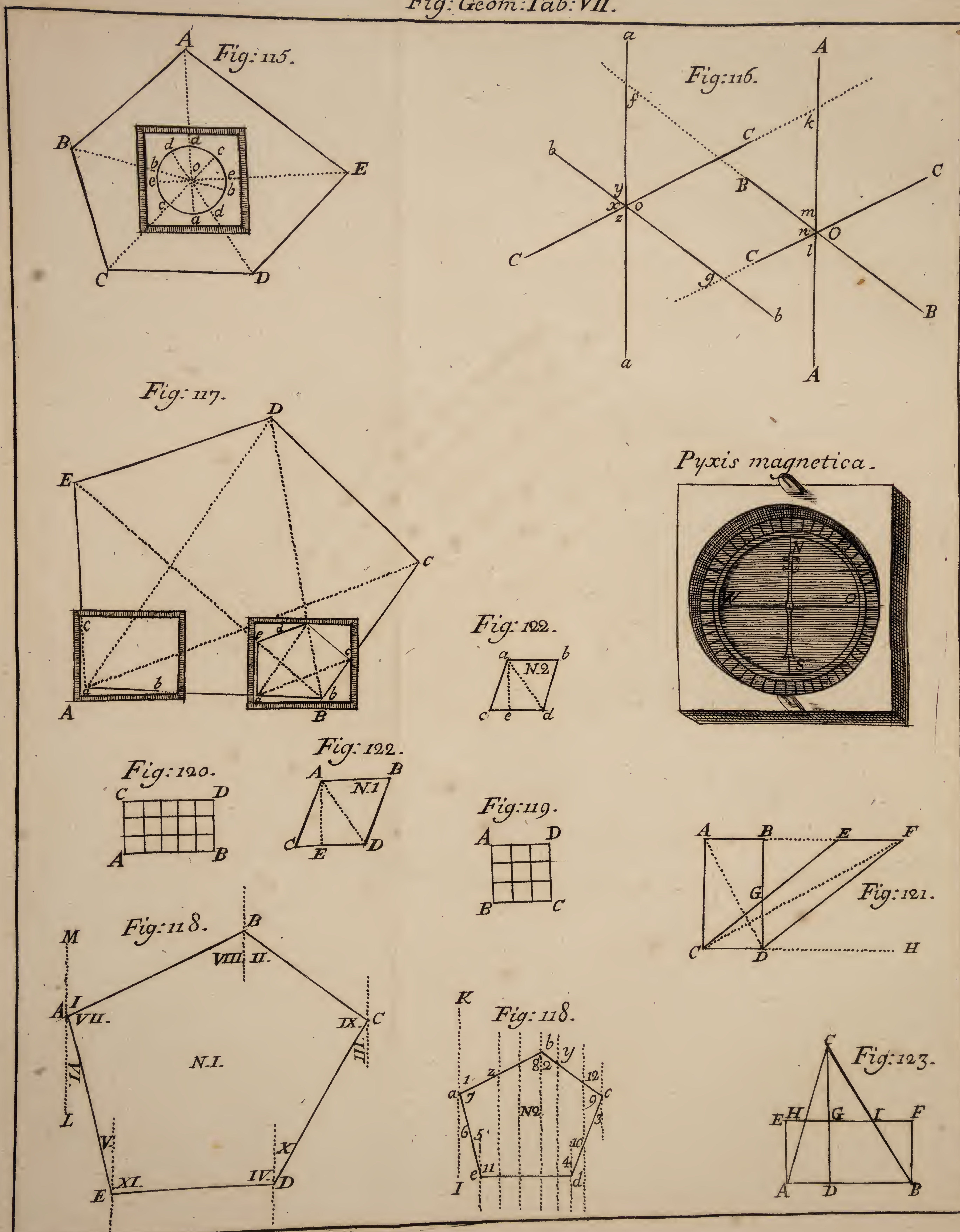


Fig: Geom: Tab: VII.



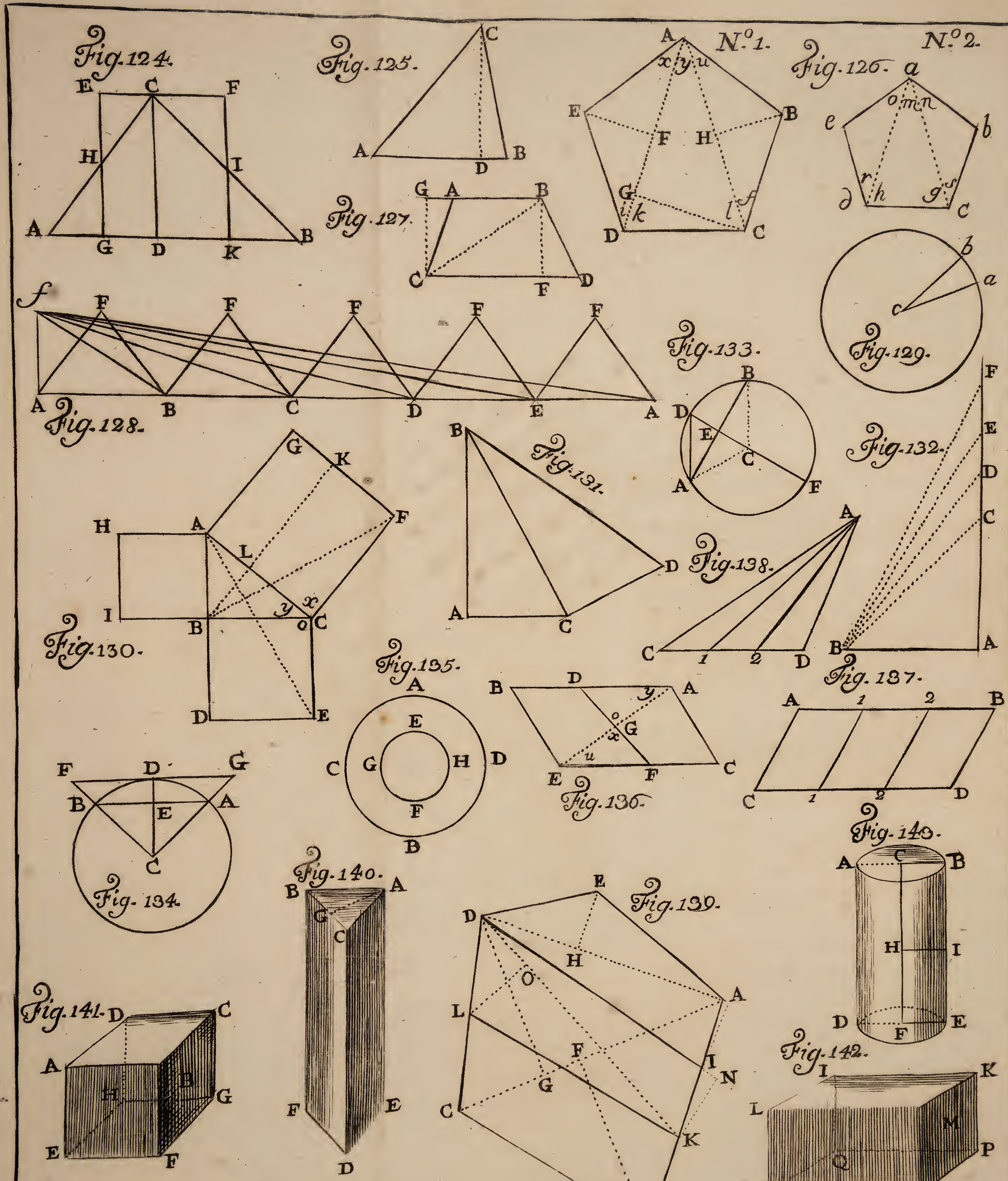
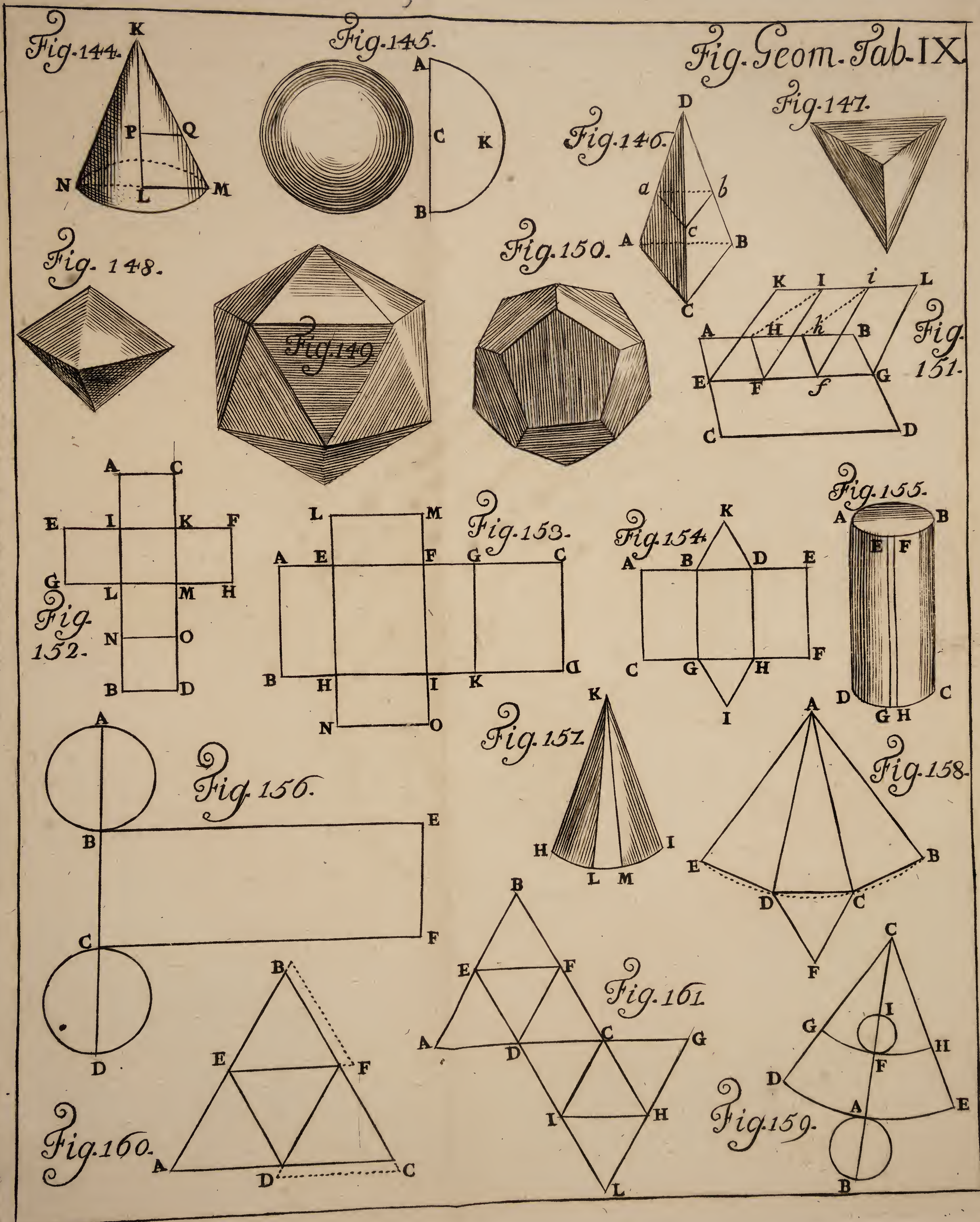


Fig. Geom. Tab. VIII.

Fig. Geom. Tab. IX.



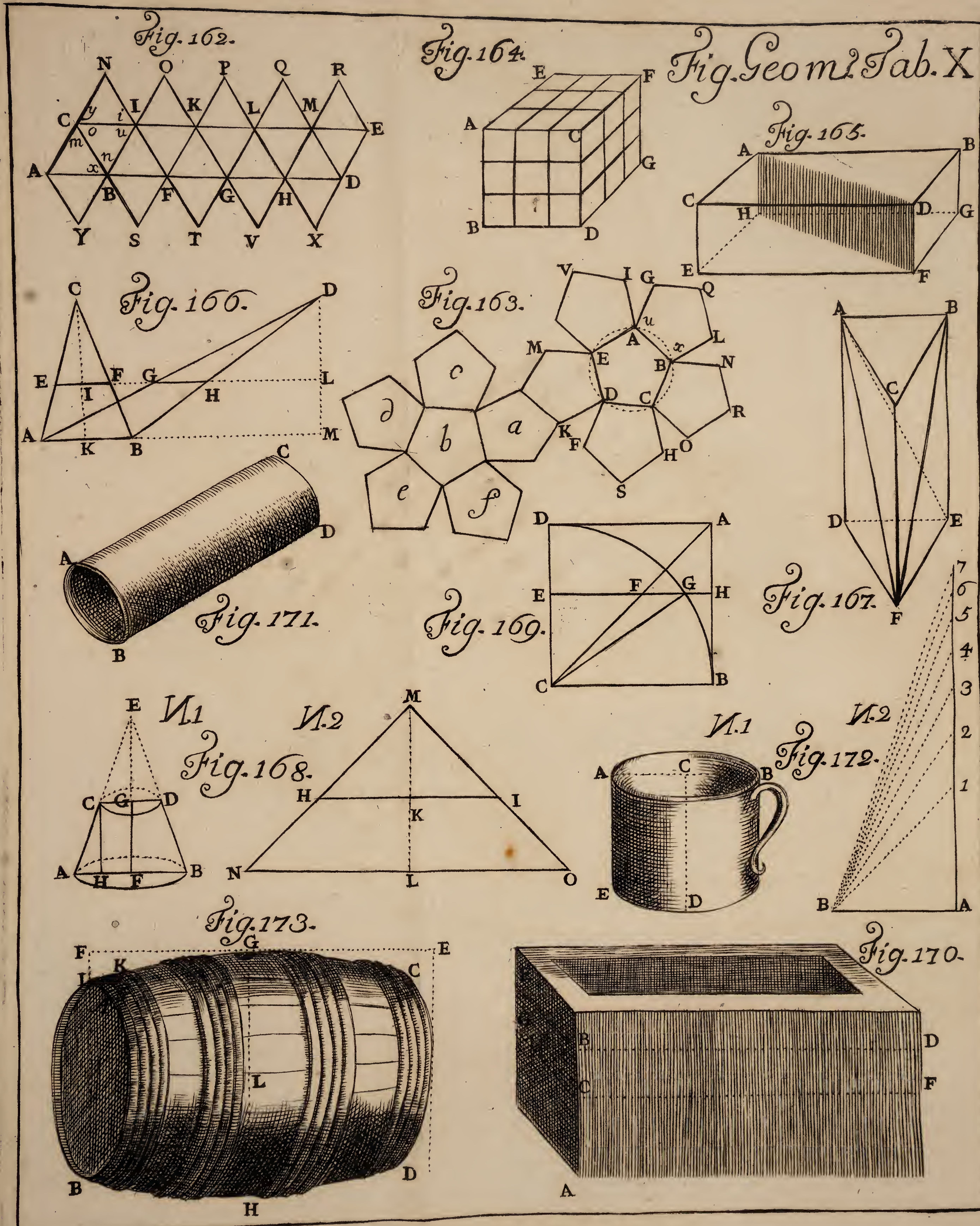

Fig. Geom. Tab. X
Fig. 162.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 163.
Fig. 167.
Fig. 171.
Fig. 169.
Fig. 168.
N.1
N.2
Fig. 172.
N.1
N.2
Fig. 173.
Fig. 170.

Fig. Geom. Tab. XI.

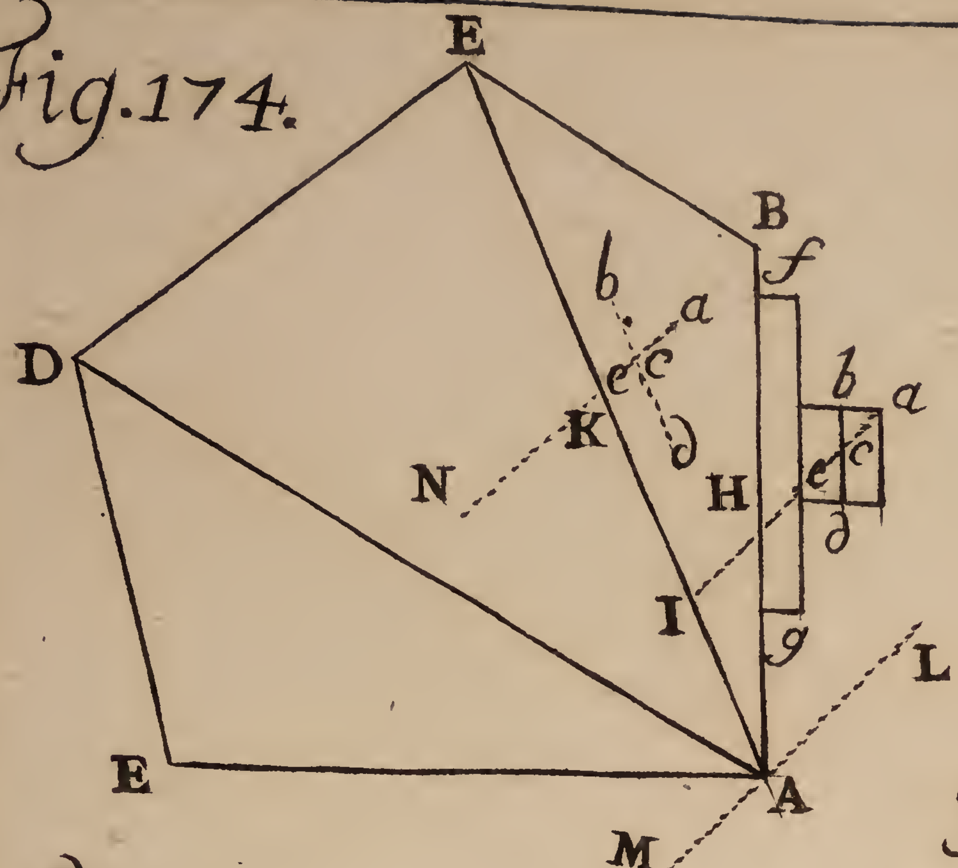


Fig. 174.

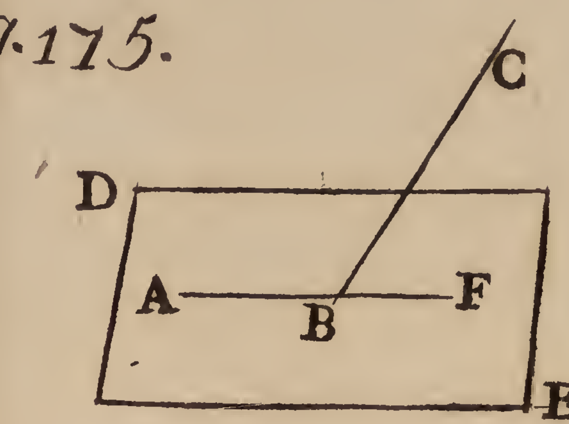


Fig. 175.

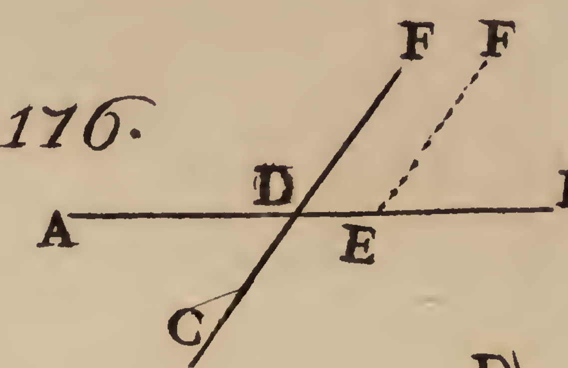


Fig. 176.

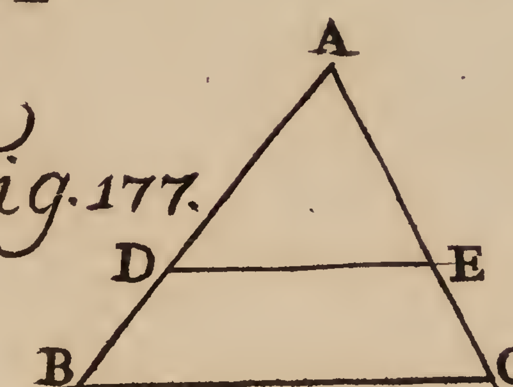


Fig. 177.

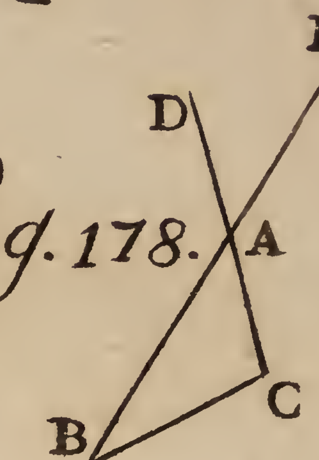


Fig. 178.

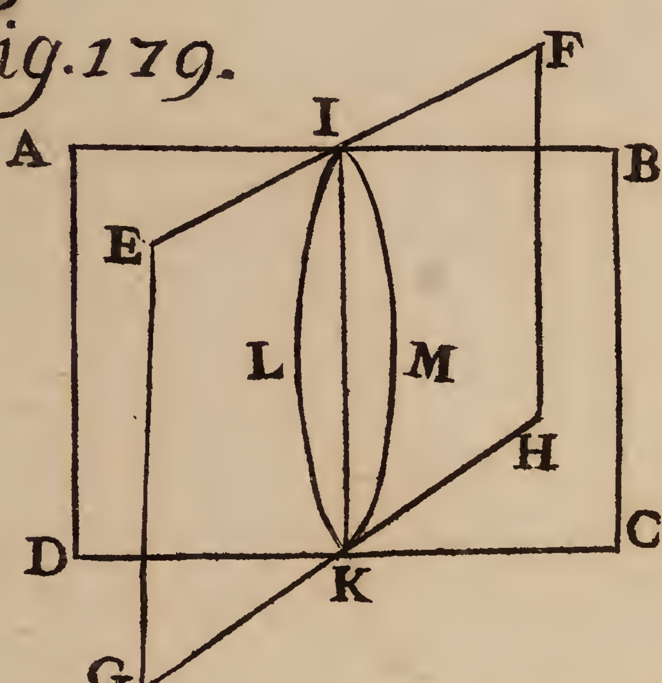


Fig. 179.

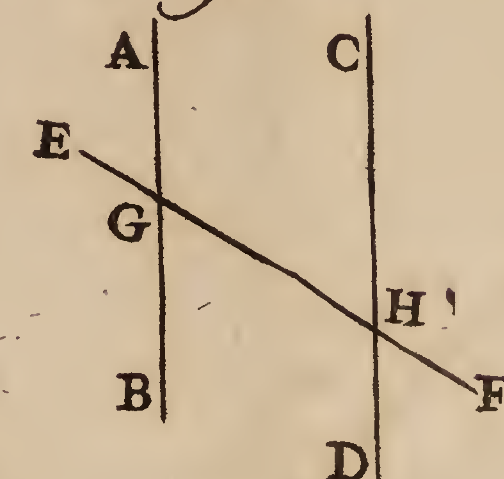


Fig. 180.

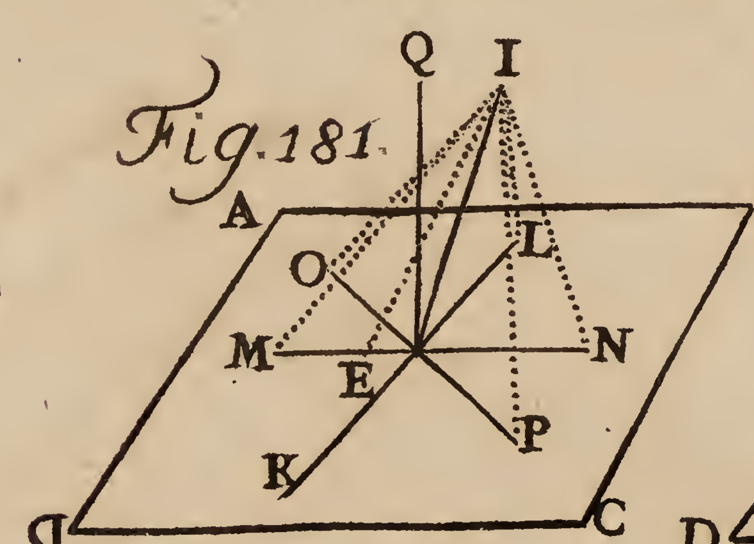


Fig. 181.

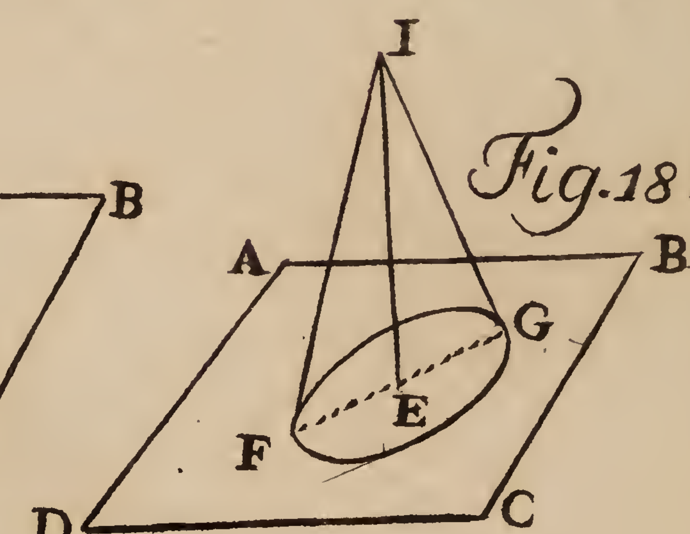


Fig. 182.

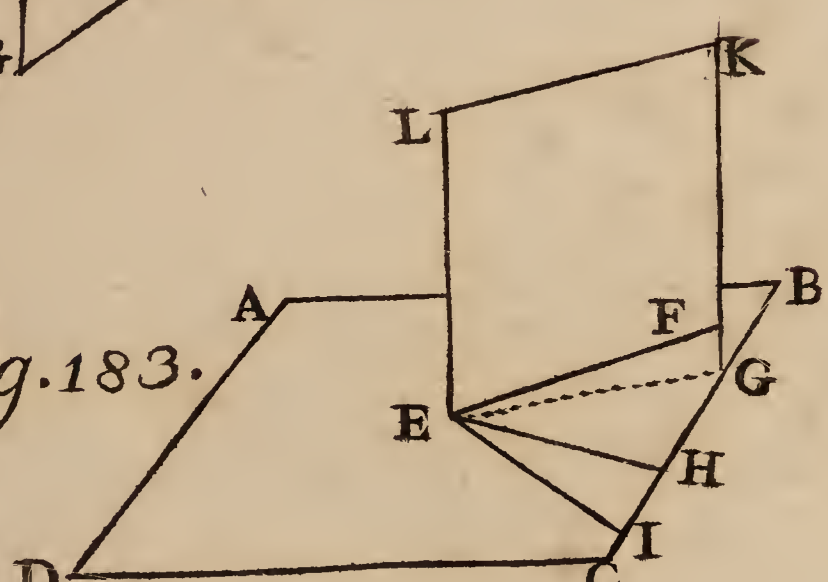


Fig. 183.

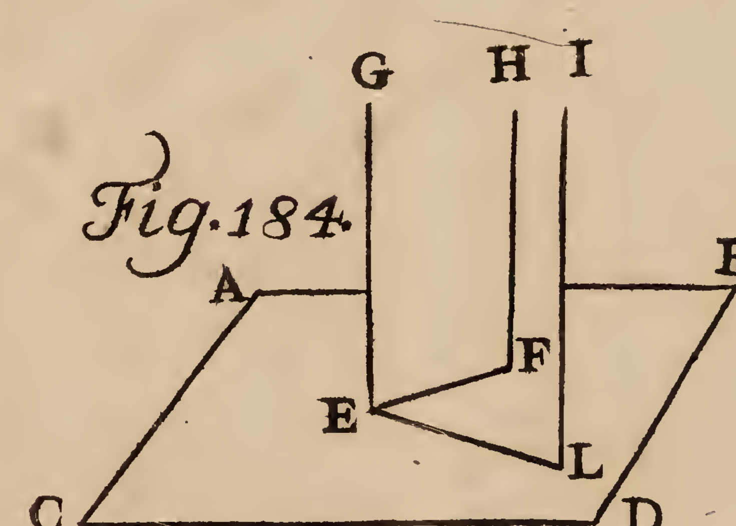


Fig. 184.

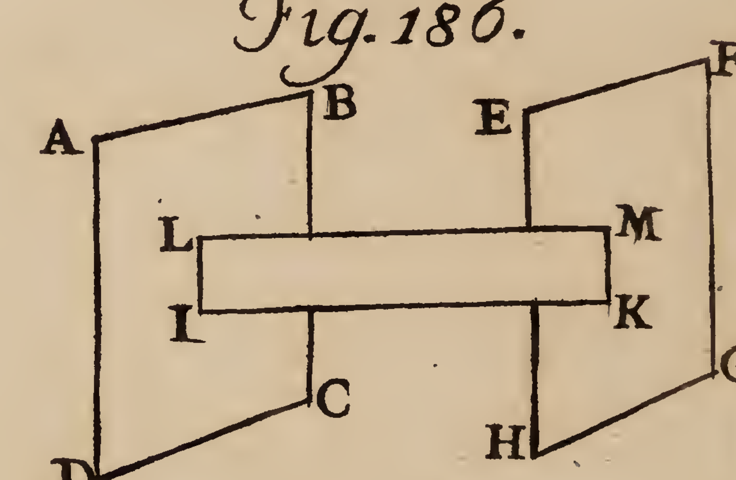


Fig. 186.

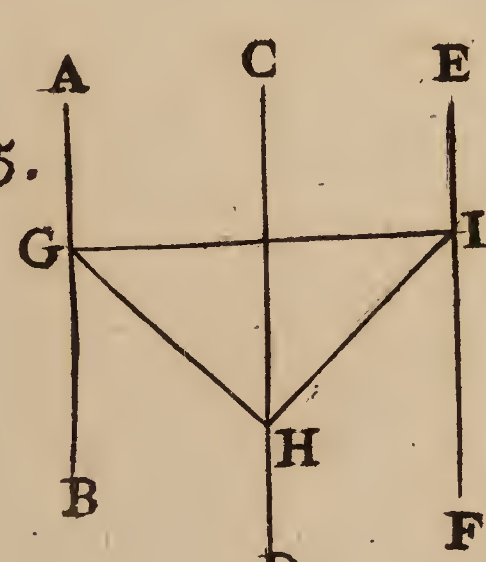


Fig. 185.

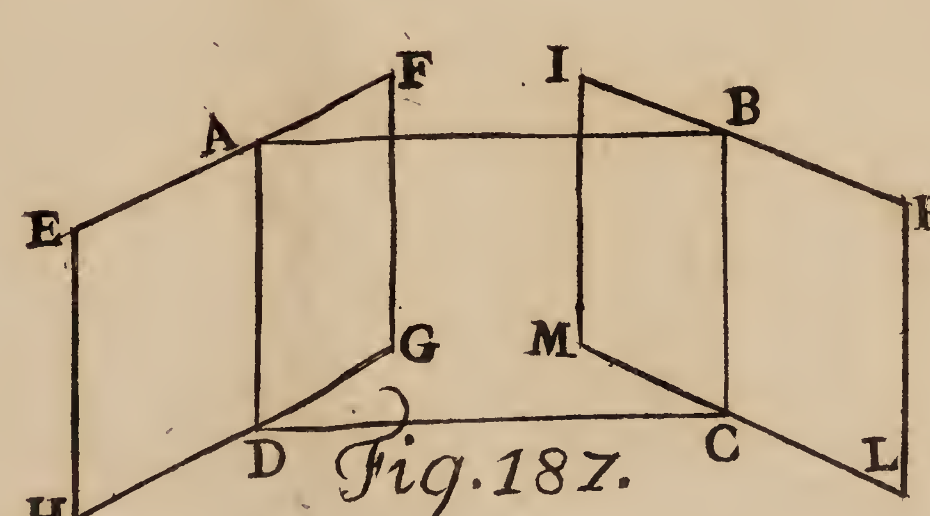


Fig. 187.

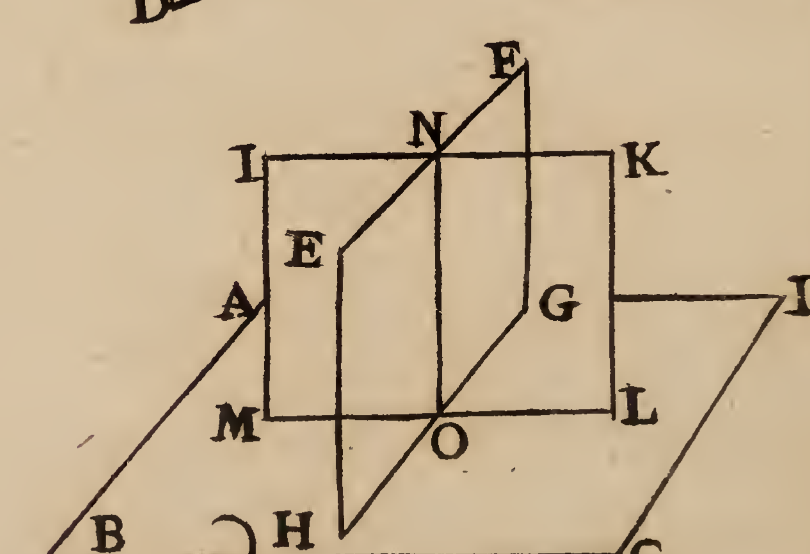


Fig. 191.

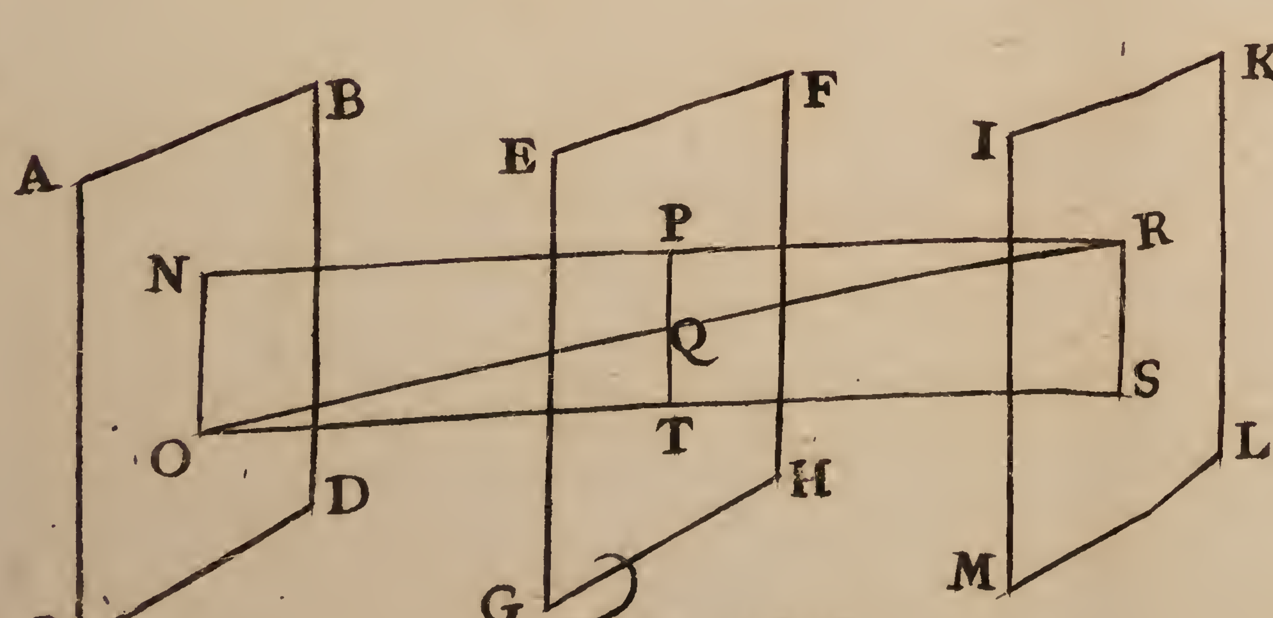


Fig. 189.

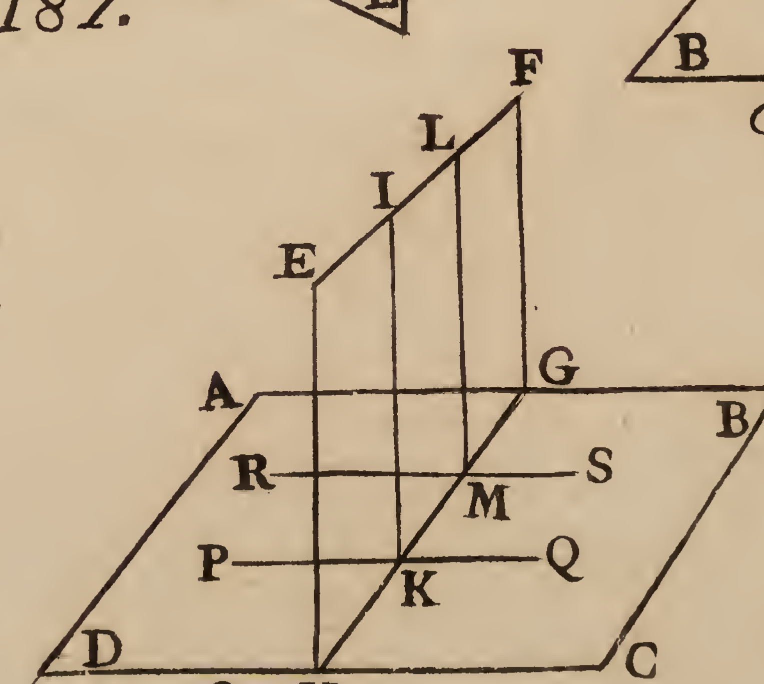


Fig. 190.

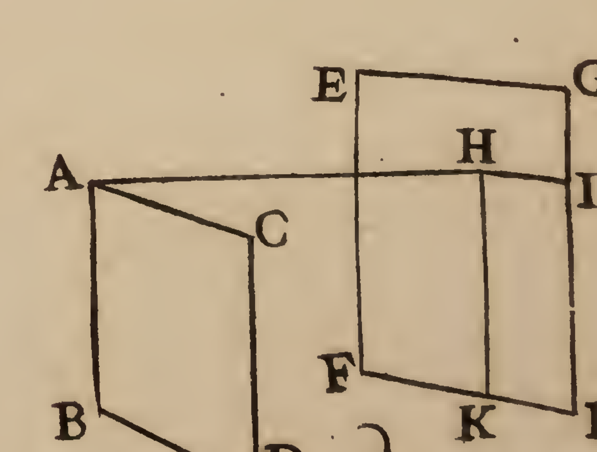


Fig. 188.

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

MOMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria , utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe Stellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, Eclipſium tam ſolarium quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei, & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi mixta ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, ex. gr. Iridis phænomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejuſdem

uſus ex his ipſis etiam Elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: In Elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tyronibus; nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum Theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.

ELEMENTA

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Conſtructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium, quam artificialium.

DEFINITIO I.

Tab. I. *Fig.* 1. 1. T*Rigonometria plana* eſt Scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. *Fig.* 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI eſt chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* eſt radius HC, ſeu ſinus quadrantis HE. *Sinus verſus* eſt pars radii ED inter ſinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 291 *Geom.*): conſequenter ſinus omnes eidem radio inſiſtentes inter ſe paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE eſt menſura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57 *Geom.*); quadrans vero HE menſura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD etiam ſinus rectus & ED ſinus verſus eſt angulorum ACE & ACI; ſinus vero totus eſt ſinus anguli recti. Tab. I. *Fig.* 2.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eundem habent ſinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtuſorum ſinus iidem ſunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DEFINITIO III.

7. *Tangens* arcus EA eſt portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejuſdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis eſt (§. 308 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Eſt etiam FE tangens, & FC ſecans anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eandem habent tangentem atque ſecantem.

DEFINITIO IV.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Coſinus* eſt ſinus, *Cotangens* tangens, *Coſecans* ſecans arcus AH, qui eſt alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG ſinus arcus AH dicitur coſinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes*, atque *Secantes complementi*.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum ſimilium ad radios ſuos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum ſimilium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed ſinus ſunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas ſinuum, tangentium, atque ſecantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* PTOLEMÆI Almageſto *diſcimus, Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, diviſiſſe, & inde chordas per minuta prima, ſecunda, tertia &c. hoc eſt, fractiones radii ſexageſimales determinaſſe, quibus in analyſi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis ſeu ſinibus primum uſi ſunt, quantum conſtat,* Saraceni. Johannes REGIOMONTANUS *primum radio cum Veteribus tribuit 60 gradus, & ſinus ſingulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero poſtea animadvertit, commodius fore, ſi radius ſumatur pro unitate, ac ideo hypotheſin præſentem in Trigonometriam introduxit. In Tabulis ſinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in* 10000000 *partes diviſus, & ultra has fractiones in determinanda ſinuum & tangentium quantitate non deſcenditur. Qui tamen Tabulas iſtas conſtruxerunt, ad fractiones multo minores deſcenderunt, ne error irreperet in ſcrupulis primis aſſignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ Problemata abſque illarum ope ſolvi poſſint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus Hexagoni regularis ſextam circuli partem ſubtendat (§. 104, 342 *Geom.*) atque radio æquale ſit (§. 356 *Geom.*); ſinus graduum triginta eſt 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 41 *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato ſinu* AD; *invenire coſinum* AG. Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC ſinus ipſius EH (§. 2) ad HC, & AG ſinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipſi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), adeoque △ AGC rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC ſint ad EC perpendiculares (§. 3); erit GC = AD (§. 226 *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC ſubtrahatur quadratum ſinus AD vel GC; relinquetur quadratum coſinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde ſi
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*); prodibit coſinus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000: reperitur AG 8660254, ſinus 60°.

PRO-

PROBLEMA II.

Tab.I. Fig.2. 17. *Dato ſinu* AD *arcus* AE; *invenire ſinum arcus dimidii* $\frac{1}{2}$ AE.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§.423 *Geom.*). Hujus enim dimidium eſt ejus ſinus (§. 2).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl. præc. reperietur ſinus arcus $\frac{1}{2}$ AE, ſeu ſinus 15° = 2588190.

PROBLEMA III.

Tab.I. Fig.3. 18. *Dato ſinu* DG *arcus* DF; *invenire ſinum* DE *arcus dupli* DB.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti ſint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & BDE communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 267 *Geom.*). Quare cum CG inveniri poſſit, dato ſinu DG (§. 16), & BD ſit duplum ipſius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§.302 *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA IV.

Tab.I. Fig.4. 19. *Datis ſinibus* FG *&* DE *arcuum* FA *&* DA, *quorum differentia* DF 45′ *major non eſt; invenire ſinum quemcunque intermedium* IL.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam FD arcuum quorum ſinus dantur, differentiam IF arcus AI cujus ſinus quæritur atque arcus AF ſinui dato minori reſpondentis, & differentiam ſinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§.302 *Arithm.*).
2. Is addatur ſinui dato minori FG. Erit aggregatum ſinus quæſitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum ſint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem ſenſibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ ſunt (§. 3). Quare ſi ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 *Geom.*); erit HE=FG (§.226 *Geom.*); adeoque DH differentia ſinuum datorum FG & DE (§. 64 *Arithm.*) Unde ob parallelas IK & DH, *per demonſtrata*; FD : FI = DH : IK (§. 268 *Geom.*). *Q. e. d.* Tab.I. Fig.4.

PROBLEMA V.

20. *Datis ſinibus* BD *&* FE *duorum arcuum quorumcunque* AB *&* AF; *invenire ſinum arcus ſemidifferentiæ eorundem* $\frac{1}{2}$ BF. Tab.I. Fig.5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD ſubtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis ſinibus BD & FE inveniantur coſinus BI & FH (§. 16).
3. Coſinus minor FH ſubtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex ſumma quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium eſt ſinus quæſitus (§. 2). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter ſe parallelæ, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), conſequenter FH=KI & BD = EK (§. 226 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§.230, 78 *Geom.*) Quamobrem FK differentia ſinuum

Tab.I. Fig.5. ſinuum BD & FE, BK vero differentia coſinuum FH & BI, atque FKB triangulum rectangulum (§.91 *Geom.*). Ergo cum ſit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§.417 *Geom.*); reperietur chorda BF, ſi ex ſumma quadratorum differentiæ ſinuum FK & coſinuum BK radix quadrata extrahitur (§.246 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

21. *Invenire ſinum* 45 *graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab.I. Fig.2. Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§.143 *Geom.*), adeoque △ cognomine rectangulum (§.91 *Geom.*), conſequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§.417 *Geom.*) $= 2\,HC^2$ (§.40, 374 *Geom.*). Quare cum HC ſinus totus (§.2) ſit 10000000 (§.14); ſi ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§.269 *Arithm.*); prodibit chorda HI (§.246 *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 ſinus 45° deſideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analyſi docebimus, quomodo ex dato radio latus Pentagoni regularis, hoc eſt, chorda* 72° (§.342 Geom.), *conſequenter ſinus* 36° (§.2) *inveniatur.*

PROBLEMA VII.

Tab.I. Fig.4. 23. *Dato ſinu unius minuti ſeu* 60″ FG; *invenire ſinum unius vel aliquot ſecundorum* MN.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF ſunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi poteſt citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus ſinus exprimimus, aſſignabilem, hoc eſt, arcus AM & AF ſinibus eorum proportionales aſſumere licet. Quare cum MN ſit ipſi FG parallela (§.3) erit AF : FG = AM : MN (§.268 *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§.302 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.* Tab.I. Fig.4.

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, ſi opus foret, inveniri poſſet ſinus aliquot ſcrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA VIII.

25. *Datis ſinibus* 30 (§.15), 15 (§.17), 45 (§.21) *&* 36 *graduum* (§.22); *Canonem omnium Sinuum conſtruere, nonniſi unico minuto, aut denis ſecundis, immo unico ſecundo inter ſe differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex ſinu 36 graduum inveniatur ſinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§.17); ſinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§.16): porro ſinus 27°, 13° 30′, 6° 45′; 40° 30′, 20° 15′; 42° 45′ (§.17): inde ſinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§.16): ulterius ſinus 31° 30′, 15° 45′; 38° 15′; 24° 45′ (§.17): hinc ſinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′, (§.16): denique ſinus 29° 15′ (§.17) & ejus coſinus 60° 45′ (§.16).
2. Ex ſinu 45° inveniantur ſinus 22° 30′ & 11° 15′ (§.17), ſinus 67° 30′ & 78° 45′ (§.16), ſinus denique 33° 45′ (§.17) & 56° 15′ (§.16).
3. Ex ſinu 30° & ſinu 54° inveniatur ſinus 12° (§.20).
4. Ex ſinu 12° inveniantur ſinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§.17), ſinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§.16): por-

porro ſinus 39°, 19° 30', 9° 45'; 42°, 21°, 10° 30', 5° 15'; 43° 30', 21° 45'; 44° 15' (§. 17): ulterius ſinus 51°, 70° 30', 80° 15', 48°, 69°, 79° 30', 84° 45', 46° 30', 68° 15', 45° 45', (§. 16): inde ſinus 25° 30', 12° 45; 35° 15'; 24°; 34° 30', 17° 15'; 39° 45'; 23° 15' (§. 17): hinc ſinus 64° 30', 77° 15', 54° 45', 66°, 55° 30', 72° 45', 50° 15', 66° 45' (§. 16): hinc porro ſinus 32° 15'; 33°, 16° 30', 8° 15'; 27° 45' (§. 17): inde ulterius ſinus 57° 45', 57°, 73° 30', 81° 45', 62° 15' (§. 16): porro ſinus 28° 30', 14° 15'; 36° 45' (§. 17) & horum coſinus 61° 30', 75° 45', 53° 45' (§. 16): denique ſinus 30° 45' (§. 17) & ejus coſinus 59° 15' (§. 16).

5. Ex ſinu 15° inveniantur ſinus 7° 30' & 3° 45' (§. 17): hinc ſinus 75°, 82° 30', 86° 15' (§. 16): inde 37° 30', 18° 45', 41° 15' (§. 17) & horum coſinus 52° 30', 71° 15', 48° 45' (§. 16): denique ſinus 26° 15' (§. 17) & ejus coſinus 63° 45' (§. 16).

6. Quodſi ſinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate ſibi mutuo ſuccedentes 45' deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0°45'	21	15°45'	41	30°45'	61	45°45'	81	60°45'	101	75°45'
2	1·30	22	16·30	42	31·30	62	46·30	82	61·30	102	76·30
3	2·15	23	17·15	43	32·15	63	47·15	83	62·15	103	77·15
4	3· 0	24	18· 0	44	33· 0	64	48· 0	84	63· 0	104	78· 0
5	3·45	25	18·45	45	33·45	65	48·45	85	63·45	105	78·45
6	4·30	26	19·30	46	34·30	66	49·30	86	64·30	106	79·30
7	5·15	27	20·15	47	35·15	67	50·15	87	65·15	107	80·15
8	6· 0	28	21· 0	48	36· 0	68	51· 0	88	66· 0	108	81· 0
9	6·45	29	21·45	49	36·45	69	51·45	89	66·45	109	81·45
10	7·30	30	22·30	50	37·30	70	52·30	90	67·30	110	82·30
11	8·15	31	23·15	51	38·15	71	53·15	91	68·15	111	83·15
12	9· 0	32	24· 0	52	39· 0	72	54· 0	92	69· 0	112	84· 0
13	9·45	33	24·45	53	39·45	73	54·45	93	69·45	113	84·45
14	10·30	34	25·30	54	40·30	74	55·30	94	70·30	114	85·30
15	11·15	35	26·15	55	41·15	75	56·15	95	71·15	115	86·15
16	12· 0	36	27· 0	56	42· 0	76	57· 0	96	72· 0	116	87· 0
17	12·45	37	27·45	57	42·45	77	57·45	97	72·45	117	87·45
18	13·30	38	28·30	58	43·30	78	58·30	98	73·30	118	88·30
19	14·15	39	29·15	59	44·15	79	59·15	99	74·15	119	89·15
20	15· 0	40	30· 0	60	45· 0	80	60· 0	100	75· 0	120	90· 0

Inveniantur ergo ſinus intermedii per Probl. 4. (*§.* 19).

7. Denique ſinus ſcrupulorum ſecundorum ab 1 uſque ad 60 inveniantur per Probl. præc. (§. 23).

Ita Canon ſinuum erit conſtructus. *Q. e. f.*

PROBLEMA IX.

Tab. I. *Fig.* 2. 26. *Dato ſinu* AD *arcus* AE, *invenire tangentem* EF *&* *ſecantem* FC *ejusdem arcus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia ſinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3, 8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut coſinus DC ad ſinum AD, ita ſinus totus ad tangentem EF: item ut coſinus DC ad ſinum totum AC, ita ſinus totus EC ad ſecantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram ſecans FC (§. 302 *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Conſtructo igitur Canone ſinuum* (§. 25), *haud difficilis eſt conſtructio Canonis tangentium atque ſecantium. Uterque junctim ſumtus Canon triangulorum naturalis dici ſolet, quia triangulorum analyſi inſervit. Equidem paſſim apud Autores Theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi ſinus facilius inveniuntur, quam expoſita hactenus methodo.* URSINUS (*a*) *præſertim docet, quomodo ex ſinu Canonis omnium primi, e. gr. unius ſecundi, per ſolam quaſi additionem & ſubtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum conſtructus ſit; ſufficit utcunque oſtendiſſe, quomodo conſtrui potuerit.*

(*a*) *Trigon.* lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA X.

28. *Invenire ſinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, aſſumendi ſunt ſinus ad radium 10000000000 conſtructi. Multantur nempe ſinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cum adeo ſinus ſint numeri 10 ut plurimum notis conſtantes, in canone autem logarithmorum qui proſtat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non aſcendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per Probl.* 37 *Arithm.* (§. 349). Utendum vero eſt Canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus ſinus 23°, qui apud PITISCUM 3907311284. Reſectis verſus ſiniſtram quinque notis 39073, ipſis reſpondens logarithmus eſt 4. 5918768, conſequenter logarithmus numeri 3907300000 eſt 9. 5918768. Differentia tabularis eſt 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ reſiduæ ſinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui ſi addatur logarithmo 9. 5918768, prodit logarithmus quæſitus 9. 5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XI.

29. *Invenire logarithmum tangentis; dato logarithmo ſinus & coſinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſinus addatur logarithmo ſinus totius.
2. A ſumma ſubtrahatur logarithmus coſinus. Reſiduum eſt logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & *§.* 359 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur Log. ſin. 23° = 9.5918780
Log. ſin. tot. = 1 00000000

a ſumma = 195918780
ſubtrahatur Log. coſ. = 99640261

relinquitur Log. tang. = 96278519

PROBLEMA XII.

30. *Invenire logarithmum ſecantis arcus cujuſcunque; dato ſinu complementi ejuſdem.*

1. Logarithmus ſinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo ſubtrahatur ſinus complementi datus. Reſiduus fiet logarithmus ſecantis (§. 26 *Trigon.* & 359 *Arithm.*).

Ex. gr. Quærendus eſt logarithmus ſecantis arcum 23°. Calculi typus talis eſt:

Log. ſin. tot. = 100000000

Ejus duplum = 200000000
Log. ſin. compl. = 99640261

Log. ſecant. 23° = 10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes NEPERUS, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, ſinus totius logarithmum facit* 0. *Hinc creſcunt logarithmi ſinuum, ſinibus decreſcentibus, & tangentium atque ſecantium ſinu toto majorum logarithmi ſunt defectivi, ſeu nihilo mires.* NEPERUS *logarithmos coſinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales, KEPLERUS *etiam* Meſologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT II.

De Analyſi Triangulorum.

THEOREMA II.

Tab.I. Fig.2. 32. *Tangens* 45° EF *æquatur radio* EC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°. *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*); conſequenter angulus F 45° (§. 241 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tab.I. Fig.1. 33. *In omni triangulo* ABC *latera ſunt ut ſinus oppoſitorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inſcriptibile ſit (§. 297 *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*); conſequenter latera dimidia ſinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii ſunt menſuræ angulorum oppoſitorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti B; ita latus BC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti A, ita etiam AB ad ſinum anguli ſibi oppoſiti C. *Q. e. d.* Tab.I. Fig.1.

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtuſangulo pro ſinu anguli obtuſi utendum eſſe ſinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem eſſe etiam ſinum anguli obtuſi ſupra annotavimus (§. 6), ſequens addere lubet theorema.*

THEOREMA IV.

Tab.I. Fig.8. 35. *In triangulo obtuſangulo* AGC *eſt ut latus angulo obtuſo* G *oppoſitum* AC *ad ſinum anguli acuti* AGE *eidem deinceps poſiti, ita latus angulo obtuſo adjacens* GA *ad ſinum anguli eidem oppoſiti* C.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in baſin continuatam GC perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§.78, 91 *Geom.*). Cum itaque ſit ut ſinus totus ad AC ita ſinus anguli C ad AE & ut AG ad ſinum totum ita AE ad ſinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita ſinus anguli C ad ſinum anguli AGE (§. 201 *Arithm.*); conſequenter latus angulo obtuſo adjacens GA eſt ad ſinum anguli eidem oppoſiti C, ſicuti latus angulo obtuſo oppoſitum AC ad ſinum anguli acuti eidem deinceps poſiti AGE (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

Tab.I. Fig.1. 36. *Datis duobus angulis* A & C, *una cum latere uni eorum* C *oppoſito* AB; *invenire latus alteri* A *oppoſitum* BC.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut ſinus anguli C
ad latus ſibi oppoſitum datum AB;
Ita ſinus anguli alterius A
ad latus quæſitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC, *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359).

Ex. gr. Sit C = 48° 35′, A = 57° 28′, AB = 74′. Calculus talis erit:

Log. ſin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. ſin. A	9. 9258681
Sum. log. AB & ſin. A	11. 7950998
Log. BC	1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus reſpondent 83′. Cum vero logarithmus in Tabulis non exactus reperiatur; inveniri poſſunt numeri inventi 83′ fractiones decimales, hoc eſt, in caſu noſtro digiti, ſi ſub characteriſtica 2 poſt $830''$ denuo logarithmus ipſius BC evolvatur: cui proxime reſpondet numerus $831''$. Quodſi præter digitos etiam lineas deſideres; eundem logarithmum quære poſt $8310'''$, & ei quam proxime reſpondere deprehendes $8319''''$. Immo ſi Canon major ad manus ſit, ipſa ſcrupula quarta expiſcari licet, ſi logarithmus inventus poſt $83190''''$ evolvatur: ubi eidem quam proxime reſpondet logarithmus numeri 83192. Eſt ergo BC $8^{\circ}\ 3'\ 1''\ 9'''\ 2''''$ (§. 355 *Arithm.*).

SCHOLION.

37. *Quid factu opus ſit, ſi logarithmi characteriſtica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA XIV.

Tab. Fig.1 38. *Datis duobus lateribus* AB & BC, *una cum angulo* C *uni eorum oppoſito; invenire angulos reliquos* A & B.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad ſinum anguli dati ſibi oppoſiti C;

Ita

Tab.I. *Fig.* 1. Ita latus alterum BC ad ſinum anguli quæſiti ſibi oppoſiti A.

Invenietur adeo logarithmus ſinus anguli A utendo logarithmis *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359.)

II. Quodſi latus AG vel AB dato angulo C oppoſitum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæſito, quæſitus angulus & obtuſus eſſe poteſt G, & acutus B (§. 234 *Geom.*); adeoque conſtare debet, utrum triangulum datum ſit obtuſangulum, an acutangulum. In caſu poſteriori ſatisfacit numerus graduum, qui ſinui reperto reſpondet; in priori pro angulo obtuſo ſumitur ejus complementum ad 180° (§. 35). Tab.I. *Fig.* 8.

III. Quodſi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtuſus, & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus, in ſolutione pro ſinu obtuſi anguli AGC ſumitur deinceps poſiti acuti AGE ſinus (§. 35).

Tab.I. *Fig.* 1. Ex. gr. Sit AB = 94′, BC = 69′, C = 72° 15′.

Log. AB	1. 9731279
Log. ſin. C	9. 9788175
Log. BC	1. 8388491
Sum. Log. ſin. C & BC	11. 8176666
Log. ſin. A.	9. 8445387,

cui in Canone proxime reſpondent 44° 21′. Quodſi Canon major non fuerit ad manus, & præter ſcrupula prima etiam ſecunda deſiderentur, *vi Probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento	98445387	ſubtrahe
Tabul. prox. min.	98445018	
& notetur Differ. I.	369	
Simil. ex prox. maj.	98446310	ſubduc
prox. min.	98445018	
& notetur Diff. II.	1292	

Tab.I. *Fig.* 1.

Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30   30

646) 11070 (17
646
4610
4522
88

Eſt ergo angulus A = 44° 21′ 17″
Sed C = 72 15 0
Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 179 59 60
erit B = 63° 23′ 43″

Similiter dentur in triangulo rectangulo, præter rectum A, hypothenuſa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′ AC 36′. Calculus talis erit: Tab.I. *Fig.* 6.

Log. BC	1. 6901961
Log. ſin. tot.	10. 0000000
Log. AC	1. 5563025
Log. ſin. B	9. 8661064,

cui in Canone proxime reſpondent 47° 16′. Ergo C = 42° 44′ (§. 241 *Geom.*).

Quodſi AG = 349″, AC = 382″, angulus A = 57° 25′; erit Tab.I. *Fig.* 8.

Log. AG	2. 5428254
Log. ſin. C	9. 9256261
Log. AC	2. 5820634
Sum. Log. ſin. C & AC	12. 50716895
Log. ſin. G	9. 9648641,

cui in Canone proxime reſpondent 67° 15′. Eſt igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15′: quem ſi ſubtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuſo AGC 112° 45′.

Tab.I. Fig.8. Detur denique in triangulo obtuſangulo AGC angulus obtuſus G 165° 17′, una cum cruribus AG = 179″ & AC 223″: Pro acuto C inferatur (§. 35).

Log. AC	2. 3483049
Log. ſin. AGE	9. 4049009
Log. AG	2. 2528530
Sum. Log. ſin. G & AG	11. 6577539
Log. ſin. C	9. 3094490

cui in Canone reſpondent quam proxime 11° 46′.

Lemma.

39. *Si a ſemiſumma duarum quantitatum ſubtrahatur ſemidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

Demonstratio.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arithm.*): ergo ſumma ex minore bis ſumta & differentia, conſequenter ſemiſumma ex minore & ſemidifferentia. Quare ſi a ſemiſumma ſemidifferentia ſubtrahatur, minor quantitas relinquitur (§. *cit. Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodſi vero ſemiſummæ ſemidifferentia addatur, aggregatum erit compoſitum ex quantitate minore & differentia (§. 61 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonſtr. Quod erat alterum.*

Problema XV.

Tab.I. Fig.6. 40. *Datis duobus lateribus* BA *&* AC, *cum angulo intercepto* A; *invenire angulos reliquos.*

Resolutio.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; aſſumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppoſiti B (§. 7, 8) Inferatur ergo:

ut crus unum AB
ad alterum AC;
Ita ſinus totus
ad tangentem anguli B.

Tab. Fig.6. Ex. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	1. 8976271
Log. AC	1. 7323938
Log. ſin. tot.	10. 0000000
Log. tang. B,	9. 8347667

, cui in Canone reſpondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (§. 241 *Geom.*).

Tab. Fig.7. II. Si angulus A fuerit obliquus;

1. Inferatur:
   ut ſumma laterum datorum AB & AC
   ad differentiam eorundem;
   Ita tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum C & B
   ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem.
2. Addatur ſemidifferentia ad ſemiſummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a ſemiſumma ſubtrahatur, reſiduus fiet angulus minor B.

Ex. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179°	60′
AC 58	AC 58	A	108	24
Sum. 133	Diff. 17	B + C	71	36
		½(B + C)	35	48

Log. (AB + AC) - - -	2. 1238516
Log. (AB − AC) - - -	1. 2304489
Log. tang. ½(B + C)	9. 8580694
Summa Logg.	11. 0885183

Log. Tang. ½(C − B), 8. 9646667, cui in Tabulis proxime reſpondent 5° 16′.

½(B + C) = 35° 48′	½(B + C) = 35° 48′
½(C − B) = 5 16	½(C − B) = 5 16
C = 41° 4′	B = 30° 32

De-

Demonstratio.

Tab.I. Crure majore dato AB, ex vertice *Fig.*7. anguli dati A deſcribatur circulus (§. 131 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§.21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob AE = AB = AD (§.40 *Geom.*), CE ſumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§.39 *Geom.*); erit EBD ſemicirculus (§.135 *Geom.*); conſequenter angulus EBD rectus (§.317 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§.78 *Geom.*). Quare ſi BD ſumatur pro ſinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§.7,8). Eſt vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*), & inde ob $u = \frac{1}{2}o$ (§.313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x+y)$. Ergo EB tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§.39). Sumto itaque DB denuo pro radio, ſi deſcribatur arcus DG (§.131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§.249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§.7,8), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y, *per demonſtr.* Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti, *per demonſtr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque BED & FDE æquales (§.233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§.156 *Geom.*): erit CE : EB = CD : DF (§.267 *Geom.*), conſequenter & CE : CD = EB : DF (§.173 *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæſitorum ſemidifferentia, reliqua in reſolutione manifeſta ſunt, per Lemma præcedens (§.39). *Q.e.d.*

Problema XVI.

41. *Datis tribus lateribus* AB, BC, & CA; *invenire angulos* A, B & C. Tab.I. *Fig.*8.

Resolutio & Demonstratio.

1. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, deſcribatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit ob AD = AB (§.40 *Geom.*) CD ſumma crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§.333 *Geom.*);

   ut baſis BC
   ad ſummam crurum CD;
   Ita differentia crurum CF
   ad ſegmentum baſis CG.

2. Inventum adeo ſegmentum CG (§. 302 *Arithm.*) ſi ſubtrahatur a baſi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§.216 *Geom.*), erit BE = EG = ½GB (§.291 *Geom.*). Datis adeo, in triangulo rectangulo AEB, lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§.38). *Q.e.f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36′, AB = 45′, BC = 40′:

erit	AC = 45′	AC = 45′
	AB = 36	AB = 36
	AC + AB = 81	FC = 9

Log. BC	= 1.6020600
Log. AC + AB	= 1.9084850
Log. FC	= 0.9542425
Logg. ſumma	= 2.8627275
Log. CG	= 1.2606675

cui

cui in Tabulis quam proxime reſpondent 18′ 2″ 3‴ (*§.* 355 *Arithm.*).

BC = 4000‴		EG = 1089‴	
CG = 1822		CG = 1822	
BG = 2178		CE = 2911	
BE = 1089			
Log. AB	= 3.5563025		
Log. ſin. tot.	= 10.0000000		
Log. EB	= 3.0370279		
Log. ſin. EAB	= 9.4807254,		

cui in Tabulis quam proxime reſpondent 17° 36′, adeoque angulus ABE 72° 24′ (*§.* 241 *Geom.*).

Log. AC	= 3.6532125
Log. ſin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422
Log. ſin. EAC	= 9.8108297,

cui in Tabulis quam proxime reſpondent 40° 18′. Ergo ACE 49° 42′ (§.241 *Geom.*), & CAB 57° 54′ (*§.* 86 *Arithm.*).

CAPUT III.

De uſu Trigonometriæ planæ in Geometria practica.

PROBLEMA XVII.

42. *Conſtruere Inſtrumentum transportatorium rectilineum; hoc eſt Scalam ſecundum eam proportionem diviſam, quam habent ſubtenſæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi Canone ſinuum excerpantur ſinus arcuum 2° 30′, 5°, 7° 30′, 10°, 12° 30′ &c. nempe in progreſſione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia eſt $2\frac{1}{2}$ gr. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in Tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 249 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel ſolos gradus, vel gradus dimidios, vel par- Tab.I. *Fig.*9.

Tab.I. Fig.9. partes quartas &c. indicare debent ſubtenſæ.

3. Per ſingula diviſionum puncta agantur rectæ ipſi AD parallelæ (§.258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo ſemper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35°, &c. reſpondentes ex Scala geometrica in particulas minutiſſimas diviſa (§.277 *Geom.*): in linea vero ſuperiori BC eodem modo deſignentur particulæ chordarum reſpondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodſi Scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales deſiderantur; utendum eſt chordis dimidiis: quod perinde ac ſi particulæ in Scala bifariam dividerentur. Negligenda autem eſt nota puncto a reliquis ſeparata, vel ſi major fuerit, ejus loco addenda eſt unitas ultimæ earum, quæ retinentur; ex. gr. loco 258.8 aſſume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5 Ducantur transverſæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25, &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. ſint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter creſcant; erit *c* 1 ſubtenſa arcus 1°, *d*2 ſubtenſa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

43. Quia ſubtenſa 60° eſt radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem inveſtigaturus intervallo B 60 deſcribat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui eſt menſura ipſius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad Scalam applicet, quæ, ſi ex. gr. ex *d* in 42 pertingat, oſtendit angulum eſſe 42°. Tab.I. Fig.9.

COROLLARIUM II.

44. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B60 deſcribatur, ex centro B, arcus CF, & ſubtenſa gradus dati, ex. gr. 23, in Scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC menſura anguli B (§.57 *Geom.*); adeoque tot graduum, quot arcus continet (§.59 *Geom.*). Tab.I. Fig.10.

SCHOLION.

45. *Hujus Inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XVIII.

46. *Circulo Polygonum regulare inſcribere & circumſcribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Aſſumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere ſupponitur, inde excerpatur ſinus ejus arcus, qui prodit peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde eſt) ſemiperipheria, hoc eſt 180°, per numerum laterum polygoni diviſa. Illius enim duplum eſt chorda arcus dupli (§.2), adeoque latus AB polygoni circulo inſcribendi (§.342 *Geom.*). Tab.I. Fig.11.

2. Quodſi radius circuli, cui ex. gr. pentagonum inſcribendum, detur juxta certam aliquam menſuram ex. gr. 345″; latus polygoni in eadem men-

menſura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

```
10000 — 1.176 — 3450'''
             3450
          -------
            58800
           4704
          3528
          -------
          4057|200 (4° 0' 5'' 7''' lat.
          1   ø|000      Pentag.
```

3. Dato radio, deſcribatur circulus, & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri poteſt (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo inſcripto ſimile circumſcribetur (§. 355 *Geom.*).

Scholion.

47. *Ne moleſta ſit rationis lateris Polygoni ad radium ex Canone ſinuum inveſtigatio, in Tabula hic exhibemus latera Polygonorum iſtiusmodi particulis expreſſa, qualium radius habet* 10000000. *In praxi tot notæ verſus dextram reſecantur, quot per circumſtantias ſingulares ſuperfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

Problema XIX.

Tab. I. Fig. 11. 48. *Super data recta* AB *Polygonum regulare deſcribere: & dato Polygono regulari* ABCDE *Circulum circumſcribere.*

Resolutio.

Non alia re opus eſt, quam ut ratione lateris ad radium ex Tabula præcedente aſſumta quæratur radius in ea menſura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, Polygonum deſcribi poteſt (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii, ex A & B ſuper latere Polygoni uno fiat interſectio in L; habebitur centrum L circumſcribendi circuli (§. 37 *Geom.*). Tab. I. Fig. 11.

Problema XX.

49. *Datis ſinu verſo* AB *& ſinu* BC, *in menſura communi, non in particulis radii decimalibus; invenire arcum* FAC *in gradibus.* Tab. I. Fig. 12.

Resolutio & Demonstratio.

1. Quæratur ex his datis ſemidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC, præter rectum B (§. 3), lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 59 *Geom.*), cujus duplus eſt arcus FC (§. 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

Scholion.

50. *Hujus Problematis uſus eſt in inveniendo ſegmento circuli* (§. 436 Geom.).

Problema XXI.

51. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& angulis* o *&* y; *invenire diagonales.* Tab. I. Fig. 13.

Resolutio.

1. In △ ABE, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo *o*; invenitur primum angulus A (§. 38); dein diagonalis BE (§. 36).

2. Eo-

2. Eodem modò reſoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

Tab.I. *Fig.* 13.

PROBLEMA XXII.

52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus* AB *&* BC, *una cum diagonalibus* BE *&* BD, *atque angulis* o, x *&* y; *invenire latera reliqua* CD, DE *&* EA.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE, cum angulo intercepto *o*, invenitur primum angulus *u* (§. 40), & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorſus modo in triangulis reliquis BED & BCD inveſtigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& tot angulis quot ſunt latera demtis tribus*, C *&* D; *invenire diagonales* BD *&* BE.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD, cum angulo intercepto C, inveſtigetur angulus *m* (§. 40), quo ex angulo D ſubducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE, cum angulo intercepto *n*; eodem prorſus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIV.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latere* AB, *una cum angulis* o, x, y, e, u *&* n; *invenire diagonales* AC, AD, BD *&* BE, *una cum lateribus* BC *&* AE. Tab.II. *Fig.* 22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis *o* & B $(=e+u+n)$, una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$, una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. *cit.*).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A $(=o+x+y)$ & *e*, una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum Ichnographiæ arearum optimè perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 Geom.); *horum Problematum in Planimetria uſus eſt non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant moleſtias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA XXV.

56. *Metiri diſtantiam duorum locorum* BC, *ex eodem tertio* A *acceſſorum.* Tab.I. *Fig.* 14.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium aſſumpto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 126 *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 40), & hinc porro diſtantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 14. 57. *Exempla non addimus, cum Problemata, quibus triangula in hac Trigonometriæ applicatione ſolvuntur, jam in ſuperioribus fuerint exemplis illuſtrata. Ut tamen de commoda ſtationis electione A judicari poſſit, quædam adhuc addenda ſunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ ſunt latera trianguli reſolvendi BAC ſatis accurate in campo metiri licet* (*§.126* Geom.)*: ſed in metiendo angulo facile aliquot ſcrupulis primis vel in exceſſu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non poteſt quin diſtantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis diſpiciendum.*

THEOREMA V.

Tab. II. Fig. 15. 58. *Si error aliquot ſcrupulorum in quantitate anguli* A *admittatur, laterum vero* BA *&* AC *magnitudo fuerit accurata; erit arculi* CD *errorem* CAD *metientis quantitas, ad* DE *differentiam diſtantiæ veræ* BC *ab erronea per calculum producta* BD*; ut ſinus totus, ad ſinum anguli* BCA*, qui lateri* AB *opponitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem, *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Deſcribatur ex A, intervallo AC tanquam radio, arcus CD, qui per punctum D, ob AC=AD (§.40 *Geom.*), neceſſario tranſit. Quoniam angulus CAD nonniſi aliquot ſcrupulorum eſt, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 57 *Geom.*), pro recta haberi, &, ſi ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem menſura determinari poteſt, in qua datur latus AC (*§.*435 *Geom.*). Deſcribatur ſimiliter ex centro B, intervallo BC, arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque, ob BC=BE (§. 40 *Geom.*), ED differentia inter diſtantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED ſunt recti (§. 309 *Geom.*); conſequenter BCE=ACD (§. 145 *Geom.*), atque adeo BCA=ECD (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero ut ſinus totus ad CD, ita ſinus anguli ECD ſive BCA, *per demonſtr.* ad ED (§. 33): ergo etiam ut ſinus totus ad ſinum anguli BCA, ita CD ad ED (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 1

COROLLARIUM I.

59. Eodem ergo manente errore CD in Angulo A metiendo admiſſo, error in diſtantia admiſſus ED major eſt, ſi angulus BCA major fuerit; minor autem, ſi hic quoque minor fuerit (§. 205, 206 *Arith.*).

COROLLARIUM II.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§. 59): quod obtinetur, ſi angulus A fuerit major recto (*§.* 240 *Geom.*) & latus AC > AB (*§.* 189 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

61. Cum angulus BAD major ſit angulo BMD (§. 188 *Geom.*); præſtat eligi ſtationem A viciniorem, quam remotiorem (*§.* 59).

SCHOLION.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere ſemidiametrum Inſtrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC reſpondere regulam mobilem* (*§.*152 Geom.).

COROLLARIUM IV.

63. Quoniam error ED in diſtantia definienda admiſſus major eſt, ſi quantitas arcus CD major fuerit (*§.* 58), quantitas autem

Tab.II. Fig. 15. autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admiſſo, ſi latus AC longius, quam ſi brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, ſtationem viciniorem præſtare remotiori.

SCHOLION.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratiſſimas eſſe, quæ ſolis lineis in campo menſuratis nituntur, ubi in earum poſitione ob errorem in angulorum quantitate commiſſum aberrari nequit. Dedimus hic ſpecimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut oſtenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiſcendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui ſibi perſuadent, per theoriam addiſci non poſſe certas praxium accuratarum circumſtantias, tum demum obſervandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuſe obſervantur; per theoriam vero accurate determinantur.*

PROBLEMA XXVI.

Tab.I. Fig. 15. 65. *Invenire diſtantiam duorum locorum* AC, *quorum unus* A *tantum acceſſibilis.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur quantitas angulorum A & B, ſtatione in B electa (§. 152 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 36). *Q. e. f.*

THEOREMA VI.

Tab.II. Fig. 23. 66. *Si in diſtantia* AB *ex duobus angulis* A *&* ACB, *una cum latere* AC, *inveſtiganda, nonniſi in angulo uno* ACB *metiendo aberretur; arcus* BE, *qui errorem in angulo* BCD *admiſſo metitur, erit ad* BD *differentiam inter diſtantiam veram* AB *& erroneam* AD, *ut ſinus anguli tertii* o *diſtantiæ ſtationum* AC *oppoſiti ad ſinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Illud per ſe patet in hoc caſu diſtantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB; conſequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD ſecare diſtantiam veram in præſente caſu productam in D. Deſcribatur ergo, ex centro C, radio CB, arcus BE, qui eſt menſura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque nonniſi paucorum minutorum ſit, *ex hypotheſi*, pro recta haberi poteſt. Quamobrem cum anguli BED & CBE ſint recti (§. 309 *Geom.*), erunt anguli o & u (§. 147 *Geom.*), itemque u & x æquales recto (§. 241 *Geom.*); conſequenter $o+u=x+u$ (§. 145 *Geom.*), atque ideo $o=x$ (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero ut ſinus anguli x (ſive o, *per demonſtr.*) ad arcum BE; ita ſinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE eſt ad BD ut ſinus anguli o ad ſinum totum (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab.II. Fig. 23.

COROLLARIUM I.

67. Cum ſinus anguli o majorem habeat ad ſinum totum rationem, ſi major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arithm.*); eodem errore in metiendo angulo ACB admiſſo, hoc eſt, arcu BE exiſtente eodem, minor erit error in diſtantia determinanda admiſſus BD, ubi angulus o major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

68. Unde conſequitur, talem hoc in caſu fieri debere ſtationum A & C electionem, ut anguli A & C ſint admodum obliqui, angulus vero o evadat recto proximus: id quod obtinetur ſi anguli A & C junctim ſumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

Corollarium III.

Tab.II. Fig.23. 69. Anguli obtuſi eundem ſinum habent cum acutis, qui ipſis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem ſi recto fuerint multo majores, perinde eſt in præſenti caſu, ac ſi angulus *o* eſſet valde acutus. Quodſi autem angulum *o* in electione ſtationum obtuſum deſideres, tantillo rectum excedere debet, conſequenter anguli A & C ſimul a recto tantillo deficiant neceſſe eſt.

Corollarium IV.

70. Si angulus *o* fuerit rectus, arcus BE cum ipſa BD coincidit, atque adeo errori in diſtantia admiſſo æqualis reperitur, ubi in eadem menſura determinatur, in qua datur diſtantia ſtationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

Corollarium V.

71. Errore adeo in angulo C exiſtente eodem, qui in diſtantia admittitur minimus omnium eſt, ubi angulus *o* fuerit rectus.

Theorema VII.

72. *Si in dimetienda diſtantia locorum* AB, *ex duobus angulis* A *&* C *& uno latere* AC, *error etiam in altero angulo metiendo* A *admittatur, præter eum qui in angulo* C *committitur; erit errorem in angulo* A *commiſſum metiens arcus* DI, *diſtantia uno errore implicita* AD *tanquam radio deſcriptus, ad errorem inde in diſtantia productum* IH, *ut ſinus anguli tertii* o *quantitate erroris primi* m *diminuti ad ejus coſinum.*

Demonstratio.

Etenim ſi AH fuerit recta poſitione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admiſſum promovetur diſtantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH diſtantia ex duplici errore *m* & *k* admiſſo. Tab.II. Fig.23. Jam, diſtantia uno errore implicita AD tanquam radio, deſcribatur arcus DI menſura erroris *k* (§. 57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 *Geom.*); conſequenter anguli DIH & ADI recti (§. 78 *Geom.*), cumque arcus DI ſit paucorum minutorum (§. 59 *Geom.*) pro recta haberi poteſt. Hinc porro ut in Demonſtratione præcedente colligitur eſſe $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Eſt vero ut ſinus anguli *y* ad DI, ita ſinus anguli *z* ad IH (§. 33). Ergo DI ad IH ut ſinus anguli *y* ad ſinum anguli *z* (§. 173 *Arithm.*), ſive coſinum anguli *y* (§. 241 *Geom.* & §. 11. *Trig.*). *Q. e. d.*

Scholion.

73. *Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in diſtantia admiſſus eodem modo determinatur, niſi quod tum fiat ſubtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorſus compenſare poſſit, ubi alter additivus, alter ſubtractivus fuerit. Sed plura non addimus, ob rationem paulo ante dictam.*

Problema XXVII.

74. *Invenire diſtantiam duorum locorum inacceſſorum* AB. Tab.II. Fig.17.

Resolutio.

1. Statione commoda in C electa inveſtigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea deſignatis (§. 125 *Geom.*).
2. Inveſtigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 126 *Geom.*).

3. Sum-

3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E ſubtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 245 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.

Tab.II. Fig.17.

4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA XXVIII.

Tab.II. Fig.18. 75. *Invenire altitudinem acceſſibilem* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa, Inſtrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, inveſtigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
2. Quæratur porro diſtantia ſtationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
3. Cum adeo C ſit rectus (§. 78 *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic ſi addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA VIII.

Tab.II. Fig.19. 76. *Si in quantitate anguli* A *inveſtiganda aberretur, erit altitudo vera* BD *ad falſam* BC, *ut tangens anguli veri* DAB *ad tangentem anguli erronei* CAB.

DEMONSTRATIO.

Aſſumto AB pro ſinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo ſe habet Demonſtratio, ſi angulus erroneus ſit minor vero.

COROLLARIUM I.

77. Quoniam, poſita eadem quantitate anguli veri atque erronei, eadem eſt ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM II.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum, ſeu recto vel minuto proximorum, minorem rationem inter ſe habent quam tangentes mediocrium ſeu ſemirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium teſte; ſi idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri; error in altitudine admiſſus major erit in caſu priore, quam in poſteriore.

SCHOLION.

79. *Sit ex. gr. angulus verus BAD* 30°, *AB* 67′: *erit altitudo vera* 3° 8′ 6″. *Ponamus aſſumi angulum erroneum BAC* 31°: *is producet altitudinem erroneam BC* 4° 0′ 2″ (§. 36). *Sit in diſtantia minore BE angulus DEB recto proximus* 86°, *& aſſumatur per errorem angulus* 87°: *reperietur altitudo erronea* 5° 1′ 6″, *quæ erroneam ſupra inventam excedit* 1° 1′ 4″.

COROLLARIUM III.

80. Quoniam itaque in diſtantia minore EB angulus E major eſt quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in diſtantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus diſtantia ſtationis ab altitudine aſſumenda eſt mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a ſemirecto.

THEO-

Theorema IX.

Tab.II. Fig.20. 81. *Si Inſtrumentum in* A *non fuerit horizontaliter collocatum, ſed vel quantitate anguli* BAD *verſus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli* EAB *ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falſam ut tangens anguli veri* CAB *ad tangentem erronei* CAD *vel* CAE.

Demonstratio.

Sumto enim AB pro radio, CB eſt tangens anguli veri CAB (§.7). Inferendum ergo: ut ſinus totus ad tangentem CAB, ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut ſinus totus ad tangentem CAD, ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§.196 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Idem eodem modo oſtenditur, ſi inſtrumentum quantitate anguli EAB a ſitu horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

Scholion.

82. *Eadem ergo hic locum habent Corollaria, quæ modo Theorematı præcedenti ſubjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioſo nempe ſitu tam lineæ AC, quam AB commiſſum.*

Problema XXIX.

83. *Metiri altitudinem inacceſſam* AB. Tab.II. Fig.21

Resolutio.

1. Eligantur duæ ſtationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*), tanto intervallo DF diſtantes, ut angulus FAD non ſit nimis exiguus, nec altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB (§.78, 80).
2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD, ex datis angulo D, *per obſervationem*, & angulo AFD (§.239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36); dein, ex notis in triangulo ACF, præter rectum C, angulo F & latere AF, latus AC, itemque CF (§.36); tandem, ex cognitis in triangulo FCB, præter rectum C, angulo CFB & latere CF, latus CB (§. 36).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§.86 *Arithm.*).

Finis Trigonometriæ planæ.

Fig: Trigonometr. Tab: I.

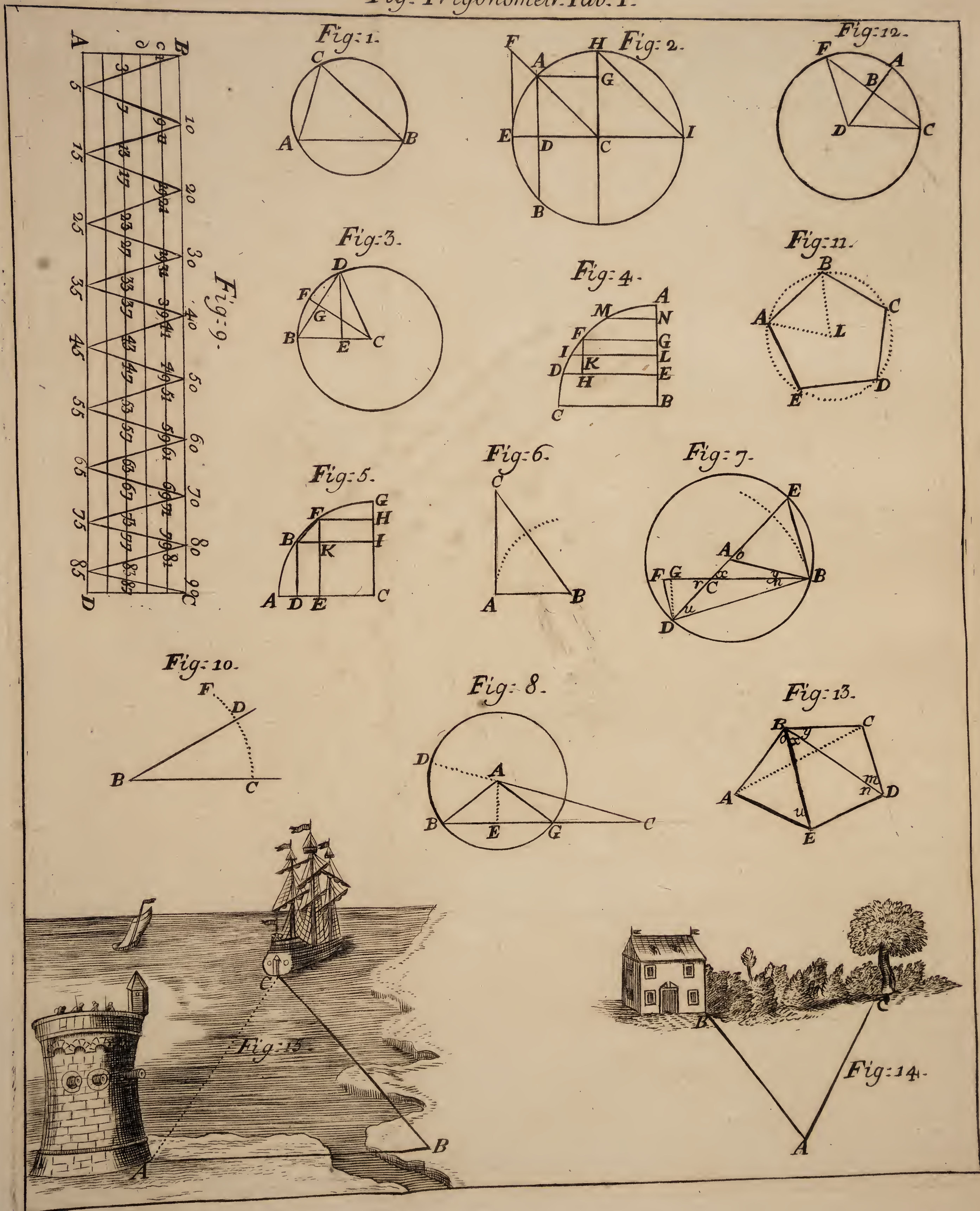
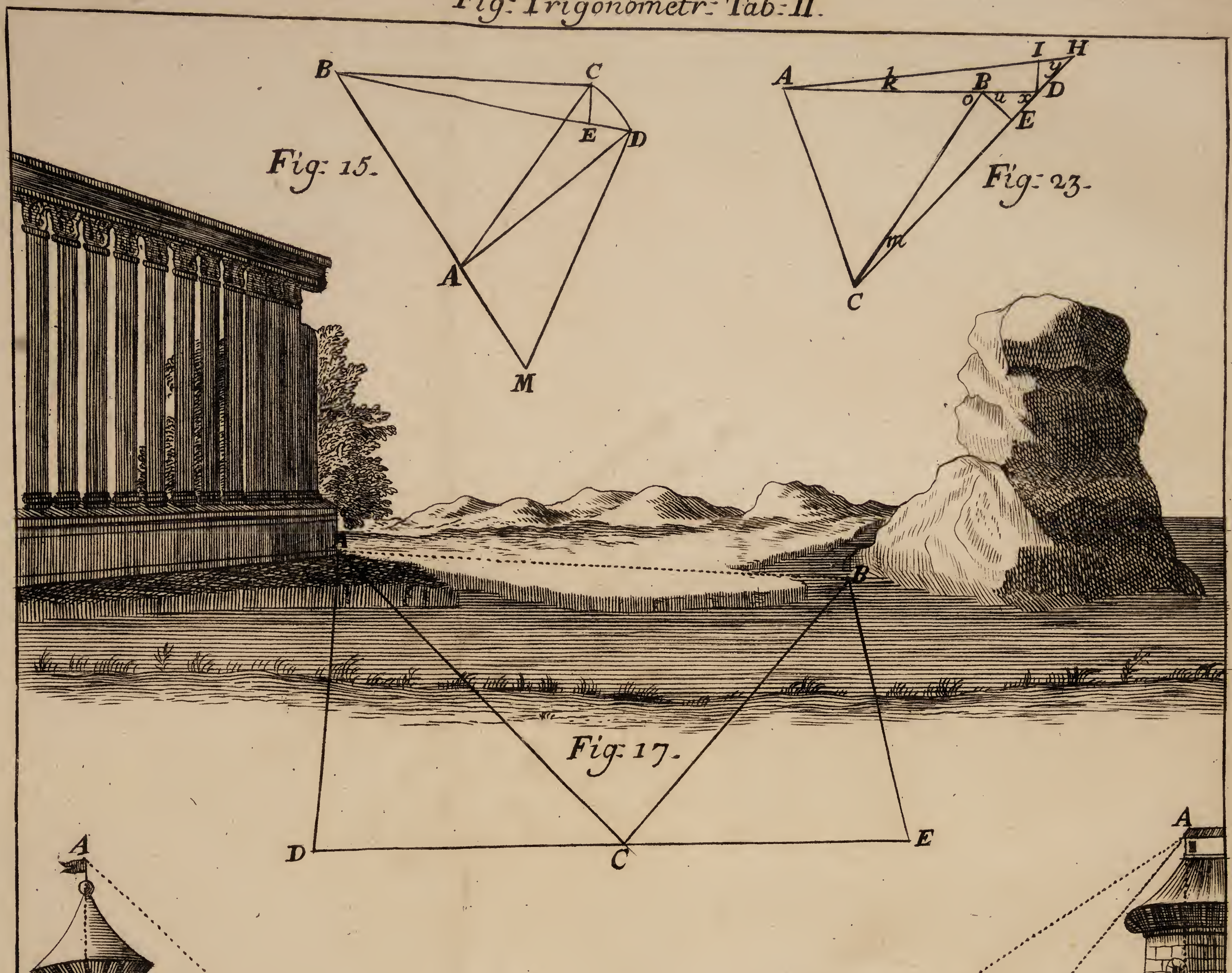


Fig: Trigonometr: Tab: II.



ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

PRÆFATIO.

APicem totius Eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim Ars, per calculum quantitatum generalem, proprio marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus, & Analyſi adjutus, multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet, eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi, Artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in Artem ſignorum combinatoriam convertitur, conſtanter eandem & principiis paucis ac manifeſtis ſuperſtructam. Illud autem prorſus mirabile exiſtit, ope Analyſeos unica ſæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonſtrandas volumina integra non caperent. Hinc, unius lineæ intuitu, integras fere diſciplinas, paucorum

minutorum ſpatio, addiſcere licet, quibus, juxta communem methodum comprehendendis, anni complures vix ſufficerent. Solidam ergo in Matheſi eruditionem conſecuturus Analyſi ſtudeat opus eſt. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla eſt), quam novitate rei deterritus a præſtantiſſimo ſtudiorum genere arceatur; Arithmeticam ſpecioſam familiarem ſibi reddat, neglectis ſub initium regularum rationibus, ſicubi difficultatem faceſſant, & exemplis numericis in locum earundem ſubſtitutis. Ubi ad exempla algebraïca pervenerit, non inutile judicamus, ut Tyrones data per numeros variis modis explicent, & idem Problema in caſibus ſpecialibus aliquoties ſolvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adſueſcant & ejus rationes ſimplices perſpiciant. Neque vero putandum eſt, integram Analyſin jamdum eſſe inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc ſubſidia deeſſe poſterorum induſtria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam Analyſin non omnia eruuntur, inprimis ſi a linearum & ſuperficierum ſitu pendent. Quamobrem LEIBNITIUS, Vir in omni eruditione ſummus, pro ea, quæ ipſi eſt, ingenii perſpicacitate novam quandam *Analyſin ſitus* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum ſitus* appellat) ſuperſtructam, a calculo magnitudinum, quibus in noſtra Analyſi utimur, toto cœlo differentis. Immo, qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad ſolvenda Problemata cum cura adhibuerit, pluribus regulis inveniendi artem ipſe locupletabit. Ceterum, quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari, ſtudio prætermiſſa, ea per Analyſin eruimus, ex Geometria quoque ſublimiori inveſtigantes, quæ præ reliquis ſcitu neceſſaria.

ELEMEN-

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

PARS PRIMA, ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

SECTIO PRIMA, DE ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT PRIMUM. *De Arithmetica Rationalium.*

DEFINITIO I.

1. ANALYSIS *mathematica* eſt Methodus reſolvendi Problemata mathematica.

DEFINITIO II.

2. *Arithmetica ſpecioſa* eſt, quæ computum quantitatum ſeu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logiſtica ſpecioſa.*

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum ſigna ſint literæ alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæſitarum poſtremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION I.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæſitæ tanquam diſtinctæ intellectui repræſententur per diverſas notiones; eædem quoque tanquam diſtinctæ repræſentandæ ſunt imaginationi per ſigna diverſa.*

SCHOLION II.

5. *Nos* CARTESIUM *ſequimur in* Geometria. *Angli nonnulli, exemplo* HARRIOTI *in* Artis Analyticæ praxi, *incognitas quantitates vocalibus; cognitas conſonantibus deſignant.* VIETA *hujus Logiſticæ inventor uſus eſt literis majoribus; qui eam primus perfecit* HARRIOTUS *& ipſum ſecutus* CARTESIUS *literas minores ſubſtituerunt.*

Hypothesis II.

6. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ ſupponi poſſunt; eas quoque in denominatione exprimi conſultum eſt.*

Ex. gr. Si fuerint duæ quantitates quæſitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major ſit aggregatum ex ſemiſumma duarum quantitatum & earundem ſemidifferentia, minor vero differentia inter ſemiſummam & ſemidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 *Trigonom.*); conſultum ſæpius eſt, ut ſemiſumma dicatur x & ſemidifferentia y, atque hinc quantitas major $x + y$, minor $x - y$, quam ut ipſa major x & minor y vocetur.

Scholion.

7. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione expectandi, ex ſubſequentibus patebit. Breviatur calculus, idemque facilitatur; reſolutiones Problematum ſæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii ſuo loco ſeſe offerent. Plura circa denominationem moneri poſſent, niſi conſultius judicaremus ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

Hypothesis III.

8. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in* Arithmetica communi *tradidimus* (§. 63, 65, 68, 71, 254, 295,); *niſi quod quantitates ſe mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, inſtar fractionum ſcribantur.*

Ex. gr. $\frac{a}{b} = a : b$; $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

Scholion.

9. *Vulgo multiplicationis ſignum eſt* ×. *Ex. gr.* ab *ſcribitur* a×b. *Sed cum hoc ſignum facile cum litera* x *a typothetis confundatur, uſus ejus merito improbatur.*

Hypothesis IV.

10. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compoſiti parentheſi ( ) includuntur.*

Ex. gr. factum ex $a + b - c$ in d ita ſcribitur: $(a + b - c) d$. Similiter factum ex $a + b - c$ in $d - g$ hunc in modum effertur, $(a + b - c)(d - g)$.

Scholion.

11. *Vulgo hæc facta ita ſcribunt:* $d \times \overline{a + b - c}$ & $\overline{a + b - c} \times \overline{d - g}$. *Sed cum hæc ſcriptio typothetis moleſtias creet, inprimis ſi ex alio capite linearum ſupra literas ducendarum numerus multiplicatur, ſignis* Leibnitianis *utendum eſſe judicamus, quæ non inutiliter in* Actis Eruditorum Lipſienſibus *uſurpantur & ab admodum* R. P. Guidone Grando (a) *in Italia primum introducta.*

Hypothesis V.

12. *Si quantitatum ſe mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; ſigno parentheſeos ( ) ſimiliter utimur, niſi circumſtantiæ ſingulares ſuadeant, eas fractionum inſtar ſcribi.*

Ex. gr. Quotus ex $a + b$ per c ita ſcribitur, $(a + b) : c$. Quotus vero ex $a + b$ per $c - d$ ita exprimitur, $(a + b) : (c - d)$. Similiter $a : (a + b)$ deſignat quotum ipſius a per $a + b$ diviſi. Iidem quoti communiter ita ſcribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

Hypo-

(a) In *Quadratura Circuli & Hyperbolæ*, Part. 2. p. m. 58.

HYPOTHESIS VI.

13. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per* m, n, r, s, t *&c.*

Ex. gr. x^m, y^n, z^r &c. deſignant potentias indeterminatas diverſi generis (§. 254 *Arithm.*); *mx, ny, rz* multipla vel ſubmultipla diverſa quantitatum *x, y, z,* prout *m, n, r* vel numeros integros, vel fractos deſignant (§. 136 *Arithm.*).

HYPOTHESIS VII.

14. *Si radix ex pluribus literis componitur; parentheſi includitur & exponens ipſi ſuffigitur, ut ante.*

Ex. gr. $(a+b-c)^2$ deſignat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet, ſeu indeterminatam ipſius $a+b-c$.

SCHOLION.

15. *Communiter ita ſcribunt* $\overline{a+b-c}^{\,2}$, $\overline{a+b-c}^{\,m}$.

DEFINITIO III.

16. *Quantitas* ſigno + affecta dicitur *poſitiva*, item *affirmativa*, atque *nihilo major*: quæ vero ſigno — afficitur, *privativa*, item *negativa*, atque *nihilo minor*, a nonnullis *abſurda*.

COROLLARIUM I.

17. Quoniam + eſt ſignum additionis (§. 63 *Arithm.*); − vero ſignum ſubtractionis (§. 65 *Arithm.*): quantitas poſitiva prodit, ſi vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, ſi quantitas aliqua vera ex nihilo ſubtrahitur; ex. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION I.

18. *Ponamus, te habere nummorum nihil, tibique donari* 100; *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem poſitivam conſtituunt. Ponamus, e contrario, te nihil habentem ſolvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeóque, antequam ſolutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim ſunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa eſt. Notandum vero quantitates poſitivas initio vel ſolitarie poſitas ſigno nullo affici. Cur vero poſitivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex Corollario patet.*

COROLLARIUM II.

19. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; conſequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

20. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & [illegible]gibilis evadit.*

COROLLARIUM III.

21. Si reſiduo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua ſubtractio facta (§. 106 *Arithm.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 17): hoc eſt, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ ſe mutuo deſtruunt.

COROLLARIUM IV.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere poteſt (ex. gr. ſi 7 deficiunt, plura deſunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ ſunt verarum defectus (§. 19); ideo quantitas una privativa aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt. Quamobrem quantitates privativæ inter ſe homogeneæ ſunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM V.

23. Sed quia defectus poſitivæ quantitatis aliquoties ſumtus poſitivam ſuperare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (§. 17); quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM VI.

24. Cum adeo quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ (§. 23), privativis homogeneæ ſint, (§. 22); inter privativam & poſitivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 *Arithm.*). Ex. gr. $-3a:-5a=3:5$.

SCHOLION III.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ *&* $-5a$ *eandem eſſe rationem, quæ eſt inter poſitivas* $+3a$ *&* $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ ſunt, proportionales eſſe poſſint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifeſtum eſt, in qua eandem rationem inter lineas eſſe demonſtravimus, quæ inter ſuperficies datur. Ex. gr. Parallelogramma æqualium baſium rationem altitudinum habent (§. 389* Geom.) *& in praxi regulæ trium pretia ſumuntur ut mercium quantitates; licet pretia mercibus heterogenea ſint. Falluntur autem, qui inter* 1 *&* -1, *atque inter* -1 *&* 1 *rationem eandem eſſe ſibi perſuadent* (§. 24).

THEOREMA I.

26. *Quantitas quælibet pro unitate aſſumi poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in ſe una eſt (§. 3 *Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 13 *Arithm.*). Ergo ipſa pro unitate aſſumi poteſt (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

27. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem ſigno afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur, ut in Arithmetica communi.
2. Si ſignis diverſis afficiuntur, additio mutatur in ſubtractionem & reſiduo præfigitur ſignum majoris.
4. Quantitates diverſis literis notatæ junguntur mediante ſigno + (§. 8).

$$\begin{array}{lllll} 4a + 2b - 2c - 5d - g & \quad & a - b \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g & & c \\ \hline 9a \quad + 4c - 3d - 4g & & a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate aſſumi poſſit (§. 26); erit $a + a + a + a = 4a$; conſequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 96 *Arithm.*). Eodem modo patet eſſe $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$, *per demonſtr.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 91 *Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonſtr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per ſe patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum,* b *groſſum,* c *nummum; habebimus*

$$\begin{array}{l} 7a - 9b + 5c = 7 \text{ th.} - 9 \text{ gr.} + 5 \text{ num.} \\ 3a + 5b - 9c = 3 \quad + 5 \quad - 9 \\ \hline 10a - 4b - 4c = 10 \text{ th.} - 4 \text{ gr.} - 4 \text{ num.} \end{array}$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in caſu diverſitatis ſignorum additio in ſubtractionem mutetur & reſiduo ſignum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in ſumma 10 *thalerorum deficiunt* 9 *groſſi: quamobrem ſi quinque addantur, defectus minuitur & ad* 4 *reducitur. Quoniam vero non* 5 *groſſi integri, ſed demtis* 9 *nummis, ſummæ adjiciendi; ſumma* 10 th. − 4 gr. *excedit genuinam* 9 *nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in nume-*

numero ſuperiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri poſſunt: qui vero adhuc deſiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo Inventore detecta.

THEOREMA II.

29. *In ſubtractione quantitatum compoſitarum ſigna ſubtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit ſubtrahenda ex $a+b$; differentiam eſſe debere $a+b-c-d$, adeoque ſigna + in quantitate ſubtrahenda in — mutari, ex *hypoth.* 3 (§.8) patet. Sed ſi $c-d$ ſubtrahenda ex $a+b$, & integrum c ſubtrahitur; quantitas major ſubducta quam fieri debebat. Ergo quod plus juſto ſubtractum eſt d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

30. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas a ſe invicem ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ ſigna eadem habent, & minor e majore ſubtrahenda; ſubtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) abſolvitur.
2. Si vero major e minori ſubducenda; contraria ratione minor e majore ſubtrahitur & reſiduo præfigitur ſignum —, ſi quantitates ſigno + afficiuntur; ſignum vero +, ſi ſigno — gaudent.
3. Si quantitates diverſa ſigna habent; in additionem mutatur ſubtractio & aggregato præfigitur ſignum ejus quantitatis, ex qua ſubtractio facta eſt.
4. Si quantitates diverſis literis notatæ, ſigna ſubtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$\begin{array}{l} 8a - 5c + 9d = 8\text{th.} - 5\text{gr.} + 9\text{ num.} \\ 6a - 8c - 7d = 6 - 8 - 7 \\ \hline 2a + 3c + 16d = 2\text{th.} + 3\text{gr.} + 16\text{num.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ d-e+f \\ \hline a+b-c-d+e-f \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+d \\ c-e-g \\ \hline a+d-c+e+g \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ ſint vel unitates eædem, vel ejuſdem unitatis multiplæ aut ſubmultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§.35, 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ ſubtrahenda; erit reſiduum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§.29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§.27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ ſubtrahi debent ex $8e - f$; erit reſiduum $8e - f + 9e - 7f$ (§.29). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§.27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per Theor. 2 (§.29).

Aliter.

1. Signa quantitatis ſubtrahendæ mutentur in contraria (§.29): quo facto
2. Additio fiat (§.27), ſeu quæ ſe mutuo deſtruunt deleantur.

Ex. gr.

Ex.gr. Si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ ſubtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$ fiat (§. 29) $- 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) reſiduum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, ſe mutuo deſtruunt (§. 21).

SCHOLION.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint (§. 23), heterogeneæ autem nec addi* (§. 61 Arithm.), *nec a ſe invicem ſubtrahi poſſint* (§. 64 Arithm.), *privativæ tamen poſitivis addantur & ab iis ſubtrahantur. Enim vero rem curatius perpendens animadvertes, proprie loquendo privativam nunquam addi poſitivæ, nec ab eadem ſubtrahi: ſed in additione ſubtrahi, quod plus juſto fuerat additum (§. 27); in ſubtractione addi, quod plus juſto fuerat ſubductum (§. 30).*

THEOREMA III.

32. *Si quantitas poſitiva per poſitivam multiplicetur aut dividatur; in utroque caſu quantitas prodit poſitiva.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 *Arithm.*). Sed uterque factor eſt poſitivus, *per hypoth.* Ergo & factum poſitivum eſſe debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum eſt $+ab$, *per demonſtr.* Ergo ſi $+ab$ dividitur per $+a$, quotus erit $+b$; ſi per $+b$, quotus $+a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

33. *Si quantitas negativa per poſitivam multiplicetur aut dividatur; in utroque caſu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem eſt hac quantitatem aliquam aliquoties ſibimetipſi addere (§. 67 *Arithm.*). Eſt vero ſumma quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in poſitivam negativum eſt. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ eſt $-ab$ *per demonſtr.* Ergo ſi $-ab$ dividitur per $+b$, quotus eſt $-a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas poſitiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arithm.*): id quod ipſa notio quantitatis privativæ inſinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui poſitivo, qualis eſt iterata ejuſdem quantitatis additio, in qua multiplicatio conſiſtit (§. 67 *Arithm.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ poſitivis junguntur, ita ut addi rurſus debeat, quod plus juſto fuerat ſubtractum: id quod evidentiſſime ita demonſtramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum, & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipſi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (§. 230 *Geom.*) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Eodem modo oſtenditur, ducta HG ipſi BD parallela; fore Tab. I. *Fig.* I

Tab. I. Fig. 1. re GHBD & BHIF, conſequenter AEIH rectangula. Sit ergo $AE = c$, $GD = d$: erit $EC = a - c$, $CG = b - d$, atque hinc $ACDB = ab$, $AEIH = bc - dc$ & $HGDB = ad$ (§. 375 *Geom.* & §. 33 *Analyſ.*). Quodſi areas rectangulorum AI, & HD ſubtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc eſt, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30). Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ eſſe $+ cd$. *Quod erat unum.*

In diviſione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arithm.*). Diviſurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus adeo qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), utique quantitas poſitiva eſſe debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

35. *Poſſunt etiam Theorema 3 & 4 ope rectanguli demonſtrari.*

THEOREMA VI.

36. *Si quantitas poſitiva per negativam multiplicatur aut dividitur; quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties ſibimetipſi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero privativa ſit defectus alicujus quantitatis (§. 19); proprie loquendo poſitiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ poſitivis junguntur, ita ut ſubtrahatur, quod plus juſto fuit additum: id quod ita demonſtramus.

Sint LMON & PMOQ rectangula, & in iis $NO = a$, $MO = b$, $QO = c$; Tab. I. Fig. 2. erit $NQ = a - c$, area $PQOM = bc$, $LNOM = ab$, (§ 375 *Geom.*), conſequenter $LNQP = b(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.*

Factum ex $-c$ in $-d$ eſt $+ cd$ (§. 34). Ergo ſi $+ cd$ dividis per $-c$, quotus eſſe debet $-d$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

37. *In multiplicatione ac diviſione eadem ſigna efficiunt +, diverſa —.*

DEMONSTRATIO.

Si quantitates ſe mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint poſitivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque caſu poſitiva (§. 32, 34): ſi vero altera privativa, altera poſitiva; quantitas prodit privativa (33, 36). Ergo eadem ſigna efficiunt +, diverſa —. *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

38. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas in ſe invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arithm.*), niſi quod notetur regula: *eadem ſigna faciunt* +, *diverſa* — (§. 37).

$$\begin{array}{rrrr} & & a+c & \\ & & b+d & \\ \hline & & +ad & +cd \\ ab & +bc & & \\ \hline ab & +ad & +bc & +cd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & a+b-d & & \\ & & a-b-d & & \\ \hline & & -ad & -bd & +dd \\ & -ab & -bb & +bd & \\ aa & +ab & -ad & & \\ \hline aa\ * & -bb & -2ad & * & +dd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 10 = & 8+4-2 & & & \\ & 2 = & 8-4-2 & & & \\ \hline & & -16 & -8 & +4 & \\ & -32 & -16 & +8 & & \\ 64 & +32 & -16 & & & \\ \hline 20 = 64 & * & -48 & * & +4 & \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{rrr} & 8 = & 10-2 \\ & 7 = & 10-3 \\ \hline & & -30+6 \\ & 100 & -20 \\ \hline \end{array}$$
$$56 = 100 - 50 + 6 = 50 + 6$$

Scholion.

39. *Exemplum poſterius demonſtrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 ſunt diſtantiæ factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repræſentari ſolitæ; quod relinquitur, factis ex diſtantiis iſtis in denarium a 100 ſubductis, indicatur digitis reſiduis in utraque manu &, ut ab erectis diſtinguantur, depreſſis, ſingulis nempe pro totidem denariis ſumtis. Ita in noſtro caſu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, ſimul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summæ adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in ſe invicem.*

Problema IV.

40. *Quantitates compoſitas dividere.*

Resolutio.

Si quantitas una per alteram actu dividi poteſt, orta nempe ex diviſore in aliam (§. 210 *Arithm.*); diviſio inſtituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: *eadem ſigna faciunt* +, *diverſa* — (§. 37).

In aliis caſibus tantum obſervanda, quæ ſupra præcepimus (§. 8).

Ex. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{l} a-b-d)\ aa-bb-2ad+dd\ (a+b-d \\ \qquad\quad aa-ab-ad \\ \hline \qquad\quad +ab-bb-ad+dd \\ \qquad\quad +ab-bb-bd \\ \hline \qquad\qquad\quad -ad+bd+dd \\ \qquad\qquad\quad -ad+bd+dd \\ \hline \qquad\qquad\quad\ \ 0 \quad\ 0 \quad\ 0 \end{array}$$

Problema V.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera ſubtrahere.*

Resolutio.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236, 237 *Arithm.*).

Ex. gr. ſint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 235 *Arithm.*). Ergo ſumma $\frac{ad+bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter ſit fractio $\frac{a}{b}$ ſubtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 30).

Problema VI.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

Resolutio.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239, 243 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Sint fractiones ſe mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones ſe mutuo diviſuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

Corollarium I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc eſt, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum eſſe per integram, ſi fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§.242 *Arithm.*).

Corollarium II.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc eſt, ex quantitate fracta per integram diviſa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum eſſe per diviſorem, & factum ſubſcribendum numeratori immutato, ſi fractio per integrum dividenda.

Problema VII.

45. *Quantitatem quamcunque per diviſorem compoſitum dividere, utut diviſionem exactam non admittat.*

Resolutio.

Diviſio inſtituatur ut in Arithmetica communi (§.117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifeſtet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur; obſervata ſubtractionis, itemque multiplicationis ac diviſionis lege de ſignorum mutatione (§.29, 37).

Ex. gr. Si quantitas dividenda b, dividens $a+c$, erit:

$$\begin{array}{l} a+c)\, b \,\left(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} \text{ \&c. in infin.}\right. \\ \quad b + \frac{bc}{a} \\ \hline \quad - \frac{bc}{a} \\ \quad - \frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2} \\ \hline \qquad + \frac{bc^2}{a^2} \\ \qquad + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3} \\ \hline \qquad\quad - \frac{bc^3}{a^3} \text{ \&c. in infin.} \end{array}$$

Nimirum ſi b per a dividitur, quotus eſt $\frac{b}{a}$ (§.8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a + c$ eſt $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§.43), hoc eſt, $b + \frac{bc}{a}$ (§.223 *Arithm.*): quod ex dividenda b ſubductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§.30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§.44). Factum ergo ex $a + c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc eſt, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43, 37), ſeu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.231 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ ſubtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 30). Unde patet quomodo diviſio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipſa diviſionis ratio inſinuat, quotum conſtare ex infinita terminorum ſerie, quorum numeratores ſunt potentiæ ipſius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipſius a, quarum exponentes

nentes æquantur numero ordinis terminorum. Ex. gr. in termino tertio potentia ipſius c in numeratore ſecunda eſt, potentia vero ipſius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM I.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, ſubſtituto valore hoc in quoto, prodit $1 = c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $1 : (1 + c) = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

47. Quodſi termini in quoto continuo decreſcant, ſeries dat quotum vero quantumlibet propinquum. Ex. gr. ſi $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his ſubſtitutis in ſerie generali, aut diviſione ut in exemplo univerſali inſtituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam ſeriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, ſed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in ſexto; denuo peccabitur in defectu, ſed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem conſtantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per ſeries infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ ſeries progreſſiones geometricæ decreſcentes, ita quidem ut numerator ſemper ſit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis reſolvendæ.*

COROLLARIUM III.

49. Si termini in quoto continuo creſcunt, ſeries a quoto tanto magis diſcedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, niſi terminetur, ultimumque reſiduum ſub ſigno ſuo adjiciatur. Ex. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 ſuperat $\frac{1}{3}$ exceſſu $\frac{2}{3}$; termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$; termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$; & ita porro. Ponamus ſeriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter ſi ſit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares, $= 0$, deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1; conſequenter exceſſus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus ſeriem univerſalem (§.46) terminari in $-c^3$: erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = (1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4) : (1 + c)$ (§.235 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§.21).

SCHOLION I.

50. *Tyrones hoc Problema cum ſuis Corollariis ſub initium prætermittere poſſunt, donec inferius ad illud provocetur.*

SCHOLION II.

51. *Quoniam ſi* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ *in ſeriem reſolvitur, quotus a fractione propoſita, quantumlibet continuatus, continuo differt* $\frac{1}{2}$ (§.49), *reſolutio in præſenti caſu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commiſit* Guido GRANDUS *in Tractatu* De quadratura circuli & hyperbolæ, *Cor. 3, Prop. 7, Part. 1, p.m. 29, ubi infert, ob* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. *in infinitum* $= 0$, *ſummam infinitarum nullitatum eſſe* $\frac{1}{2}$. *Nec veritatem attigiſſe liquet* LEIBNITIUM *in* Actis Eruditorum *Tom.* 5, Supplement. *p.* 264, *& ſeqq.*

DEFINITIO IV.

52. *Series*, quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur *convergentes*: quæ ab eodem continuo recedunt, *divergentes*.

COROL-

COROLLARIUM I.

53. Ergo ſeries fractionum continuo decreſcentium (§. 47, 48) ſunt convergentes: ceteræ vero, quarum termini continuo creſcunt (§. 49), divergentes.

PROBLEMA VIII.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejuſdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, ſumma eſt exponens facti.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & y^m & y^m & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r} & x^{n+s} \end{array}$$

II. In diviſione exponens dignitatis dividentis ſubtrahatur ab exponente dividendæ; reſiduum eſt exponens quoti

$$\frac{x^7}{x^4}\left(x^3 \quad \frac{y^{m+n}}{y^n}\left(y^m \quad \frac{a^m x^n}{a^r x^s}\left(a^{m-r} x^{n-s}\right.\right.\right.$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progreſſione arithmetica (§. 251, 333 *Arithm.*), dignitates in geometrica (§. 250, 332 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum logarithmis recte habentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo ſumma exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo multiplicantes, eſt exponens facti (§. 337 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo dividentes, eſt exponens quoti (§. 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

55. *Progreſſiones iſtæ hæ ſunt:*
$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.
Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54).
Sed $x : x = 1$ (§. 69 Arithm.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arithm.).

PROBLEMA IX.

56. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere; aut ex eadem dati ſimiliter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data, intuitu ejus ad quam evehenda, radix eſt (§. 246 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum exiſtunt, *per demonſtr. in Probl. præc.* (§. 54): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (341 *Arithm.*).

Ex. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n eſt x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 eſt y^6.

II. Non abſimili modo liquet, exponentem radicis haberi, ſi exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 341 *Arithm.*).

Ex. gr. Radix quadrata ex x^6 eſt x^3: radix n ex x^{mn} eſt x^m: radix n ex x^m eſt $x^{m:n}$.

COROLLARIUM.

57. Eſt itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 341 *Arithm.*); conſequenter quantitates irrationales ad expreſſionem rationalem reduci poſſunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analyſi commodi afferat hæc reductio ex capite ſubſequente eluceſcet. Etenim ſi quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non eſt, ſed rationalium inſtar tractari poſſunt: quemadmodum primi docuerunt* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA X.

59. *Quantitates irrationales diverſæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 57), diverſitas denominationis ab exponentibus diverſis pendet, exponentes vero fractiones ſunt, quæ ad alias ipſis æquales, ſed ejuſdem denominationis reduci poſſunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates ſurdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ ſeu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 57).

Ex. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arithm.*), hoc eſt, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57); ſeu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad ſecundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. *Quodſi quis ægre admiſerit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is eaſdem formulas, quas ejus ope elicuimus, per Algebram inveſtigare poteſt, quemadmodum inferius docebimus.*

PROBLEMA XI.

61. *Quantitates irrationales ad ſimpliciorem expreſſionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis eſt ipſi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 57), & $x^{m:m} = x$ (§. 56.), erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, ſi quantitas ſub ſigno radicali per iſtiuſmodi potentiam, quæ eundem cum radicali ſigno exponentem habet, diviſibilis. Diviſio nempe actu inſtituenda, quoto ſub ſigno radicali relicto & diviſoris radice eidem præfixa.

Ex. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 eſt cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejuſdem gradus ad ſimpliciorem expreſſionem reductæ ſub ſignis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter ſe ut quantitates rationales ſignis præfixæ (§. 178 *Arithm.*); conſequenter quantitates irrationales inter ſe commenſurabiles eſſe poſſunt (§. 160 *Arithm.*).

Ex. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$, hoc eſt, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$. In caſu reliquo ſunt incommenſurabiles.

SCHOLION I.

63. *Iſtud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire ſolet.*

COROL-

Corollarium II.

64. Per præſens adeo Problema invenitur ratio rationalis irrationalium, ſi qua datur.

Corollarium III.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, ſi quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens ſigno radicali præfixus, & dignitas per quantitatem ſub ſigno radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

Scholion II.

66. *Quodſi quæſiveris, quomodo in reſolutione innoteſcat, utrum quantitas ſub ſigno radicali poſita per potentiam aliquam requiſitam ſit diviſibilis, nec ne; & quænam ſit iſta potentia; in diviſores reſolvenda eſt, inter quos locum obtineant neceſſe eſt omnes potentiæ a prima uſque ad requiſitam, ſi cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *ſit diviſibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Reſoluturus numerum* 368 *in ſuos diviſores, reperiet tentando*

2	184
4	92
8	46
16	23

nempe diviſionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 *potentiam primi gradus*, 4 *potentiam ſecundi*, 8 *potentiam tertii &* 16 *potentiam quarti. Ergo* 16 *eſt diviſor quæſitus, conſequenter* $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

Problema XII.

67. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera ſubtrahere.*

Resolutio.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 61) fuerint commenſurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a ſe invicem ſubtrahuntur; ibique ſumma, hic differentia denuo præfigitur ſigno radicali. Reliqua omnia ſunt ut in additione & ſubtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum ſint incommenſurabiles (§. 62); ſumma erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compoſitis tum in additione:

$$
\begin{array}{l}
4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\
\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\
\hline
5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \text{ ſumma;}
\end{array}
$$

hoc eſt $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$
ſeu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in ſubtractione

$$
\begin{array}{l}
5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\
3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\
\hline
2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \text{ different.}
\end{array}
$$

hoc eſt $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$
ſeu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{28900}$

Demonstratio.

Omnia manifeſta ſunt ex demonſtratione Probl. 1 & 2 (§. 27, 30).

Problema XIII.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

Reso-

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponente. Quodſi radicales quantitates fuerint diverſæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (*§. 59*).

Ex. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compoſitis

$$\begin{array}{rr}
\sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\
\sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\
\hline
-\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\
3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\
\hline
3-2=1 & 2\sqrt{6}+5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
7\sqrt{3}-5\sqrt{2} \\
5\sqrt{8}+3\sqrt{6} \\
\hline
+21\sqrt{18}-15\sqrt{12} \\
35\sqrt{24}-100 \\
\hline
35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-100 \\
\text{hoc eſt } 70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\
\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\
\hline
+16+8+32 \\
+4+2+8 \\
8+4+16 \\
\hline
98
\end{array}$$

Similiter in diviſione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compoſitis;

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3})\ \sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2 \\
\quad \sqrt{15} \\
\hline
\quad -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\
\quad -\sqrt{6} \\
\hline
\quad +\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\
\quad\quad 2\sqrt{3} \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}$$

SCHOLION I.

69. *Interdum etiam diviſio locum habet, ſi diviſor compoſitus eſt. Sed cum rariſſimus ſit ejus uſus & ea diviſione ignorata maxime præclaros in Analyſi progreſſus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi ſuperfluum judicamus. Docet ipſam* OZANAMUS *in* Novis Elementis Algebræ (*a*).

SCHOLION II.

70. *Ceterum ex tradito hactenus calculo liquet, ſi quantitatem duplici ſigno radicali affici contingat, ex.gr. ſi fuerit* $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem ſub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. Ex.gr.*

$$\begin{array}{l}
\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}\ (\S.\ 61) \\
\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})} \\
\hline
\sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})} \\
\qquad = \sqrt{(50\sqrt{3})} \\
\qquad = \sqrt{\sqrt{7500}}.
\end{array}$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{ll}
3+\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}} \\
\sqrt{\sqrt{2}} & \sqrt{(5\sqrt{5})} \\
3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & 5+\sqrt{(5\sqrt{10})} \\
\text{hoc eſt } \sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & \text{ſeu } 5+\sqrt{\sqrt{250}} \\
\text{ſeu } \sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\sqrt{(3+\sqrt{2})} & \sqrt{(3+\sqrt{2})} \\
\sqrt{(5-\sqrt{3})} & \sqrt{(3-\sqrt{2})} \\
\hline
-3\sqrt{3}-\sqrt{6} & -3\sqrt{2}-2 \\
15+5\sqrt{2} & 9+3\sqrt{2} \\
\hline
\sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})} & \sqrt{7}
\end{array}$$

Dicuntur iſtiuſmodi Radices, *qualis eſt* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$, univerſales.

(*a*) *Nouveaux Elémens* d'*Algebre*, Lib. I. Probl.4. & ſeqq. p. 7. & ſeqq.

SCHOLION III.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, ſi quantitas ſub ſigno radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *ſit quantitas impoſſibilis, propterea quod omne quadratum ſit poſitivum* (§. 246 Arithm. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & ſubtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8}=3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2}=5\sqrt{-2}=\sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8}=\sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa ſub ſigno radicali conſideratur inſtar poſitivæ, in multiplicatione ſignum non mutatur, ſed facto perinde ac factoribus præfigitur ſignum* $-$: *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique abſurdum. Quamobrem regula de ſignis tantummodo obſervatur reſpectu radicum, minime vero reſpectu quantitatum ſub ſigno radicali poſitarum.*

Ex. gr.

$$\begin{array}{l} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} \\ \quad\sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline +4+2 \\ -8-4 \\ \hline -6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2}=-2$, & $+1.-1=-1$. *Ergo* $-1.-2=+2$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ -45+6\sqrt{-15} \qquad\qquad \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

CAPUT III.

De uſu Calculi litteralis in inveniendis Theorematis.

PROBLEMA XIV.

72. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, ſubtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi poteſt (§. 72 *Arithm.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par ſit $=2c$. Erit

$$\begin{array}{lll} 2a & 2a & 2a \\ 2c & 2c & 2c \\ \hline \end{array}$$

Summa $2a+2c$ Diff. $2a-2c$ Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia, atque factum duorum numerorum parium eſt numerus par.

PROBLEMA XV.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi parem impari addas, vel parem ab impari ſubtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par ſit $2a$ (§. 72 *Arith.*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arithm.*). Erit

$$\begin{array}{l} 2c+1 \\ \quad 2a \\ \hline 2a+2c+1 \text{ Summa:} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2c+1 \\ \quad 2a \\ \hline 2c+1-2a \text{ Diff.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema. Si parem impari addas, aut unum ex altero ſubtrahas; ibi aggregatum, hic differentia eſt numerus impar. Si vero numerus par & impar ſe mutuo multiplicent, factum eſt numerus par.

Problema XVI.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, ſi impar impari addatur, aut unus ex altero ſubtrahatur, aut ſi impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a+2b+2 \end{array}\ \text{Summa.} \qquad \begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a-2b \end{array}\ \text{Differ.}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \end{array}\ \text{Factum.}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo ſubtrahitur; ibi ſumma, hic differentia eſt numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum eſt numerus impar.

Problema XVII.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, &c. erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque eſt numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem par $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot ſcilicet ſunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, multitudine pari, eſt numerus par.

Sint numeri impares, ut ante, $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$, &c. numerus eorundem impar $2m+1$. Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, ſi numero impares fuerint, numerus eſt impar.

Scholion.

76. *Notetur in his Problematibus denominandi artificium, quod conſiſtit in analytica expreſſione numeri paris & imparis, quæ eorum definitiones repræſentat.*

Problema XVIII.

77. *Invenire, qualis ſit numerus per quem impar parem metitur.*

Quodſi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.* & 73 *Anal.*), adeoque $(2a+1)\,2b = 4ab+2b$. Eſt igitur $(4ab+2b):(2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

Corollarium I.

78. Patet ſimul, numerum, qui metitur parem per imparem, eſſe parem.

Corollarium II.

79. Et quoniam $(2ab+b):(2a+1) = b$; liquet porro, ſi impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

Pro-

PROBLEMA XIX.

80. *Invenire, qualis ſit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodſi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§.74 *Arith.* & §.74 *Anal.*), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ ſeu $4ab+2a+2b+1$. Eſt igitur $(4ab+2ab+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§.210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA XX.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $=n$, erit altera $n+1$: quadratum majoris n^2+2n+1 (§.246 *Arithm.*)
minoris n^2

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, eſt numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis, ſeu ſumma radicum.

COROLLARIUM I.

82. Facillime ergo conſtruuntur Tabulæ numerorum quadratorum, pro radicibus in ſerie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & conſequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat conſequens.

COROLLARIUM II.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: ſi $n=2$, erit $2n+1=5$: ſi $n=3$, erit $2n+1=7$: ſi $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum ſunt numeri impares in continua ſerie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione naſcuntur numeri quadrati.

Radic.	Num.impar.	Num.Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA XXI.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit
Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§.248 *Arithm.*).
minor n^3

Differentia $3n^2+3n+1$, hoc eſt, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, eſt aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia $n+2$
erit cubus $n^3+6n^2+12n+8$
præced. n^3+3n^2+3n+1

Differ. $3n^2+9n+7$
Differ. præc. $3n^2+3n+1$

Differ. 2. $6n+6$

Theorema 2. Differentia ſecunda trium cuborum in ſerie naturali eſt aggregatum ex ſextuplo radicis primæ & ſenario, ſeu factum ex radice ſecunda in ſenarium.

Quod ſi jam $n = 1$, erit $6n + 6 = 6 + 6 = 12$; ſi $n = 2$, erit $6n + 6 = 12 + 6 = 18$: ſi $n = 3$, $6n + 6 = 18 + 6 = 24$: ſi $n = 4$, $6n + 6 = 24 + 6 = 30$, &c.

Theorema 3. Differentiæ ſecundæ cuborum in ſerie naturali progredientium eſt progreſſio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Conſtructo itaque numerorum quadratorum Canone (§. 82), per ſolam additionem inde porro conſtruitur Canon numerorum cubicorum, per Theorema primum; nondum conſtructo, per tertium, quemadmodum ex ſequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. 1.	Diff. 2.
1	1		
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30
		91	
6	216		36
		127	
7	343		42
		169	
8	512		48
		217	
9	729		54
		271	
10	1000		

PROBLEMA XXII.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit ſumma $Q + q$, differentia $Q - q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{ccc} Q+q & Q+q & Q+q \\ Q & q & Q-q \\ \hline Q^2+Qq & Qq+q^2 & -Qq-q^2 \\ & & Q^2+Qq \\ \hline & & Q^2 \quad -q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum quantitatum (ex. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex ſumma in differentiam æquale eſt differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodſi rectangula $Q^2 + Qq$ & $Qq + q^2$ addantur; prodit $Q^2 + 2Qq + q^2$ quadratum ipſius $Q + q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram ſimul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA XXIII.

88. *Si totum ſit diviſum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a + b$, minor $a - b$; conſequenter $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Ergo ſi addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum ſit diviſum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 261 *Arith.*); erit ſumma $2a^2 + 2b^2$, hoc eſt, ſumma quadratorum partium inæqualium æqualis eſt duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA XXIV.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod diviſum.*

Sint partes Q & q: erit totum $Q+q$, hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$. Quodſi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius, una cum quadrato partis unius, æquale eſt rectangulo ex duplo ejuſdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodſi $2Q+q$ in ſeipſum ducas; prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius, una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in ſe invicem.

PROBLEMA XXV.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviſo atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviſo in partem unam æquatur quadrato ejuſdem partis, atque rectangulo ex eadem in ſummam duarum reliquarum.

PROBLEMA XXVI.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque diviſa & inſecta altera.*

Sint partes lineæ ſectæ a, b, c, &c. erit linea ſecta $= a+b+c$, &c. Sit porro linea inſecta $= d$: erit $(a+b+c$, &c.$)\ d = ad + bd + cd$, &c.

Theorema. Si linea recta fuerit in partes quotcunque diviſa & præterea alia inſecta, erit rectangulum ſub iis comprehenſum æquale rectangulis ſub inſecta & ſingulis ſectæ partibus contentis.

PROBLEMA XXVII.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviſo in partes ſingulas.*

Sit totum $= a + b$, erit $(a+b)\,a = a^2 + ab$ & $(a+b)\,b = ab + b^2$. Ergo ſumma $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arithm.*),

Theorema. Si recta ſecta ſit utcunque, erunt rectangula ſub tota & partibus comprehenſa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA XXVIII.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales diviſo & adjecto in adjectum.*

Sit totum in duas partes æquales diviſum $= 2a$ & adjectum $= c$, erit compoſitum $= 2a+c$; conſequenter $(2a+c)c = 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum ſub toto & adjecto in adjectum, una cum quadrato partis dimidiæ, eſt æquale quadrato compoſiti ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA XXIX.

95. *Invenire Theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in ſe ipſam, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c. (§. 250 *Arithm.*): ceu videre eſt ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex Tabulæ hujus conſideratione manifeſtum eſt, terminos potentiarum componi ex quibuſdam factis litteralibus, & numeris præfixis, quos *Uncias* cum OUGHTREDO (*a*) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, ſi ſint duæ progreſſiones geometricæ, quarum prima a potentia deſiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate deſinat, altera vero ab unitate incipiat & in deſiderata potentia partis ſecundæ radicis deſinat, atque termini ejuſdem ordinis in utraque ſerie in ſe invicem ducantur. Ex. gr. quærenda potentia ſexta: ſcribe

a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1. Series I.
1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6. Series II.

erunt $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia ſexta ipſius $a+b$.

Apparet denique, uncias reperiri, ſi exponentes potentiarum ſecundæ ſeriei ſeu ipſius b ſub exponentibus poteſtatum primæ ſeriei ſeu ipſius a ſcribantur, & nota prima ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem ſubit unciæ termini ſecundi poteſtatis; ſimiliter factum ex nota prima in ſecundam ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, factum ex prima in ſecundam ex ſerie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. Ex. gr. pro potentia ſexta erit:

6. 5.

(*a*) *Clavis Mathematicæ*, c. 12. §. 6. p. m. 38.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc $\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſecundi potentiæ ſextæ; $\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3}=\frac{120}{6}=20$, uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſexti; $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$, uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodſi vero regulam pro potentia indeterminata deſideres, non alia re opus eſt, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$$\frac{a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ a^{m-5}}{1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5, \&c.}$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$, &c. quæ ſunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes ſint:

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.}{1.\ 2\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}\ \&c.$$

erit $\frac{m}{1}$, uncia termini ſecundi potentiæ; $\frac{m.m-1}{1.2}$, uncia tertii; $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$, uncia quarti; $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, uncia quinti; $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, uncia ſexti; $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$, uncia ſeptimi &c. Quare ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati;

$$\begin{aligned}
&a^m\\
&+\tfrac{m}{1}a^{m-1}b\\
&+\tfrac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2\\
&+\tfrac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3\\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4\\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{m-5}b^5\\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^6
\end{aligned}$$

&c. in infinitum

Quoniam vero $a^{m-1}=a^m:a$; $a^{m-2}=a^m:a^2$; $a^{m-3}=a^m:a^3$; $a^{m-4}=a^m:a^4$; $a^{m-5}=a^m:a^5$; &c. in infinit. (§. 54) his valoribus ſubſtitutis (§. 15 *Arithm.*) formula in ſequentem degenerat:

$$\begin{aligned}
&a^m\\
&+\frac{m.a^m b}{1.a}\\
&+\frac{m.m-1.a^m b^2}{1.\ 2.\ a^2}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.\ 2.\ 3.\ a^3}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ a^4}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ a^5}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^m b^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ a^6}
\end{aligned}$$

&c. in infinitum.

Quodſi jam porro cum viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO (*a*) ponamus $a=P$ & $b:a=Q$; erit $a^m=P^m$; $b^2:a^2=Q^2$; $b^3:a^3=Q^3$; $b^4:a^4=Q^4$; $b^5:a^5=Q^5$ &c.

(*a*) In Epiſtola A. 1676 ad LEIBNITIUM data, apud WALLISIUM, Operum Vol. III. f. 622.

&c. conſequenter his valoribus ſubſtitutis formula :

$$P^m$$
$$+\frac{m}{1}P^m Q$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\ 2.}P^m Q^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}P^m Q^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\ P^m Q^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur porro $P^m = A$; erit $\frac{m}{1}P^m Q = \frac{m}{1}AQ$.

Sit $\frac{m}{1}P^m Q = B$: erit $\frac{m.m-1}{1.\ 2}P^m Q^2 = \frac{m-1}{2}BQ$.

Sit $\frac{m-1}{2}BQ = C$; erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}P^m Q^3 = \frac{m-2}{3}CQ$.

Sit $\frac{m-2}{3}CQ = D$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ 2.\ 3}\frac{m-3}{4}P^m Q^4 = \frac{m-3}{4}DQ$

Sit $\frac{m-3}{4}DQ = E$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ 2.\ 3}\frac{m-3.m-4}{4.\ 5}P^m Q^5 = \frac{m-4}{5}EQ$

Sit $\frac{m-4}{5}EQ = F$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ 2.\ 3}\frac{m-3.m-4.m-5}{4.\ 5.\ 6}P^m Q^6 = \frac{m-5}{6}FQ$

&c. in infinitum.

Habetur ergo tandem

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5} + EQ\,\frac{m-5}{6}FQ \text{ \&c in infinit.}$$

SCHOLION I.

96. Equidem hoc Theorema nonniſi per inductionem eruimus, quæ inter demonſtrandi methodos locum minime habet : ſed cum hæc inductio fundetur in obſervatione legis conſtantis atque neceſſariæ, in inveniendo tuto adhibetur ; etſi conſultum ſit, reperta alio poſtea modo demonſtrari.

SCHOLION II.

97. Ut vero Theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illuſtrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis 18 *ſeu* 10 + 8 *: erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = \frac{4}{5}$, *conſequenter*

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$
$$mAQ = 4.\ 10000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{160000}{5} = 32000 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\ 32000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{6}{5}.\ 32000 = 6.6400 = 38400 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\ 38400.\ \tfrac{4}{5} = \tfrac{8}{15}.\ 38400 = \tfrac{307200}{15} = 20480 = D$$
$$\frac{m-3}{4}DQ = \tfrac{1}{4}.\ 20480.\ \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.\ 20480 = \tfrac{20480}{5} = 4096 = E$$
$$\frac{m-4}{5}EQ = 0.\ 4096.\tfrac{4}{5} = 0.$$

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 Dignitas quarta ipſius 18.

Eadem dignitas invenitur, ſi 18 *in duas quaſcunque partes alias, ex. gr. in* 6 *&* 12 *ſecetur : quo in caſu erit* $P = 6$ *&* $Q = 12 : 6 = 2$, *conſequenter*

$$P^m = 6^4 = 1296 = A$$
$$m\,AQ = 4.\ 1296.\ 2 = 8.\ 1296 = 10368 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\ 10368.\ 2 = 3.\ 10368 = 31104 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\ 31104.\ 2 = \tfrac{4}{3}.\ 31104 = \tfrac{124416}{3} = 41472 = D$$

m − 3

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}.41472.2 = \frac{2}{4}.41472 = \frac{41472}{2} = 20736 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = 0.20736.2 = 0.$$

$$\begin{array}{rl} 1296 & = A \\ 10368 & = B \\ 31104 & = C \\ 41472 & = D \\ 20736 & = E \\ \hline 104976 & \end{array}$$

Dignitas quarta ipſius 18.

Patet adeo ſeriem terminari, ſi m *explicetur per numerum determinatum.*

COROLLARIUM I.

98. Si m explicetur per numerum fractum, ſeries $P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipſius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem Theorema extractioni radicis inſervit. Ex.gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = x^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

$$P^m = a^{2:2} = a = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{1}{2}a. - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}. - \frac{x^2}{2a}. - \frac{x^2}{a^2}$$

$$= \frac{1-2}{4}.\frac{x^4}{2a^3} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3}. - \frac{x^4}{8a^3}. - \frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-4}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{3}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4}. - \frac{x^6}{16a^5}. - \frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-6}{8}.\frac{x^8}{16a^7} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5}. - \frac{5x^8}{128a^7}. - \frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-8}{10}.\frac{5x^{10}}{128a^9} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}, \text{ \&c. in inf.}$$

Eſt adeo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$, &c. in infin.

SCHOLION III.

99. *Si cui moleſtus evadit fractionum calculus, is cum* NEWTONO *in formula generali ſubſtituat pro* m *exponentem fractum* m : n, *formulam ſequentem obtenturus:*

$$(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ$$

&c. *Hac vero formula ubi utetur, quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *aſſumet* 1.

SCHOLION IV.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$ *&c. quam in dato caſu determinet, numero pro* m *ſubſtituto. Ex.gr. Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana; erit* m = 4: *unde habetur* $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, *& juxta hoc Theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 269, 282 Arithm.). *inquiſivimus. Nimirum, cum præter* a^4 *ſeu quadratoquadratum partis primæ radicis, quatuor auferri debeant facta; reſecentur verſus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum:*

10	4976 (18
1	
9	4976
$4a^3 =$	4 . . .
$4a^3b =$ 3	2 . . .
$6a^2b^2 =$ 3	84 . .
$4ab^3 =$ 2	048 .
$b^4 =$	4096
	94976
	0

$4a^3 = 4$
$b = 8$
$4a^3b = 32$

$b^2 = 64$
$a^2 = 1$
$a^2b^2 = 64$
6
$6a^2b^2 = 384$

$b^3 = 512$
$4a = 4$
$4ab^3 = 2048$

Si radix plures quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.). *Quodſi numerus, ex quo radix extrahenda, non ſit dignitas perfecta; dignitas proxime minor ſit* = P, *& reſiduum poſt extractionem more vulgari inſtitutam per eandem diviſum* = Q, m = 1, *&* n *exponens dignitatis, cujus radix deſideratur. Ita ope Theorematis in Schol. præc. obtinetur ſeries infinita certa progreſſionis lege reſiduam partem radicis exhibens.*

Ex. gr. Quæratur $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1, *& reſiduum hoc ex* 2 *ſubducto* = 1; *erit* P = 1, Q = 1. *Præterea* m = 1, *&* n = 2. Hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$
$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6}\cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$
$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}\cdot\frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$
$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10}\cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \text{ \&c.}$$

Eſt ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} -$ &c. $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c. in infinitum.

Ubi ſeries fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt{2}$ *ſit diagonalis quadrati, poſito ejus latere* = 1 (§. 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope veræ ad praxin quantumlibet ſufficientes duci poſſunt. Ex. gr. ſi pro diagonali ſumatur* $1 + \frac{1}{2}$, *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ [$= 3 : 2$] *juſto major quam diagonalis ad latus, ſed exceſſus conſiſtet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali ſumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *ſeu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ [$= 11 : 8$] *juſto minor quam diagonalis ad latus, ſed defectu infra* $\frac{1}{16}$ *exiſtente: & ita porro.*

Corollarium II.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi poteſt, ſumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inſervis.

Ex. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, ex. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ &c. $c = a$ & $d + g = b$: erit $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3 (d + g) + 6c^2 (d + g)^2 + 4c (d + g)^3 + (d + g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $ma^{m-1} b = 4c^3 (d + g)$, $\frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 = 6c^2 (d + g)^2$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.} a^{m-3} b^3 = 4c (d + g)^3$,

m.

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} a^{m-4}b^4 = (d+g)^4.$$

Eſt vero, vi ejuſdem Theorematis $(d+g)^2 = d^2+2dg+g^2$; $(d+g)^3 = d^3+3d^2g+3dg^2+g^3$; $(d+g)^4 = d^4+4d^3g+6d^2g^2+4dg^3+g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4+4c^3d+4c^3g+6c^2d^2+12c^2dg+6c^2g^2+4cd^3+12cd^2g+12cdg^2+4cg^3+d^4+4d^3g+6d^2g^2+4dg^3+g^4$.

Corollarium III.

102. Quare ſi infinitinomium fuerit $a+by+cy^2+dy^3+ey^4+fy^5+gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a ſubſtituatur a, pro b autem $by+cy^2+dy^3+ey^4+fy^5+gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Eſt enim

$$\begin{array}{ll}
b^2 = & b^2y^2+2bcy^3+c^2y^4+2cdy^5+d^2y^6 \text{ \&c.} \\
 & \qquad +2bdy^4+2bcy^5+2cey^6 \text{ \&c.} \\
 & \qquad\qquad +2bfy^6 \text{ \&c.} \\
b^3 = & b^3y^3+3b^2cy^4+3bc^2y^5+c^3y^6 \text{ \&c.} \\
 & \qquad +3b^2dy^5+6bcdy^6 \text{ \&c.} \\
 & \qquad\qquad +3b^2ey^6 \text{ \&c.} \\
b^4 = & +b^4y^4+4b^3cy^5+6b^2c^2y^6 \text{ \&c.} \\
 & \qquad +4b^3dy^6 \text{ \&c.} \\
b^5 = & +b^5y^5+5b^4cy^6 \text{ \&c.} \\
b^6 = & +b^6y^6 \text{ \&c.}
\end{array}$$

Hos ergo valores ſi in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3}a^{m-3}b^3$ &c. ſubſtituas, & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipſius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$a^m$$

$$+a^{m-1}by$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}c
\end{array}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3}a^{m-3}b^3 \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bc \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}d
\end{array}\right\} y^3$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4}a^{m-4}b^4 \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1}a^{m-3}b^2c \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}c^2 \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bd \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}e
\end{array}\right\} y^4$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}a^{m-5}b^5 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 1}a^{m-4}b^3c \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1}a^{m-3}b^2d \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1}a^{m-3}bc^2 \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}cd \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}be \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}f
\end{array}\right\} y^5$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^5 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 1}a^{m-5}b^4c \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 1.\ 2}a^{m-4}b^2c^2 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 1}a^{m-4}b^3d \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{m-3}c^3 \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 1.\ 1}a^{m-3}bcd \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2e \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}a^{m-2}d^2 \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}ce \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bf \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}g
\end{array}\right\} y^6$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM IV.

103. Eodem modo patet, ſi infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in ſerie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos eſſe per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipſius y ſint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION V.

104. *Conſtat adeo idem Theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem deſideratam evehendo ſufficere. Tyrones illud ſub initium ſtudii analytici prætermittant, donec inferius in Analyſi infinitorrm eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad poteſtatem determinatam facile evehitur per formulas ſpeciales ſuperius allatas. Ex. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem ſecundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *erit*

$$\begin{array}{l}
h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4 \\
\qquad + 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad + 2hlx^5 + 2ilx^6 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad + 2hmx^6 \text{ \&c.}
\end{array}$$

(§. 265 Arithm.). *Nimirum primo ſumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$, *& quæritur ejus potentia deſiderata, veluti hic ſecunda. Deinde* $hx + ix^2$, *habentur pro termino uno,* kx^3 *pro altero, atque ſic denuo per formulam binomii determinatur potentia deſiderata, veluti hic ſecunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *ſumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero, & ita porro. Quæ eadem ſeries invenitur, ſi in generali* (§. 102) *fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. *Eſt enim:*

$$a^m y^m = h^2x^2$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,b\,y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}a^{m-2}\,b^2\,y^{m+2} = \tfrac{2}{2}h^0i^2x^4 = i^2x^4.$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,c\,y^{m+2} = 2hkx^4 \text{ \&c.}$$

SCHOLION VI.

105. *Ceterum notetur artificium, quo caſus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA XXIX.

106. *Determinare ſummam termini primi & ultimi in progreſſione arithmetica.*

Sit

Sit terminus primus a, differentia terminorum ſive creſcentium, ſive decreſcentium, d; erit (§. 333 *Arithm.*).

$$\begin{array}{cccccc} a, a \pm d, & a \pm 2d, & a \pm 3d, & a \pm 4d, & a \pm 5d, \\ a \pm 4d & & a \pm 2d & & a \\ \hline 2a \pm 5d, & & 2a \pm 5d, & & 2a \pm 5d, \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{cccc} a, a \pm d, & a \pm 2d, & a \pm 3d, & a \pm 4d \\ a \pm 3d & 2 & & a \\ \hline 2a \pm 4d. & 2a \pm 4d & & 2a \pm 4d \end{array}$$

Theorema. In progreſſione arithmetica tam creſcente, quam decreſcente, ſumma termini primi & ultimi æqualis eſt ſummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiſtantium, aut medii duplo, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \text{Ex. gr.}\ 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21 \\ & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & & 24 = & 24 = & 24 = & 24 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

107. Habetur ergo ſumma progreſſionis arithmeticæ, ſi ſumma termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM II.

108. Quodſi adeo ſit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arith.*), conſequenter ſumma progreſſionis $\frac{1}{2}n\,(2a + (n-1)\,d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d, & numero terminorum n, invenitur ſumma progreſſionis, ſi facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in ſemidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejuſdem. Ex. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, erit ſumma $= 21 + \frac{49-7}{2}.\ 3 = 21 + \frac{42}{2}.\ 3 = 21 + 21.\ 3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent Tyrones regulas ex ſymbolis eruturi, ab initio gradatim eſſe progrediendum, exprimendo nempe ſigillatim quodlibet ſymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem ſignis repræſentatam per nomina convenientia. Ex. gr. in* an *eſt* a *terminus primus &* n *numerus terminorum*, ex hypoth. *Sed* an *eſt factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *ſubſtituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eſt quadratum ipſius* n (§. 254 Arithm.). *Sed* n *eſt numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat ſubtractionem* (§. 8). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ *ſemidifferentia iſta. Porro* d *eſt differentia terminorum*, ex hypoth. *adeoque* $\frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$ *factum ex illa ſemidifferentia in differentiam terminorum. Denique ſignum* + *indicat facta hactenus explicata eſſe addenda. Hac quidem ſyllabizatione opus habent, qui ſine mora ſymbolicas expreſſiones quantitatum ſibi familiares reddere geſtiunt.*

COROLLARIUM III.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc eſt, ſit ſeries numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c. erit ſumma $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21).

§. 21). Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione; conſequenter differentias numerorum quadratorum eſſe numeros impares: id quod ſupra alia ratione fuit demonſtratum (§. 83).

Corollarium IV.

111. Sit $a = n = \frac{1}{2}d$, erit ſumma $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet adeo cubus reſolvitur in progreſſionem arithmeticam, cujus terminus primus, ſemidifferentia & numerus terminorum ſunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

Scholion.

112. *Patet modus ex formulis algebraïcis eruendi Theoremata ſpecialia, qui continetur ſub Problemate logico de ſpecierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

Definitio IV.

113. *Denominator* rationis eſt quotus ex diviſione termini majoris per minorem emergens.

Corollarium I.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviſo (§. 210 *Arithm.*). Unde ſi terminus minor a, denominator m, erit major ma; ſi terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arithm.*) Immo quoniam $\frac{a}{m} = a \cdot \frac{1}{m}$ (§. 43); ſi m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quacunque deſignat.

Corollarium II.

115. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major conſequente (§. 133 *Arithm.*); ejus denominator idem eſt cum exponente (§. 136 *Arithm.*).

Corollarium III.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arithm.* & §. 114 *Analyſ.*): hoc eſt, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

Scholion.

117. *Exponens & denominator rationis Autoribus voces ſynonymæ ſunt. Aliter vero Veteres, aliter Recentiores exponentem definiunt. Nos Veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 136), *tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonſtrandum utilis. Etenim ſi rationis* 2 : 3 *exponens dicatur* $\frac{2}{3}$; *inde intelligitur antecedentem terminum eſſe æqualem duabus tertiis conſequentis, adeoque pro menſura, qua utrumque metimur, aſſumi tertiam conſequentis partem. Hinc vero clarius cognoſcitur rationis hujus natura, quam ſi cum Recentioribus nonnullis dicas exponentem eſſe* $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in conſequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem conſtituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 115), *quod nomen etiam in caſu poſteriori ſuggerat* (§. 147 Arithm.) *& demonſtrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem aſſumimus.*

Pro-

PROBLEMA XXX.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progreſſionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progreſſio (§. 332 *Arithm.* & §. 114 *Analyſ.*).

$$\begin{array}{ccccccc} a, & ma, & m^2a, & m^3a, & m^4a, & m^5a, & m^6a \\ & m^5a & & m^3a, & m^2a & & a \\ \hline & m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2 = & m^6a^2 \end{array}$$

Theorema. In progreſſione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, itemque medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Ex. gr.} & 3, & 6, & 12, & 24, & 48, \; 96 \\ & & & 12, & 6 & 3 \\ \hline & & & 288 & = 288 & = 288 \end{array}$$

PROBLEMA XXXI.

119. *Determinare quotum ex diviſione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi, $m^{n-1}a - a$. Hæc ſi dividatur per $m-1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{l} m-1)\; m^{n-1}a - a \;(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a, \text{ \&c.} \\ \quad m^{n-1}a - 1m^{n-2}a \\ \hline \qquad + m^{n-2}a - a \\ \qquad + m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline \qquad\qquad + m^{n-3}a - a \\ \qquad\qquad + m^{n-3}a - m^{n-4}a \\ \hline \qquad\qquad\qquad + m^{n-4}a - a \\ \qquad\qquad\qquad + m^{n-4}a - m^{n-5}a \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad + m^{n-5}a - a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + m^{n-5}a - m^{n-6}a \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + m^{n-6}a - a, \text{ \&c.} \end{array}$$

Quodſi n determinetur, ex.gr. per 7, erit $n-7=0$; conſequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque diviſio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progreſſionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus eſt ſumma omnium terminorum excepto maximo.

Et cum ſit $m-1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+ a$ (§. 174, 169 *Arithm.*); patet porro

Theorema 2. In progreſſione geometrica eſt ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad ſummam omnium terminorum excepto maximo.

CoROL-

COROLLARIUM I.

120. Quodſi ergo quoto ex diviſione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; ſumma totius progreſſionis habetur.

COROLLARIUM II.

121. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus ſeu maximus $m^{n-1}a$, adeoque ſumma $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a):(m-1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a):(m-1)$ (*§.* 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a):(m-1)$ (§. 21); conſequenter ſi eadem ſumma dicatur $ſ$, $m - 1 : m^n - 1 = a : ſ$, (*§.* 302 *Arithm.*). Eſt adeo terminus primus (ſeu minimus) progreſſionis ad ejus ſummam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit ex. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit ſumma $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM III.

122. Quoniam ſi terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, ſumma $(m^n a - a):(m-1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & ſummam $(m^{n-1}a - a):(m-1)$ & differentia inter primum & ſummam $\frac{m^n a - a}{m-1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m-1}$ (*§.* 235 *Arithm.*) $= \frac{m^n a - ma}{m-1}$. Eſt ergo differentia prior ad poſteriorem ut $(m^{n-1}a - a):(m-1)$ ad $(m^n a - ma):(m-1)$, hoc eſt, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (*§.* 178 *Arithm.*), hoc eſt, ut 1 ad m (*§.* 181 *Arithm.*), ſeu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

123. Quare ſi differentia inter terminum primum & ſummam dividatur per differentiam inter ſummam & terminum ultimum; quotus eſt denominator (*§.* 69 *Arithm.*).

PROBLEMA XXXII.

124. *Inveſtigare rationum ſymptomata.*

Non alia re opus eſt, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114), & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes ſint æquales, nec ne (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $a : ma$
$\quad c \quad c$
$ac : mac = a : ma$

II. $a : ma$
$\quad c \quad c$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$
$\quad b : mb$
$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$
$\quad b : mb$
$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb.$

Sit porro $a : ma = b : mb$
erit alternatim $a : b = ma : mb$
inverſe $ma : a = mb : b$
converſim $a + ma : a = b + mb : b$
compoſite $a + ma : ma = b + mb : mb$
diviſim $ma - a : a = mb - b : b$
$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item : $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$
$a : mac = b : mbc$
$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$
$ac : ma = bc : mb$
$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$
$ac : mac = b : mb$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$
$ac : mac = bd : mbd$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mad$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb.$

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipſæ nimirum expreſſiones, ſi quoti reducantur per regulas fractionum, rationum ſimilitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum ſit in progreſſione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$ (*Th.*2.§.119); ſit vero $m - 1:1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.*1); erit $ma - a : a = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$, hoc eſt, exceſſus termini ſecundi ſupra primum eſt ad primum, ut exceſſus ultimi ſive maximi ſupra primum ad ſummam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA XXXIII.

126. *Inveſtigare ſymptomata progreſſionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus eſt unitas, ſecundus idem eſt cum denominatore rationis (§. 114). Eſt vero terminus ſecundus vel numerus primus, vel compoſitus; & in caſu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in ſe non poſſit dividi niſi per unitatem ſolam (§. 75 *Arithm.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit ſeries in ratione geometrica progredientium:

$$1,\ m^1,\ m^2,\ m^3,\ m^4,\ m^5,\ m^6,\ \&c.$$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione ſecundi in ſeipſum (§. 332 *Arith.*); per nullum quoque numerum primum dividi poſſunt exacte, niſi per ſecundum, ſeu nullus numerus primus terminos metitur præter ſecundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, &c. non poſſe dividi niſi per m, patet (§ 54). Et cum terminus ſecundus in hoc caſu ſit potentia prima, termini ſequentes ſint potentiæ continuo ordine progredientes ejuſdem numeri (§. 254 *Arithm.*); terminus quilibet major dividi poteſt per quemlibet minorem, ſed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus eſt; maximum nullus alius metitur, præter eos qui ſunt in ſerie; conſequenter nec primus alius, niſi ſecundus, ſeu ab unitate proximus.

Et quoniam, in omni caſu numerorm ab unitate continue proportionalium, termini ultra ſecundum ſunt potentiæ continuo ordine progredientes ejuſdem termini ſecundi, qui communis omnium radix eſt (§. 332, 250 *Arithm.*); igitur in genere patet

Theorema 2. In ſerie numerorum ab unitate continue proportionalium, minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui eſt in ſerie.

Cum terminus compoſitus exacte dividi poſſit per numerum alium præter unitatem (§. 76 *Arith.*); exprimetur idem per mn. Quare ſi in progreſſione geometrica ab unitate incipiente terminus ſecundus ſit mn; erit ſeries

$$1, mn, m^2n^2, m^3n^3, m^4n^4, m^5n^5, m^6n^6, \&c.$$

atque adeo patet numeros primos m & n, qui metiuntur ſecundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque ſerie exponens termini ſecundi eſt 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. conſequenter exponens in loco impari eſt numerus par, in loco pari eſt impar, & quidem in loco quarto, ſeu a ſecundo tertio, exponens eſt ternarius, & duobus locis intermiſſis ſequitur continuo numerus per ternarium diviſibilis, ſeu quem ternarius metitur. Similiter in loco ſeptimo, ſeu a ſecundo ſexto, exponens ſenarius eſt, & quinque locis intermiſſis continuo ſequitur exponens quem ſenarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione naſcantur. Hiſce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, ſecundus (unitate ſecluſa) quadratus erit, & uno intermiſſo omnes: tertius autem cubus eſt, & duobus intermiſſis omnes: ſextus vero cubus ſimul & quadratus, & quinque intermiſſis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, ſecundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuſcunque gradus, erunt ſeries

$$1, m^2, m^4, m^6, m^8, m^{10}, m^{12} \&c.$$
$$1, m^3, m^6, m^9, m^{12}, m^{15}, m^{18} \&c.$$
$$1, m^n, m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n} \&c.$$

Quoniam in qualibet ſerie termini continuo prodeunt multiplicatione per ſecundum, exponens ſecundi continuo additur exponenti termini cujuſcunque dati, ut prodeat proxime ſequens (§. 54); conſequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a ſecundo ſequuntur, ſint multipli exponentis termini ſecundi, per ſecundi quoque termini exponentem dividi poſſunt; conſequenter omnes termini ſunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas eſt ſecundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5. Si in ſerie continue proportionalium ab unitate numerorum, terminus ſecundus, ſeu ab unitate primus, eſt quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; ſi idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; ſi idem fuerit dignitas cujuſcunque gradus, quarti, quinti, ſexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejuſdem gradus, quarti, quinti, ſexti &c.

Scho-

SCHOLION.

127. *Patet adeo, per calculum literalem facillime ſymptomata rationum & progreſſionum geometricarum ab unitate incipientium, vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA XXXIV.

128. *Invenire rationem ſuperficierum atque corporum in Geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, baſes ſint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375, 387 *Geom*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc eſt, ut b ad c (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque-alta baſium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium baſium ſunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*) Eſt ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc eſt, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 3. Quadratum diametri eſt ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint baſes parallelogrammorum & triangulorum ſimilium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375, 387, 392 *Geom.*), hoc eſt, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula ſimilia ſunt ut quadrata baſium; ſeu (quia quodlibet latus pro baſi aſſumi poteſt (§. 113 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint baſes parallelepipedorum, priſmatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora iſta ut ac ad bc (§. 536, 539, 541, 548 *Geom.*), hoc eſt, ut a ad b (§. 181 *Arithm.*). Eodem modo c aſſumi poteſt pro baſi communi, ita ut a & b ſint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, priſmata, cylindri, pyramides & coni ejuſdem altitudinis baſium rationem habent; eandem vero baſin habentes ſunt in ratione altitudinum.

Non abſimili modo alia hujus generis Theoremata inveſtigantur.

PROBLEMA XXXV.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc eſt, ordo earum variari poſſit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut ſcribi poſſit ab, aut ba; patet eſſe numerum variationum $2 = 2 \cdot 1$.

Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

c a b
a c b
a b c

c b a
b c a
b a c

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Quodſi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combi-

 nari

nari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit 6. 4=4. 3. 2. 1=24.

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum 24. 5=5. 4. 3. 2. 1.

Quare ſi numerus quantitatum fuerit *n*; erit numerus variationum *n*. *n*—1. *n*—2. *n*—3. *n*—4. *n*—5 &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab*, *abb*, *bba*, quatuor *cbab*, *bcab*, *babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo 1=(2.1):(2.1), in ſecundo 3=(3.2.1):(2.1), in tertio 12 =(4. 3. 2. 1):(2. 1). Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque: unde numerus omnium variationum 60=(5.4.3.2.1):(2.1). Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit *n*; fore omnium variationum numerum (*n*. *n*—1. *n*—2. *n*—3. *n*—4 &c):(2.1).

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, adeoque numerus variationum 4=(4.3.2.1):(3.2.1). Quinta ſi accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum (5.4.3.2.1):(3.2.1). Eodem modo, ſi ſexta aſſumatur, reperietur numerus variationum (6.5.4.3.2.1):(3.2.1). Unde colligitur, ſi numerus quantitatum ſit *n*, fore numerum omnium variationum (*n*. *n*—1. *n*—2. *n*.—3. *n*—4. *n*—5 &c.):(3.2.1).

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodſi vero quinta accedat, variationes ſunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum eſt 5=(5.4.3.2.1):(4.3.2.1). Si ſexta aſſumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes ſex pariet; adeoque numerus variationum 30=(6. 5. 4.3.2.1):(4.3.2.1). Unde conſtat, ſi numerus quantitatum ſit *n*, fore numerum omnium variationum (*n*. *n*.—1. *n*—2. *n*—3. *n*—4. *n*—5, &c.):(4.3.2.1).

Ex his formulis ſpecialibus colligitur generalis. Nempe ſi *n* denuo ſit quantitatum numerus, *m* numerus qui indicat quoties eadem quantitas occurrit: erit (*n*. *n*—1. *n*—2. *n*—3. *n*—4. *n*—5. *n*—6. *n*—7. *n*—8. *n*—9 &c.):(*m*. *m*—1. *m*—2. *m*—3. *m*—4. *m*—5. *m*—6 &c.). Nimirum ſeries continuanda, donec continua unitatis ſubtractio ex *n* & *m* relinquat 0.

Eodem modo ulterius progredi licet; tandemque reperietur, ſi numerus quantitatum fuerit *n*, numeri qui indicant quoties earum aliquæ repetuntur, ſint *l*, *m*, *r* &c. formula univerſaliſſima (*n*. *n*—1. *n*—2. *n*—3. *n*—4. *n*—5. *n*—6 &c.):(*l*. *l*—1. *l*—2. *l*—3. *l*—4 &c. *m*. *m*—1. *m*—2. *m*—3. &c. *r*. *r*—1. *r*—2. *r*—3. *r*—4. *r*—5 &c.). Ex. gr. ſit *n*=6, *l*=3, *m*=3, *r*=0; erit numerus variationum (6. 5. 4. 3. 2. 1):(3. 2. 1. 3. 2. 1) =(6. 5. 4):(3. 2)=5. 4=20.

SCHO-

SCHOLION I.

130. *Ponamus menſæ aſſidere 13 perſonas. Quodſi quæratur, quoties loca permutare poſſint; repcrietur numerus variationum* 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 6, 227, 020, 800.

SCHOLION II.

131. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in reſolutione problematis uſi ſumus, inveniri poſſunt ſine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis poſſibilia. Ex. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes poſſibiles.*

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt adeo anagrammata vocis. amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SECTIO SECUNDA.

DE ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

De Algebra ad Problemata arithmetica, eaque determinata, applicata.

DEFINITIO V.

132. *Algebra* eſt methodus reſolvendi Problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

133. *Æquatio* eſt expreſſio ejuſdem quantitatis per duos valores diverſos, ſed æquales; ex. gr. $2.3 = 2+4$. STIFELIUS (*a*) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diverſimode denominatos.

DEFINITIO VII.

134. *Radix æquationis* eſt valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. Ex. gr. ſi fuerit $a^2+b^2 = x^2$; radix erit $\surd\,(a^2+b^2)$.

DEFINITIO VIII.

135. Si valor ipſius x fuerit poſitivus; ex. gr. $x=3$; *Radix* dicitur *vera.*

DEFINITIO IX.

136. Si valor ipſius x fuerit negativus; ex. gr. $x = -5$; *Radix* dicitur *falſa.*

(*a*) In *Arithmet. integra* lib. 3. c. 1. p. 228. b.

Definitio X.

137. Si valor ipſius x fuerit radix quantitatis negativæ, ex. gr. $\sqrt{-5}$; *Radix imaginaria* appellatur (§. 71).

Definitio XI.

138. *Æquatio* dicitur *ſimplex*, ſi quantitas incognita fuerit unius dimenſionis; ex. gr. ſi $x=(a+b):2$.

Definitio XII.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, ſi quantitas incognita ad duas dimenſiones aſſurgit, ut $x^2=a^2+b^2$: *cubica*, ſi ad tres; ut $x^3=a^3-b^3$ &c.

Scholion.

140. *In hac ſectione tantum de æquatione ſimplici & quadratica agimus.*

Problema XXXVI.

141. *Problema datum algebraice reſolvere.*

Resolutio.

1. Quantitates datæ a quæſitis diſtinguantur; & datæ primis, quæſitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod ſi fieri nequeat, id indicio eſt, *Problema* non eſſe *determinatum*, ſed unam vel plures quæſitarum pro arbitrio aſſumi poſſe. Inveniuntur autem æquationes, niſi in ipſo Problemate contineantur, per Theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis ſunt permixtæ; ea reducenda eſt, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Inſtituitur autem hæc reductio, ſi quantitates ſubductæ addantur, additæ ſubtrahantur, multiplicatæ dividantur, diviſæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conſervetur (§. 88, 91, 93, 94, 255, 256 *Arithm.*).

Scholion.

142. *Hæc ſufficiunt pro æquationibus ſimplicibus reducendis; ſed ad altiores aliis adhuc ſubſidiis opus eſt, quæ ſuo loco exponemus, nunc nonniſi extractionem radicis ex æquatione quadratica addituri.*

Problema XXXVII.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

Resolutio.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2=ab$; evidens eſt eſſe $x=\sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \mp ax = \mp b^2$; tum x aſſumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita ſecundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, ſi addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi poteſt, ut hic factum eſſe apparet:

Caſus I.

$$x^2+ax=b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2+ax+\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2+b^2$$
$$x+\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+b^2)}$$
$$x=\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+b^2)}-\tfrac{1}{2}a$$

Caſus

Caſus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

vel $x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} > \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipſius x negativus, conſequenter radix falſa (§.136), atque adeo ſolus valor $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ eſt radix vera (§.135).

Caſus 3.

$$x^2 - ax = - b^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \& \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$\& \; x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)}$ valor ipſius x poſitivus; conſequenter radix vera (§.135). Habet adeo in præſente caſu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo poſt ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet eſſe $(\tfrac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \tfrac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XXXVIII.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia, cum tertia & quarta, numerum integrum unitate ſuperat.*

Sit numerus quæſitus x, erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

hoc eſt $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

ſeu $\tfrac{26}{24}x = x + 1$

$$\text{—————— 24 mult.}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$24x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}$$

$$2x = 24$$

$$\text{—————— 2 div.}$$

$$x = 12$$

Examen. $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 6 + 4 + 3$
$= 13 = 12 + 1$

PROBLEMA XXXIX.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ, qualeſcunque & quotcunque, ſimul ſumtæ ipſum ſuperant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæſitus x, partes aliquotæ $\tfrac{a}{b}x$, $\tfrac{c}{d}x$, $\tfrac{e}{g}x$, &c. Erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{a}{b}x + \tfrac{c}{d}x + \tfrac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h.e. $\dfrac{(adg + bgc + bde)x}{bdg} = f + x$ (§.235 *Arith.*)

$$(adg + bgc + bde)x = fdbg + bdgx$$

$$bdgx \qquad bdgx \text{ ſubt.}$$

$$(adg + bgc + bde - bdg)x = fbdg$$

$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

ſeu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$.

Æquatio ultima hanc ſuppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A ſumma numeratorum ſubtrahatur denominator communis. 3. Per reſiduum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus eſt numerus quæſitus.

Ex.

Ex. gr. Sit $a:b = \frac{1}{2}$; $c:d = \frac{1}{3}$, $e:g = \frac{1}{4}$, $f = 1$; erit $x = 24:(12 + 8 + 6 - 24) = 24:2 = 12$.

In analogia, in quam æquationem reſolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes ſunt fractiones iſtæ, ad harum ſupra illum exceſſum, ut communis denominator ad differentiam ejus a ſumma numeratorum.

PROBLEMA XL.

146. *Quantitates irrationales diverſæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ &, $\sqrt[s]{y^r}$, quemadmodum ſupra (§.59). Fiat

$$\begin{array}{ll} \sqrt[m]{x^n} = t & \sqrt[s]{y^r} = v \\ \hline x^n = t^m & y^r = v^s \\ \hline x^{sn} = t^{ms} & y^{rm} = v^{sm} \\ \hline \sqrt[ms]{x^{sn}} = t & \sqrt[ms]{y^{rm}} = v \end{array}$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[s]{y^r} = \sqrt[ms]{y^{rm}}$, ut ſupra (§. *cit.*); quo ipſo patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad eandem denominationem, ſi iidem fuerint fractiones diverſæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti poſſumus in aliis caſibus ſimilibus. Ita multiplicationem ac diviſionem fractorum atque irrationalium eadem methodo inveſtigare licet.*

PROBLEMA XLI.

148. *Datis ſumma duarum quantitatum, & earundem facto; invenire numeros.*

Sit ſumma $= a$ Semidiffer. $= x$
Fact. $= b$; erit quant. maj. $= \frac{1}{2}a + x$
min. $= \frac{1}{2}a - x$ (§.6).

Ergo per conditionem Probl.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4}aa - xx = b & (§.38). \\ \quad xx \quad xx & \text{add.} \\ \hline \frac{1}{4}aa = b + xx & \\ b \quad\quad b & \text{Subtr.} \\ \hline \frac{1}{4}aa - b = xx & \\ \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x & \end{array}$$

Regula 1. A quadrato ſemiſummæ duarum quantitatum ſubtrahatur factum earundem. 2. Ex reſiduo extrahatur radix, quæ erit ſemidifferentia earundem.

Sit ex. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæſiti 8 & 6. Nam $8.6 = 48$, & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ eſt dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio ſecunda hoc continet

Theorema: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale eſt rectangulo inæqualium, una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet adeo, quod ſæpius caſu in Theoremata incidamus, dum Problemata algebraice reſolvimus; qualia ſubinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio marte ex ultima æquatione eruere valet, in poſterum prætermittemus.*

PROBLEMA XLII.

151. *Data ſumma dignitatum ſimilium duarum quantitatum, & differentia earundem; invenire quantitatem utramque.*

Sit

Sit ſumma $= a$ Quantit. maj. $= y$
differentia $= b$ min. $= x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$x^m \quad x^m \text{ ſubt.} \qquad x^m \quad x^m \text{ add.}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§.87 *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$+ x^m \quad + x^m \text{ add.}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$b \quad b \quad \text{ſubt.}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$\text{(2 div.}$$
$$(a - b) : 2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.

Examen: $y^2 + x^2 = 81 + 16 = 97$ &
$y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima reſolvitur in hanc analogiam,

$$a - b : x^m = 2 : 1 \text{ (§.299 } Arithm.\text{)}.$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Exceſſus ſummæ duarum dignitatum ſimilium ſupra differentiam earundem, eſt ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XLIII.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus, una cum itinere diurno alterius ipſum dato tempore ſequentis; invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
ſecundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæſ. $= x$,

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$; quod vero idem intra quæſitum emenſus eſt $= ax$: iter poſterioris intra tempus quæſitum reperietur $= bx$ (§.302 *Arithm.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$ac + ax = bx$$
$$ax \quad ax \text{ ſubtr. quia } bx > ax$$
$$ac = bx - ax$$
$$b - a \text{ div.}$$
$$ac : (b - a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $6 = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi eſt 6, ſecundi 8; via primi eſt $6 . 16 = 96$, ſecundi $8 . 12 = 96$

Æquatio penultima in hanc analogiam reſolvitur (§. 299 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur, tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi uſque ad initium itineris ſecundi elapſum ad tempus quo alter ipſum aſſequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio Problematis reſolutionem non ingrediatur, Problema univerſalius de mobilibus quibuſcunque concipi poſſe.*

PROBLEMA XLIV.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris, una cum tempore ab initio itineris elapſo; invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum aſſequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapſum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$.

Erit, per conditionem Problematis, ut in Probl. præced.

$$ab + ac = cx$$
$$\overline{} \quad c \text{ div.}$$
$$(ab + ac) : c = x$$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam (§. 299 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum inſequitur tempore aliquo elapſo, erit tempus, intra quod ipſum aſſequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapſum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum ſecundi.

PROBLEMA XLV.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuſcujuslibet; invenire tempus, quo ſibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
ſecundi $= c$
tempus occurſus $= x$,

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via quam alter eodem tempore emetitur $= cx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare cum ambo junctim emenſi ſint totum intervallum locorum unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a$$
$$\overline{} \quad b + c \text{ div.}$$
$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die ſibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata iſtiuſmodi ſpecialia ſub initium difficiliora ſunt ſolutu, quam abſtracta; quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex Theorematibus arithmeticis facile eruitur; in illis autem ex circumſtantiis Problematis elicienda. Quodſi enim plures circumſtantiæ occurrunt, Tyrones non ſtatim eas pervident, quæ æquationem ſuppeditant. Diſcant igitur conſultius eſſe ut Problematis abſtractis ſolvendis primas ſtudii Algebraici partes conſecrent: inſuperque notent velim, facilius Problemata ſpecialia ad abſtracta, ſeu generalia, quam vice verſa abſtracta ad ſpecialia revocari; quia iſta conditiones generales, unde ſolutio pendet, actu continent, in his vero circumſtantiæ ſpeciales, quæ ad ſolutionem nil conferunt, minime comparent. Ex. gr. Problema præſens in abſtracto iſtiuſmodi eſt.* Invenire numerum, qui in ſummam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter Problema (§. 152) in abſtracto tale eſt*: Datis tribus quantitatibus, invenire quartam, ita ut factum ex quarta in ſecundam æquale ſit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur Theorematum uſus non ſtatim in oculos occurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addiſci prohibent ea quorum uſus nondum conſtat, vel non ſtatim primo intuitu in oculos occurrit.*

PROBLEMA XLVI.

157. *Data ſumma duarum quantitatum, & differentia quadratorum; invenire quantitates.*

Sit ſumma quantitatum $= a$
differentia quadratorum $= b$
Semidiff. quantitatum $= y$
erit quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).

Qua-

Quare

quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit.

$2a$ div. ——— Probl.

$$y = b : 2a$$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA XLVII.

158. *Data ſumma duarum quantitatum, una cum ſumma quadratorum; invenire quantitatem utramque.*

Sit ſumma $= a$

Summa quadratorum $= b$

Semidiff. quantitatum $= y$

erit major $= \frac{1}{2}a + y$ } (§. 6.)

minor $= \frac{1}{2}a - y$ }

Quare

quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

minoris $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

ſumma $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$

$\frac{1}{2}a^2$ $\quad \frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$

——— 2 div.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$

——— Ext. Rad.

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XLVIII.

159. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius ſit æquale numero dato.*

Sit factum unum $= a$

alterum $= b$

numerus unus $= x$

alter $= y$

erit, per conditionem Problematis,

$x\sqrt{y} = a$ $\qquad$ $y\sqrt{x} = b$

——— Quad. $\qquad$ ——— Quad.

$x^2 y = a^2$ $\qquad$ $y^2 x = b^2$

——— y div. $\qquad$ ——— y^2 div.

$x^2 = a^2 : y$ $\qquad$ $x = b^2 : y^2$

——— Quad.

$x^2 = b^4 : y^4$

$a^2 : y = b^4 : y^4$

——— y^4 mult.

$a^2 y^3 = b^4$

——— a^2 div.

$y^3 = b^4 : a^2$

$$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9\sqrt{4} = 2 \cdot 9 = 18$, & $4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

PROBLEMA XLIX.

160. *Invenire duos numeros, quorum factum æquale eſt numero dato, quadratum vero ſummæ ad quadratum differentiæ habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ $\qquad$ Summa $= 2x$

ratio $= b : c$ $\qquad$ different. $= 2y$

erit major $= x + y$

minor $= x - y$

Ergo, per conditiones Problematis,

$xx - yy = a$ $\qquad$ $b : c = 4x^2 : 4y^2$ (§. 297 *Arithm.*).

$yy \quad yy$ add. $\qquad$ $4cx^2 = 4by^2$

——— $\qquad$ ——— ($4c$ div.

$xx = a + yy$ $\qquad$ $x^2 = by^2 : c$

 Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a+y^2=by^2:c$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; c \text{ mult.}$$
$$ac+cy^2=by^2$$
$$cy^2 \quad cy^2 \text{ ſubtr.}$$
$$\overline{ac=by^2-cy^2}$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b-c \text{ div.}$$
$$ac:(b-c)=y^2$$
$$\overline{\sqrt{ac}:\sqrt{(b-c)}=y}$$

Sit $a=96, b:c=25:1$. Erit $y=\sqrt{96}:\sqrt{(25-1)}=\sqrt{4}=2$, & $x=\sqrt{(a+y^2)}=\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$, conſequenter numerus major $x+y=10+2=12$, & minor $x-y=10-2=8$.

Examen. $12.8=96$ & $100:4=25:1$.

PROBLEMA L.

161. *Dato pretio unius menſuræ vini; invenire quantitatem aquæ commiſcendæ, ut una menſura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $=a$
minus $=b$
quantitas aquæ $=x$.

Cum aquæ pretium nullum ſit; erit $1+x:1=a:b$; conſequenter

$$\overline{b+bx=a} \quad (\text{§.297 } \textit{Arithm.}).$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b \text{ ſubt.}$$
$$bx=a-b$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b \text{ div.}$$
$$x=(a-b):b=a:b-1$$

Sit $a=16$, $b=10$: erit $x=1\frac{6}{10}-1=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretioſiori aqua commiſcenda, ut viliori pretio conſtet; quantitas aquæ commiſcendæ eſt ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x:1=a-b:b$.

Examen. Etenim ſi integra menſura veneat 10 groſſis, tres ipſius quintæ veneunt 6 groſſis (§. 302 *Arithm.*); quos ſi addas pretio unius menſuræ, quod eſt 10 groſſorum, prodibunt 16 groſſi pretium unius menſuræ vini generoſioris.

PROBLEMA LI.

162. *Dato pretio vini generoſi & pretio vilioris; determinare quantitatem vini vilioris generoſo commiſcendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius menſuræ vini
generoſi $=a$
vilioris $=b$
medium $=c$
quantitas unius menſuræ $=1$
quantitas vilioris commiſcendi $=x$
erit pretium ejus $=bx$
quantitas generoſi commiſcendi $=1-x$
erit ejus pretium $=a-ax$

Quare, per conditionem Probl.

$$a-ax+bx=c$$
$$ax \qquad ax \text{ add. ob } ax>bx$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$a+bx=c+ax$$
$$bx \qquad bx \text{ ſubt.}$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$a=c+ax-bx$$
$$c \quad c \qquad \text{ſubt.}$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$a-c=ax-bx$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; a-b \text{ div.}$$
$$(a-c):(a-b)=x$$

Sit $a=16$, $b=10$, $c=12$; erit $x=(16-12):(16-10)=4:6=\frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $=6\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ generoſi $=5\frac{1}{3}$, adeoque menſuræ mixti $=6\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}=12$.

PROBLEMA LII.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, ſumma, & differentia quadratorum ſint inter ſe æqualia.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x+y = xy$$

$$\qquad\qquad\qquad y \quad y \text{ ſubt.}$$

$$x = xy - y$$

$$\text{———————} \; x-1 \text{ div.}$$

$$x:(x-1) = y$$

Quodſi valor ipſius y jam inventus in æquatione ſiniſteriore ſubſtituatur, habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{————————} \; x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$

$$x^3 \quad x^3 \qquad \text{ſubtr.}$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

$$\text{————————} \; x^2 \text{ div.}$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4} \qquad (\S.\ 143)$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{3}{2} - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Eſt vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; ſed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non eſt numerus minor y: quia, ſi numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, ſi valore ipſius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ ſubſtituto, reductio legitime inſtituatur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ eſt radix falſa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Eſt enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$, & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA LIII.

164. *Datis, in progreſſione arithmetica, termino primo & ultimo, atque differentia terminorum; invenire numerum terminorum & ſummam progreſſionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
ſumma $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b+a)x$$

$$d \qquad\qquad d \text{ add.}$$

$$b + d = a + dx$$

$$a \quad a \qquad \text{ſubt.}$$

$$b + d - a = dx$$

$$\text{————————} \; (d \text{ div.}$$

$$(b + d - a) : d = x$$

Quodſi hic valor in æquatione dextra ſubſtituatur, habebimus

$y = \frac{1}{2}(b+a)(b+d-a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b+a) + (b^2 - a^2) : 2d.$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$, & $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA LIV.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum, & ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
ſumma $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+y) = c \qquad a + dx - d = y$

2 mult.

$ax + xy = 2c$

$ax \qquad ax$ Subtr.

$xy = 2c - ax$

x div.

$y = (2c - ax) : x$

Ergo (§. 87 *Arithm.*)

$(2c - ax) : x = a + dx - d$

x mult.

$2c - ax = ax + dx^2 - dx$

$ax \qquad ax$ add.

$2c = dx^2 + 2ax - dx$

d div.

$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a-d}{d}x$

hoc eſt, ſi fiat $(2a - d) : d = m$

$2c : d = x^2 + mx$

$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$ add.

$\frac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = x + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m \qquad \frac{1}{2}m$ ſubt.

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \frac{1}{2}m = x$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$: erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$; conſequenter $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA LV.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
ſumma $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+b) = c \qquad a + xy - y = b$

2

$x(a+b) = 2c \qquad xy - y = b - a$

$x = 2c : (a+b) \qquad y = \frac{b-a}{x-1}$

$x - 1 = \frac{2c}{a+b} - 1 = \frac{2c - a - b}{a+b} \qquad = \frac{(b+a)(b-a)}{2c - a - b}$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$: erit $x = 114 : 19 = 6$, & $y = (19.15) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Theorema. In progreſſione arithmetica, eſt ut differentia ſummæ ex termino primo & ultimo a duplo ſummæ progreſſionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita ſumma termini primi & ultimi ad differentiam progreſſionalem.

PROBLEMA LVI.

167. *Datis differentia & numero terminorum, una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
ſumma $= c$
term. primus $= x$
ultimus $= y$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*).

$\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}ny = c \qquad x + nd - d = y$

h. e. $nx + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}nd = c$ $\quad \frac{1}{2}n$ div.

$2x + nd - d = 2c : n$ $\quad nd - d$ ſubt.

$2x = 2c : n - nd + d$ $\quad 2$ div.

$x = c : n - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$

Sit

Sit $n = 6, d = 3, c = 57$: erit $x = 9\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - 9 = 2$, & $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

PROBLEMA LVII.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo, & ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
ſumma $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$$\tfrac{1}{2}y(b+x) = c \qquad\qquad b = x + dy - d$$
$$\text{———— } 2 \qquad\qquad \text{————}$$
$$y(b+x) = 2c \qquad\qquad b + d - x = dy$$
$$y = 2c:(b+x) \qquad\qquad (b+d-x):d = y$$

Quamobrem (§. 87 *Arithm.*)

$$2c:(b+x) = (b+d-x):d$$
$$\text{————————— } d \text{ mult.}$$
$$2cd:(b+x) = b+d-x$$
$$\text{————————— } b+x \text{ mul.}$$
$$2cd = b^2 + bd - bx + bx + dx - x^2$$
$$x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{4}d^2 \ (\S.\ 143).$$
$$x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd$$
$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}d - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}.$$

Quodſi $\frac{1}{2}d > x$, erit $\frac{1}{2}d - x$ quantitas poſitiva, adeoque $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$: ſi vero $\frac{1}{2}d < x$, quantitas $\frac{1}{2}d - x$ æquivalet privativo, ſed $x - \frac{1}{2}d$ poſitivo; adeoque $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Sit $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$: erit $x = \frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342)} = \frac{3}{2} + \sqrt{(2\frac{1}{4} - 2)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, & $y = (17 + 3 - 2):3 = \frac{18}{3} = 6$.

PROBLEMA LVIII.

169. *Datis ſumma progreſſionis arithmeticæ, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum; invenire terminos ſingulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
ſumma $= c$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 107 & per condit. Probl.)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y) = c \qquad\qquad xy = a$$
$$\text{———— } \tfrac{1}{2}n \qquad\qquad \text{—— } x \text{ div.}$$
$$x + y = 2c:n \qquad\qquad y = a:x$$
$$\text{h. e. } x + \frac{a}{x} = \frac{2c}{n}$$
$$\text{————— } x \text{ mult.}$$
$$x^2 + a = 2cx:n$$
$$x^2 - 2cx:n = -a$$
$$+c^2:n^2 + c^2:n^2 \text{ add.}$$
$$x^2 - 2cx:n + c^2:n^2 = c^2:n^2 - a$$
$$\left.\begin{matrix} x - c:n \\ c:n - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(c^2:n^2 - a)}.$$
$$x = \frac{c}{n} \pm \sqrt{(c^2:n^2 - a)}$$

Signum $+$ valet pro termino ultimo; ſignum autem $-$ pro primo.

Sit $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$: erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249}{36} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{(90\frac{1}{4} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} = 9\frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 2$, & $y = 9\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 17$.

PROBLEMA LIX.

170. *Invenire numerum terminorum in ſerie imparium ſummandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
erit dignitas ejus $= n^m$
terminus prim. progr. $= 1$
differenti term. $= 2$.
Sit num. term. $= x$
erit ſumma progreſſ. $= x^2$ (§. 108).
Ergo, per conditionem Probl.

$$\frac{x^2 = n^m}{x = n^{m:2}} \text{ Ext. Rad.}$$

Patet adeo, Problema non eſſe poſſibile niſi in iis caſibus, ubi exponens dignitatis m eſt numerus par, ut per 2 dividi poſſit.

Ex. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc eſt, numerus terminorum eſt idem cum radice quadrata, quemadmodum ſupra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc eſt, numerus terminorum ſummandorum eſt radicis quadratus, ſi potentia quarti gradus deſideretur, veluti ſi $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA LX.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quos numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in ſerie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$, & numerus terminorum eſt n *per hypoth.* erit ſumma progreſſionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108); conſequenter, per conditionem Problematis,

$$\frac{nx + n^2 - n = n^m}{x + n - 1 = n^{m-1}} \; n \text{ div.}$$
$$\frac{n - 1 \qquad n - 1 \text{ ſubtr.}}{x = n^{m-1} - n + 1}$$

Patet adeo Problema eſſe poſſibile in omni caſu.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut ſupra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$; erit $x = 9 - 2 = 7$, adeoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate oſtendimus ad captum Tyronum, quomodo potentiæ cujuſcunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in* Miſcellaneis Berolinenſibus p. 327. & ſeqq.

PROBLEMA LXI.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales; dato facto ex quadrato tertii in primum, una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit ſecundus $= mx$
tertius $= m^2 x$ (§. 114).

Quare, per conditionem Problematis,

$$\frac{a = m^4 x^3}{a : m^4 = x^3} \; m^4 \text{ div.}$$
$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit

Sit ex. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Æquatio 1ª reſolvitur in hanc analogiam $1 : m^4 = x^3 : a$ (§. 299. *Arithm.*)

Quare cum $1 : m^4$ ſit ratio quadruplicata $1 : m$ (§. 159 *Arithm.*); ſequens enaſcitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua eſt ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad ſecundum.

PROBLEMA LXII.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$
erit ſecunda $= bx$
tertia $= b^2x$ (§. 114)

&, per conditionem Problematis,

$b^2x + bx + x = a$
———————— $b^2 + b + 1$ div.
$x = a : (b^2 + b + 1)$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$.

PROBLEMA LXIII.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales reſolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit ſecundus $= mx$
tertius $= m^2x$
quartus $= m^3x$ &c.

Ergo, per conditionem Problematis,

$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x$ &c. $= a$
$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4$ &c.$)$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini ſint numero ſex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 eſt ſeries proportionalium quæſita.

PROBLEMA LXIV.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$
ultimus $= b$
mediorum primus $= x$
numerus mediorum $= m$

erit, per conditionem Problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3},\ \&c.\ \frac{x^m}{a^{m-1}},\ b$$

conſequenter (§. 118)

$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$
———————— a^{m-1} m.
$x^{m+1} = a^m b$
———————— Ext. Rad.
$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$; erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$; conſequenter termini intermedii ſunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus eſſe debet Tabula dignitatum ſuperiorum pro digitis ſingulis, qualis extat pro quadratis & cubis* (§. 257 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

178. Quodſi numerus, qui exprimit terminum deſideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare, ſi pro x ſubſtituatur valor modo inventus $\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)}\, b^{1:(m+1)}$; prodibit numerus quæſitus $= a^{mn:(m+1)}\, b^{n:(m+1)} : a^{n-1} = a^{mn:(m+1)}\, b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)} = a^{(m-n+1):(m+1)}\, b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant, ex.gr. inter* 1 *&* 243 *quatuor medii proportionales continue, & quæratur eorum ſecundus: erit* $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, *adeoque* $(m - n + 1) : (m + 1) = \frac{3}{5}$, $n : (m + 1) = \frac{2}{5}$, *conſequenter numerus quæſitus* $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA LXV.

180. *Data ſumma termini primi & ultimi, itemque ſumma ſecundi & tertii, in proportione ſive continua, ſive diſcreta, una cum denominatore rationis; invenire terminos ſingulos.*

Sit ſumma prima $= a$
ſecunda $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$,
erit quartus $= a - x$
ſecundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare, per conditionem Problematis,

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc

$$ax - x^2 = mbx - m^2x^2 \quad x \text{ div.}$$

$$a - x = mb - m^2 x$$

$$m^2 x - x = mb - a \quad m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXVI.

* 180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & ſecundi æquetur numero dato, & differentia ſecundi atque tertii æqualis ſit itidem numero dato.*

Sit differ. prima $= a$
differ. ſecunda $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Per conditionem Problematis,

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + ax \qquad x^2 + ax \quad \text{ſubt.}$$

$$bx = ax + a^2$$

$$bx - ax = a^2 \quad (b-a) \text{ div.}$$

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam reſolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, ſequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & ſecundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & ſecundi a differentia ſecundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA LXVII.

181. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo, atque terminorum numero; invenire denominatorem rationis.*

Sit

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$
Erit (§. 121)
$b = x^{n-1} a$
a div.
$b : a = x^{n-1}$
$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x.$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit $x = \sqrt[5]{(486:2)} = \sqrt[5]{243} = 3$.

P R O B L E M A LXVIII.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero, & ſumma progreſſionis geometricæ; invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
ſumma progreſſ. $= c$
terminus primus $= x$
erit ultimus $= m^{n-1} x$
conſequenter (§. 121)
$c = (m^n x - x) : (m - 1)$
$m - 1$
$mc - c = m^n x - x$
$m^n - 1$
$(mc - c) : (m^n - 1) = x$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$: erit $x = 2 . 728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam æquatio penultima reſolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, ſuppeditat hoc

Theorema: Summa progreſſionis geometricæ eſt ad terminum primum, ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis eſt, unitate mulctata ad denominatorem ipſum unitate imminutum.

P R O B L E M A LXIX.

183. *Datis, in progreſſione geometrica, termino primo & ultimo, una cum denominatore rationis; invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc eſt, ſi logarithmus ipſius a ponatur la, logarithmus ipſius $m = lm$, & logarithmus ipſius $b = lb$,

$xlm - lm + la = lb$ (§. 341, 337 *Arith.*)
$xlm = lb - la + lm$
lm div.
$x = (lb - la) : lm + 1$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, crit
$lb = 2.6866363$
$la = 0.3010300$
$lb - la = 2.3856063$

```
         3  1  1
lb - la = 23856063 (5
   lm =   4771213   1
                  ------
                  6 = x
```

P R O B L E M A LXX.

184. *Datis ſumma progreſſionis geometricæ, termino primo, atque ultimo; invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit ſumma $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)
$c = (by - a) : (y - 1)$ $b = y^{x-1} a$
$cy - c = by - a$
$cy - by = c - a$
$c - b$
$y = (c - a) : (c - b)$

 Æqua-

Æquatio altera, adhibitis logarithmis, in ſequentem degenerat (§. 341, 337 *Arithm.*).

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad ly$ div.

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodſi ſubſtituatur valor ipſius ly paulo ante inventus, qui eſt, $l(c-a) - l(c-b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c-a) - l(c-b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c-a) = 2.8609366$	$c = 728$
$l(c-b) = 2.3838154$	$a = 2$
Differ. $= 4771212$	$c - a = 726$

23856063 (5
4771212 (1

$$6 = x$$

Problema LXXI.

185. *Datis, in progreſſione geometrica, facto ex primo in ultimum, numero terminorum, & denominatore rationis; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numerus termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit, per conditiones Problematis,

$xy = f \qquad\qquad m^{n-1}\, x = y$

$\qquad\qquad x$ div.

$y = f : x$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$f : x = m^{n-1}\, x$

$\qquad\qquad x$ mult.

$f = m^{n-1}\, x^2$

$\qquad\qquad m^{n-1}$ div.

$f : m^{n-1} = x^2$

$\qquad\qquad$ Ext. Rad.

$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$.

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$: erit $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

Definitio XIII.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *Harmonice proportionales*, ſi, in priore caſu, differentia primi & ſecundi fuerit ad differentiam ſecundi atque tertii, ut primus ad tertium; in caſu poſteriore, differentia primi & ſecundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum:

Ex. gr. 10, 16 & 40 ſunt in proportione harmonica: eſt enim $6 : 24 = 10 : 40$.

Si termini proportionales in caſu priore continuentur; oritur *Progreſſio Harmonica*.

Problema LXXII.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 186)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \text{ (§. 297 Arith.)}$$

$$2ax - bx = ab$$

$\qquad\qquad (2a - b)$ div.

$$x = ab : (2a - b)$$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde ſequens enaſcitur

Theo-

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia ſecundi a duplo primi ad primum, ut ſecundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, conſequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non ſit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc caſu nullus numerus harmonice proportionalis ipſis a & b inveniri poteſt. Ex. gr. ſi $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12.24 : (24 - 24) = 12.24 : 0$. Sed non licet 12. 24 ſeu 288 pro termino tertio aſſumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 186): Quod abſurdum. Multo minus inveniri poterit, ſi $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

189. Quodſi ex tribus proportionalibus 6, 8, 12, terminus ſecundus ſumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8.12 : (16 - 12) = 8.12 : 4 = 8.3 = 24$.

COROLLARIUM III.

190. Cum eodem modo, ſi tertius pro a, quartus pro b ſumatur, quintus inveniri queat, & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progreſſio, ſi poſſibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. Ex. gr. ſi $a = 10$, $b = 12$, erit tertius $12.10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12.15 : (24 - 15) = 20$; quintus $15.20 : (30 - 20) = 30$; ſextus $20.30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2.30$ (§. 188).

PROBLEMA LXXIII.

191. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= x$
tertia $= b$

erit $x - a : b - x = a : b$ (§. 186)

$bx - ab = ab - ax$ (§. 297 *Arithm.*)

$ax + bx = 2ab$

$a + b$ div.

$x = 2ab : (a + b)$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit ſumma primi & ultimi ad primi duplum, ut ultimus ad medium.

PROBLEMA LXXIV.

192. *Datis tribus quantitatibus; invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 186)

$b - a : x - c = a : x$

$bx - ax = ax - ac$ (§. 297 *Arithm.*)

$ac = 2ax - bx$

$(2a - b)$ div.

$ac : (2a - b) = x$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia ſecundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

193. *Proportio Contraharmonica* eſt ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & ſecundi eſt ad

differentiam ſecundi & tertii ut tertius ad primum.

Ex. gr. 3, 5 & 6 ſunt numeri contraharmonice proportionales: eſt enim 2 : 1 = 6 : 3.

PROBLEMA LXXV.

194. *Datis duabus quantitatibus; invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193.)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\S. 297 \ Arithm.)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \ \text{add.} \quad (\S. 143)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b, \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

Ex. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

PROBLEMA LXXVI.

195. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\S. 297 \ Arithm.)$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$a + b$ div.

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

Ex. gr. ſit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si ſumma duorum quadratorum dividitur per ſummam radicum, quotus eſt inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

196. *Numerus pronicus* eſt, qui aggregato ex radice & quadrato ejuſdem æqualis.

COROLLARIUM I.

197. Si in progreſſione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit ſumma progreſſionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108.), $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per ſummationem progreſſionis numerorum parium. Sit enim
progreſſio 2, 4, 6, 8, 10, &c.
erunt pronici 2, 6, 12, 20, 30, &c.

PROBLEMA LXXVII.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$
erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \ (\S. 143)$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\frac{4a + 1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)} - \tfrac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas, & radix unitate mulctata bifariam dividatur, quotus eſt radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4 \cdot 72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PRO-

PROBLEMA LXXVIII.

200. *Invenire ſummam Quadratorum & Cuborum, quorum radices in ſerie numerorum naturali progrediuntur.*

Sit $0+1+1+1+1+1$ &c. $= \int n^0$

$0+1+2+3+4+5$ &c. $= \int n^1$

$0+1+4+9+16+25$ &c. $= \int n^2$

$0+1+8+27+64+125$ &c. $= \int n^3$

&c. &c.

$1+1+1+1+1+1$ &c. $= \int (n+1)^0$

$1+2+3+4+5+6$ &c. $= \int (n+1)^1$

$1+4+9+16+25+36$ &c. $= \int (n+1)^2$

$1+8+27+64+125+216$ &c. $= \int (n+1)^3$

&c. &c.

Nimirum $\int n^0$ denotat ſummam quotlibet unitatum ſeriei a cyphra incipientis; $\int (n+1)^0$ ſummam quotlibet unitatum ſeriei ab unitate incipientis, quia 0 eſt exponens unitatis (§. 55). Sed n repræſentat unamquamque unitatem in ſerie prima; $n+1$ in altera. Ergo, ſi numerus terminorum in utraque ſerie idem; erit $\int (n+1)^0 - \int n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter $\int n^1$ denotat ſummam ſeriei numerorum naturalium a cyphra incipientis, & n quemlibet ejus terminum: $\int (n+1)^1$ ſummam ſeriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 eſt exponens radicum, ſeu dignitatis primæ (§. *cit.*). Quare ſi in utraque ſerie fuerit idem terminorum numerus, erit $\int (n+1)^1 - \int n^1 = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum ſeriei ab unitate incipientis denotat, quo ſcilicet ea differt a ſerie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, eſſe $\int (n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$, $\int (n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ &c. & in genere $\int (n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 81)

$\int (n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$

$\int (n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$

hoc eſt, ob $\int (n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ *per* (*dem.*

$(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$

2 div.

$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}\int n^0 - \frac{1}{2} = \int n^1$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$, $\frac{1}{2}\int n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1$ ſumma omnium radicum ab 0 uſque ad $5 = 18 - 3 = 15$. Similiter, ſit $n = 3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1 = 6$.

Eſt porro

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ (§. 84)

$\int (n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$

$\int (n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$

h. e. ob $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ *per de-* (*monſt.*

$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$

3 div.

$\frac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \frac{1}{3}\int n^0 - \frac{1}{3} = \int n^2$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$, adeoque $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Similiter ſit $n = 3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$, $\int n = 6$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$, adeoque $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$\int (n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$

$\int (n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$

h. e. ob $\int (n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ *per demonſt.*

$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$

4

$\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$.

Sit ex. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$, $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$, adeoque $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHO-

Scholion I.

201. *Quod in ſummationibus, quibus in reſolutione Problematis uſi ſumus, ſemper addenda ſit unitas, exempla ſingularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$ *erit:*

$$\int n^0 = 0+1+1+1+1$$
$$\int n^1 = 0+1+2+3+4$$
$$\int n^2 = 0+1+4+9+16$$
$$\int(n+1)^2 = 1+4+9+16+25$$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *ſit 25, &* $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum 24; patet, ad conſervandam æqualitatem, addendam eſſe unitatem.*

Scholion II.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium Quadrata & Cubos ſummare docuimus, altiores quoque dignitates ſummantur. Sed cum potentiæ in infinitum aſſurgant, ideo Problema generale pro caſibus infinitis inveniendum.*

Problema LXXIX.

203. *Summare Potentias quaſcunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m-3} \text{ \&c. in inf.} + 1.$$

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m-3}$ &c. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$.

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 200): Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$: conſequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1 \cdot 2}\int n^{m-1} - \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\int n^{m-2} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\int n^{m-3}$ &c. in infinit. $- \frac{1}{m+1}$.

Ex. gr. ſit $m = 3$, erit $m+1 = 4$, $m-1 = 2$, $m-2 = 1$, $m-3 = 0$, adeoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§. 200).

Scholion.

204. *Theorema generale terminis quidem conſtat infinitis; in caſibus tamen ſpecialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evaneſcunt, quando numerus ab* m *ſubtrahendus fit ipſi* m *æqualis: quemadmodum ex allato exemplo ſpeciali apparet. Ita vero ſummationem Potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum Tyronum. Semper tamen utendum eſt termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$: *cujus ratio ante allata (§. 201).*

Corollarium.

205. Cum ſummatio Potentiarum ſuperiorum a ſummatione omnium inferiorum pendeat; ſi in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus ſubſtituantur, prodibunt formulæ per ſolum n ſummas Potentiarum determinantes, non præſuppoſitis ſummationibus anterioribus: Ex. gr.

$\int n^0$

$\int n^0 = n.$ (§.200)

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$ (§. 200).

$= nn + 2n + 1$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= nn + n$

Hinc $\int n^1 = (nn+n) : 2.$

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§.200)

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$\quad - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Hinc $\int n^2 = (n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) : 3 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6.$

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§.200)

$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$\quad - 2n^3 - 3n^2 - n$

$\quad - 2n^2 - 2n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

Hinc $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4.$

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$

$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

$\quad - \frac{10}{4}n^4 - \frac{20}{4}n^3 - \frac{10}{4}n^2$

$\quad - \frac{20}{6}n^3 - \frac{30}{6}n^2 - \frac{10}{6}n$

$\quad - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{10}{6}n^3 \qquad - \frac{1}{6}n$

$= (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 6$

Hinc $\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$

&c. &c. &c.

DEFINITIO XVI.

206. *Numeri Polygoni* ſunt ſummæ progreſſionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in ſpecie *Triangulares*, ſi differentia terminorum fuerit 1; *Quadrati*, ſi 2; *Pentagoni*, ſi 3; *Hexagoni*, ſi 4; *Heptagoni*, ſi 5; *Octogoni*, ſi 6 &c.

Progr. Arithm.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
Num. Triang.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36
Progr. Arithm.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15
Num. Quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64
Progr. Arithm.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22
Num. Pentag.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92
Progr. Arithm.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29
Num. Hexag.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120

SCHOLION.

207. *Numeri Polygoni nomina ſortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus reſpondentia diſponi poſſunt. Ex. gr. Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus reſpondentia diſponuntur in triangulum: & idem tenendum eſt de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO XVII.

208. *Latus numeri Polygoni* eſt numerus terminorum progreſſionis arithmeticæ, qui ſummantur. *Numerus* vero *angulorum* eſt, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus Polygonus nomen ſuum ſortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. conſequenter differentiam terminorum, qui ſumantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA LXXX.

210. *Dato latere numeri Polygoni, & numero angulorum; invenire numerum Polygonum.*

Sit latus $= n$

numerus angulorum $= a$.

terminus primus progreſſionis $= 1$ (§. 206).

differentia terminorum $= a - 2$ (§. 209).

terminus ultimus $1 + (a - 2)(n - 1)$

primus 1 (§. 333 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2 + (a - 2)(n - 1)$

hoc eſt $4 + na - 2n - a$

dimid. term. num. $\frac{1}{2}n$

Num.

Num. Polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§.206,107)

$= (n^2a - 2n^2 - an + 4n) : 2$

$= (n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$

Theorema. Numerus Polygonus eſt ſemidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum, & ex ipſo latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

Corollarium I.

211. Sit $n = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$

&c. &c.

Corollarium II.

212. Quoniam numerus Polygonus (§.210). $(n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$, erit ſumma ſeriei cujuſcunque numerorum polygonorum $((a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1) : 2$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ ſunt numeri conſtantes, qui in caſu ſpeciali ſunt determinati, non ſummantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2 + 3n}{2}$ (§.205). Ergo ſumma polygonorum $((a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)) : 12 = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = ((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ unde porro Theoremata ſpecialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe ſumma triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$
pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$
hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$
heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$
octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$ &c. &c.

Eſt enim pro triangularibus $a = 3$, pro pentagonis $a = 5$, pro hexagonis $a = 6$, pro heptagonis $a = 7$, pro octogonis $a = 8$, &c. (§.208).

Problema LXXXI.

213. *Dato numero Polygono, & numero angulorum; invenire latus.*

Sit numerus Polygonus $= p$, latus $= x$
numerus angulorum $= a$
erit differentia terminor. $= a - 2$ (§.209)
terminus primus $= 1$ (§.206)
adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$
hoc eſt $3 + ax - 2x - a$ (§.333 Arithm.)
terminus primus 1

ſumma pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$
dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus Polygon. $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$ (§.107).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$ $\quad 2$

$ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$ $\quad a-2$

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc eſt, ſi fiat $(a-4) : (a-2) = m$

$x^2 - mx = 2p : (a-2)$
$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$

$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}m \\ m - \frac{1}{2}x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left(\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4}\right)}$$

$$\frac{a - 4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}}{2a-4}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a-4}$$

obti-

obtinet nimirum ſignum +, quia radix major eſt quam $a - 4$

Sit ex. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{(8p+1)}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{(32p+4)}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptag. $\frac{3 + \sqrt{(40p+9)}}{10}$

&c. &c.

Definitio XVIII.

214. Summæ numerorum Polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progreſſionibus arithmeticis ipſi Polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ Pyramidalium primorum *Pyramidales ſecundi*: ſummæ Pyramidalium ſecundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, ſi ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, ſi ex pentagonis oriuntur &c.

Ex. gr. Num. triang.	= 1, 3, 6, 10, 15, 21
Pyram. triang. pr.	= 1, 4, 10, 20, 35, 56
ſecundi	= 1, 5, 15, 35, 70, 126
tertii	= 1, 6, 21, 56, 126, 252
&c.	&c.

Corollarium.

215. Cum igitur ſummare docuerimus numeros Polygonos (§. 212), evidens jam eſt, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ exprimit numeros pyramidales primos, *vi §. cit.*

Problema LXXXII.

216. *Invenire ſummam numerorum Pyramidalium ſuperioris ordinis cujuſcunque, ſeu dato quolibet inferiore proxime ſuperiorem.*

Non alia re opus eſt, quam ut juxta methodum ſuperius traditam (§. 200) numeri Pyramidales proxime inferioris ordinis ſummentur: ita enim habentur eorum ſummæ. Quare cum numerus Pyramidalis primi ordinis ſit $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ (§. 215): erit ſumma Pyramidalium primi ordinis $((a-2)\int n^3 + 3\int n^2 - (a-5)\int n^1) : 6$. Sed $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$, $\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$, $\int n^1 = (n^2 + n) : 2$, (§. 205). Ergo ſumma Pyramidalium primi ordinis, ſeu numerus Pyramidalis ſecundi ordinis $= ((a-2)(n^4 + 2n^3 + n^2) + 2(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-5)(2n^2 + 2n)) : 24$ $= (an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an - 2n^4 + 14n^2 + 12n) : 24 = ((a-2)n^4 + 2an^3 - (a+14)n^2) - (2a+12)n) : 24$.

Sit ex. gr. $a = 3$, hoc eſt quæratur ſumma Pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$. Quoniam vero ſumma inventa generalis exprimit numerum quemcunque Pyramidalem ſecundi ordinis (§. 214); ſi ea porro eundem in modum ſummetur, prodibit ſumma Pyramidalium ſecundi ordinis, ſeu numerus Pyramidalis ordinis tertii (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quouſque libet.

Corollarium I.

217. Cum ſumma unitatum ſit n, ſumma laterum $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2}$ (§. 205), ſumma triangularium $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n+2}{3}$ (§. 215), ſumma Pyramidalium primi

ordinis $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24.}=\frac{n.n+1}{1\ .\ 2.}\frac{n+2.n+3.}{3\ .\ 4}$ (§. 216) &c. evidens eſt lex, qua numeri Pyramidales ex triangularibus orti in infinitum ſummentur. Nimirum numerus fractionum in ſe invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in ſerie naturali numerorum, ſed terminus primus progreſſionis eſt latus numeri figurati, denominatores ſunt numerorum naturalium progreſſio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus Pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0.n+1.n+2.}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .}\frac{n+3.n+4.n+5.\ \&c.}{4\ .\ 5\ .\ 6\ \&c.}$ in infinit.

Corollarium II.

218. Hinc apparet, quales numeri ſint unciæ Potentiarum (§. 95).

Problema LXXXIII.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante quot earum invicem combinari debeant; invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ *a* & *b* nonniſi unam combinationem *ab* admittunt. Trium combinationes ſunt tres, nempe *ab*, *ac*, *bc*; quatuor vero ſex *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; quinque decem *ab*, *ac*, *ad*, *ae*; *bc*, *bd*, *be*; *cd*, *ce*; *de*, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1, 3, 6, 10, &c. hoc eſt, eſſe numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q, erit latus numeri combinationum $q-1$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-1.q+0.}{1\ .\ 2}$ (§. 217).

Si quantitates tres invicem combinandæ & numero itidem tres fuerint, erit combinatio tantum unica *abc*. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*; ſi quinta, decem *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, *cde*; ſi ſexta, viginti, & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1, 4, 10, 20 &c. hoc eſt, ſunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, ſeu exponente unitate mulctato. Hinc ſi numerus quantitatum datarum fuerit q, erit latus $q-2$; adeoque numerus combinationum $\frac{q-2.q-1.q+0.}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ (§. 217.)

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares ſecundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus unitatibus, ſeu exponente unitate mulctato. Quare ſi numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3.q-2.q-1.q+0}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$ (§. 217.)

Hinc facile abſtrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in caſu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1.q-n+2.q-n+3.q-n+4.q-n+5.}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.}$ &c. donec numerus addendus ſit ipſi n æqualis.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $= 6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1}\cdot\frac{6-4+2}{2}\cdot\frac{6-4+3}{3}\cdot\frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3\cdot 6-2\cdot 6-1\cdot 6+0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4} = 15$.

C O R O L L A R I U M.

220. Quodſi quantitatum datarum omnes combinationes poſſibiles ſcire deſideres, incipiendo nempe a combinationibus ſingularum binarum; addi oportet $\frac{q-1\cdot q+0}{1\cdot 2}$, $\frac{q-2\cdot q-1\cdot q+0}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\frac{q-3\cdot q-2\cdot q-1\cdot q+0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum poſſibilium erit $\frac{q\cdot q-1}{1\cdot 2} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2\cdot q-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2\cdot q-3\cdot q-4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ &c. Quæ eſt ſumma unciarum binomii ad dignitatem q evecti, mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo *per Probl.* 29. (§. *cit.*) ſit vero $1+1=2$; erit $2^q - q - 1$ numerus omnium combinationum poſſibilium. Ex. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum poſſibilium $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$.

S C H O L I O N.

221. *Uncias prodire debere, pro binomio* $1+1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b; *patet exinde, quod uncia partium* a *&* b *ſit* 1, *atque adeo ut facta litteralia ex* a *&* b, *ita unciæ ex* 1 *&* 1 *in ſe invicem ductis prodire debeant. Vide calculum*:

$1+1$ *Unc. Rad.*
$1+1$
$+1+1$
$1+1$
$1+2+1$ *Unc. Quadr.*
$1+1$ *Unc. Rad.*
$+1+2+1$
$1+2+1$
$1+3+3+1$ *Unc. Cubi.*
&c. &c.

P R O B L E M A LXXXIV.

222. *Dato numero quantitatum; invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis poſſibilibus combinatæ ac permutatæ ſubire poſſunt.*

Sint quantitates duæ *a* & *b*, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), conſequenter cum earum quælibet etiam cum ſeipſa combinari poſſit, iſtis addendæ adhuc ſunt variationes 2. Ergo numerus omnium eſt, $2+2=4$.

Quodſi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe *ab*, *ac*, *bc*, & *ba*, *ca*, *cb* (§. 129): quibus ſi addas combinationes tres uniuſcujuſque quantitatis cum ſeipſa, *aa*, *bb*, *cc*; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, ſi quantitates fuerint quatuor, & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum ſeipſa 4, adeoque numerum variationum 16. Si manente exponente, quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25, &c. & in genere ſi numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27=3^3$, nempe *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *aac*, *aca*, *caa*, *abb*, *bab*, *bba*, *abc*, *bac*, *bca*, *acb*, *cab*, *cba*, *acc*, *cac*, *cca*, *bbb*, *bbc*, *cbb*, *bcb*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

 Nec

Nec abſimili modo conſtabit, ſi quantitates fuerint quatuor & exponens 3; fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, ſi fuerit quantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodſi ita progredi libuerit, reperietur tandem, ſi quantitatum numerus fuerit n, & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare ſi antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum poſſibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n ſubtractus relinquat 1, quia initium fit a quantitatibus ſingulis ſemel poſitis.

Cum adeo numerus omnium variationum poſſibilium ſit progreſſio geometrica, cujus terminus primus ſeu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arithm.* & 113 *Analyſ.*); erit is $= (n^{n+1} - n) : (n - 1)$, (§. 122).

Sit ex. gr. $n = 4$; erit numerus variationum poſſibilium $(4^5 - 4) : (4 - 1) = 1020 : 3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum poſſibilium $(24^{25} - 24) : (24 - 1) = 32009658644406818986777955348250600 : 23 = 1391724288887252999425128493402200$. Tot ergo modis 24 literæ inter ſe componi poſſunt.

CAPUT II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

PROBLEMA LXXXV.

223. *Invenire duos numeros, quorum ſumma, una cum facto eorundem, æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis

$$xy + x + y = a$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; y \text{ ſub.}$$
$$xy + x = a - y$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; y + 1 \text{ div.}$$
$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; y^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + 2x = y^2 + a$$
$$\underline{\qquad 1 \qquad\qquad 1} \; (\text{§. } 143)$$
$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \text{ Ext. Rad.}$$
$$x + 1 = \sqrt{(y^2 + a + 1)}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \text{ ſub.}$$
$$x = \sqrt{(y^2 + a + 1)} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi poſſit, $a + 1$ eſſe debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum eſt y^2.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 19 + 1)} - 1 = \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1)} - 1 = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$, & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVI.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut ſumma primi & ſecundi æquetur tertio, differentia vero primi & ſecundi quarto.*

Sit numerus primus $= x$, ſecundus $= y$, tertius $= z$, quartus $= t$; erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{ll} y + x = z & x - y = t \\ \overline{\qquad\qquad} \; y \text{ ſub.} & \overline{\qquad\qquad} \; y \text{ add.} \\ x = z - y & x = t + y \end{array}$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$t + y = z - y$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; y \text{ add.}$$
$$t + 2y = z$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; t \text{ ſub.}$$
$$2y = z - t$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; 2 \text{ div.}$$
$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$. Unde apparet, ſi numeri integri deſiderentur, pro z & t aſſumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72, 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$, & $x = (8 + 2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter ſit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5 + 1) : 2 = 3$, & $y = (5 - 1) : 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVII.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unuſquiſque cum partibus ſuis aliquotis efficiat unam ſummam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit, per conditionem Problematis,

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$mx + x = 1 + n + (n + 1)y - (1 + m)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$x = (1 + n + (n + 1)y - 1 - m) : (m + 1)$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare ſummam partium aliquotarum denominatoris multipli ipſius y, & $1 + m$ ſummam partium aliquotarum denominatoris multipli ipſius x: poſſe autem non modo y, ſed & utrumque denominatorem pro arbitrio aſſumi, ſed ut y ſit numerus impar, iſque primus.

Sit ex. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotæ ipſius n, 1 & 2, ipſius m autem 1: conſequenter $x = 2 + 1 + (2 + 1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$; conſequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire duos numeros, quorum ſumma æquetur quadrato minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit, per conditionem Problematis,

$$x + y = y^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; y \text{ ſub.}$$
$$x = y^2 - y = (y - 1)y$$

Unde apparet, numerum majorem eſſe factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2 . 3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4 . 5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8 . 9 = 72$.

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut ſumma quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$x^2 +$

$$x^2+y^2=y^3$$
y^2 ſubt.
$$x^2=y^3-y^2=y^2(y-1)$$
$$x=y\sqrt{(y-1)}$$

Apparet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc eſt, quadratum quodlibet unitate auctum.

Ex. gr. Sit $y=5$, erit $x=5\sqrt{(5-1)}=5\sqrt{4}=5.2=10$. Sit $y=17$, erit $x=17\sqrt{(17-1)}=17\sqrt{16}=17.4=68$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum æquale ſit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum ſecundi æquatur.*

Sit numerus primus $=x$, ſecundus $=y$, radix cubica $=v$; erit, per conditiones Problematis,

$$v=xy^2 \qquad xy=v^3$$
y^2 div. $\qquad$ y div.
$$v:y^2=x \qquad x=v^3:y$$
$$v:y^2=v^3:y$$
y^2 mult.
$$v=yv^3$$
v div.
$$1=yv^2$$
v^2 div.
$$1:v^2=y$$

Ergo $x=v^3:(1:v^2)=v^5$

Sit $v=2$; erit $x=32$, $y=\frac{1}{4}$. Sit $v=3$; erit $x=243$, $y=\frac{1}{9}$.

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire duos numeros quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $=x+y$, alter $=x-y$: erit, per conditionem Problematis.

$$x^2+2xy+y^2$$
$$x^2-2xy+y^2 \text{ ſubt.}$$
$$4xy=v^2$$
($4y$ div.
$$x=v^2:4y$$

Patet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum per cujus quadruplum dividi poteſt quadratum aliquod.

Sit ex. gr. $v^2=16$, $y=1$: erit $x=16:4=4$. Ergo $x+y=4+1=5$ & $x-y=4-1=3$. Sit $v^2=36$, $y=3$: erit $x=36:12=3$. Ergo $x+y=6$ & $x-y=0$. Sit $v^2=36$, $y=9$: erit $x=36:36=1$. Ergo $x+y=10$ & $x-y=8$.

PROBLEMA XCII.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $=a$, minoris $=b$. Sit porro latus quadrati unius ex quæſitis minus quam a, adeoque $a-z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y-b$. Enimvero, ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz-b$. Quare per conditionem Problematis.

$$a^2-2az+z^2+y^2z^2-2byz+b^2=a^2+b^2$$
a^2+b^2 ſub.
$$z^2+y^2z^2-2az-2byz=0$$
z div.
$$z+y^2z-2a-2by=0$$
$2a+2by$ add.
$$y^2z+z=2a+2by$$
(y^2+1 div.
$$z=(2a+2by):(y^2+1)$$

Sit ex. gr. $a=3$, $b=2$, $y=2$: erit $z=(6+8):(4+1)=14:5=2\frac{4}{5}$. Ergo $a-z=3-2\frac{4}{5}=\frac{15}{5}-\frac{14}{5}=\frac{1}{5}$ & $yz-b=\frac{28}{5}-2=\frac{28}{5}-\frac{10}{5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

SCHOLION.

231. *Dum quadratorum quæſitorum latera aſſumuntur, valores eorum quantitates* a *&* b *in-*

ingredi debent, ut in utroque æquationis membro ſit $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius,* y *multiplicari debet per* z, *ut ſublato utrinque* $a^2 + b^2$ *reſiduum ſit diviſibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimenſionem, ſicque æquatio in terminis rationalibus eſt reducibilis.*

PROBLEMA XCIII.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, conſequenter per conditionem Problematis.

$$2xy + y^2 = d \quad y^2 \text{ ſub.}$$
$$2xy = d - y^2 \quad 2y \text{ div.}$$
$$x = (d - y^2) : 2y$$

Unde apparet, pro y aſſumi debere numerum, qui ſit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit ex. gr. $d = 10$, $y = 3$: erit $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$: erit $x = (11 - 1) : 2 = 10 : 2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$: erit $x = (48 - 16) : 8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA XCIV.

233. *Numerum datum dividere, in duos alios, quorum factum eſt numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati aſſumendus eſt valor, quem ingreditur y & qui diverſis gaudet ſignis. Sit ergo $= xy - a$: erit, per conditionem Problematis,

$$aa - y^2 = aa - 2axy + x^2y^2 \quad a^2 \text{ ſub.}$$
$$-y^2 = -2axy + x^2y^2 \quad y \text{ div.}$$
$$-y = -2ax + x^2y \quad y + 2ax \text{ add.}$$
$$2ax = x^2y + y \quad x^2 + 1 \text{ div.}$$
$$2ax : (x^2 + 1) = y$$

Sit ex. gr. $2a = 10$, $x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$. Ergo $a + y = 8$, $a - y = 2$.

PROBLEMA XCV.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia eſt numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum major $= x$, minor $= y$: erit, per conditiones Problematis,

$$x + y = a \quad y \text{ ſub.} \qquad x - y = v^2 \quad y \text{ add.}$$
$$x = a - y \qquad x = v^2 + y$$
$$a - y = v^2 + y \quad y \text{ add.}$$
$$a = v^2 + 2y \quad v^2 \text{ ſubt.}$$
$$a - v^2 = 2y \quad 2 \text{ div.}$$
$$(a - v^2) : 2 = y$$

Pro v^2 itaque aſſumendus eſt numerus quadratus, qui ex numero dato a ſubductus parem relinquit.

Sit ex. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$, & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur ſummæ numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 \quad x^2 \text{ ſub.}$$
$$y = 2xy + y^2 \quad y \text{ div.}$$
$$1 = 2x + y \quad y \text{ ſubt.}$$
$$1 - y = 2x \quad 2 \text{ div.}$$
$$(1 - y) : 2 = x$$

Numeri adeo quæſiti unitate minores, conſequenter fracti eſſe debent, & y numerus quilibet fractus eſſe poteſt.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1 - \frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipſorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit, per conditionem Problematis,

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

hoc eſt $1 : x + y = a : b$ (§. 124).

$$ax + ay = b \quad a \text{ div.}$$

$$x + y = b : a \quad y \text{ ſub.}$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel ſit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA XCVIII.

237. *Invenire numerum, qui, ſi multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$, quæſitus $= x$, erit, per conditiones Problematis,

$$ax = y^2 \quad a \text{ div.} \qquad bx = v^2 \quad b \text{ div.}$$

$$x = y^2 : a \qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b \quad a \text{ mult.}$$

$$y^2 = av^2 : b \quad \text{ext. Rad.}$$

$$y = v\sqrt{(a : b)}$$

Quodſi ergo numerus rationalis deſideretur, $a : b$ quadratum eſſe debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $\sqrt{(a : b)} = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, conſequenter $x = \frac{25}{8}$.

PROBLEMA XCIX.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi unus quadrato alterius addatur, ſumma ſit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit

$$x^2 + y = \sqrt{(x + y)} \quad \text{quadr.}$$

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = x + y \quad x^4 + y \text{ ſubt.}$$

$$2x^2y - y + y^2 = x - x^4$$

h. e. $yy + (2x^2 - 1)y = x - x^4$

$$(x^2 - \tfrac{1}{2})^2 \quad x^4 - x^2 + \tfrac{1}{4} \text{ ad.}$$

$$y^2 + (2x^2 - 1)y + (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 = x - x^2 + \tfrac{1}{4} \quad \text{ext. Rad.}$$

$$y + x^2 - \tfrac{1}{2} = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} \quad x^2 - \tfrac{1}{2} \text{ ſubt.}$$

$$y = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} + \tfrac{1}{2} - x^2$$

Quodſi numerus rationalis deſideratur; $\frac{1}{4} + x - x^2$ numerus quadratus eſſe debet. Sit itaque hujus latus, ob rationes in Schol. Probl. 92 (§. 231) allatas, $= zx - \frac{1}{2}$: erit

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + x - x^2 \quad \tfrac{1}{4} \text{ ſub.}$$

$$z^2x^2 - zx = x - x^2 \quad x \text{ div.}$$

$$z^2x - z = 1 - x \quad x + z \text{ add.}$$

$$z^2x + x = 1 + z \quad z^2 + 1 \text{ div.}$$

$$x = (1 + z) : (z^2 + 1)$$

Sit $z = 2$, erit $x = (1 + 2) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, conſequenter $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{9}{25})}$ $= \dfrac{25 - 18}{50} + \sqrt{\dfrac{(60 + 25 - 36)}{100}} = \frac{7}{50}$ $+ \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \dfrac{7 + 35}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$.

PRO-

PROBLEMA C.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, ſi unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque ſit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $= x^2$, alter $= y^2$, erit factum $= x^2 y^2$. Quare $x^2 y^2 + x^2$ & $x^2 y^2 + y^2$ ſunt numeri quadrati; conſequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ ſunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, ſi in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z - y$; ſecundi $t - x$: erit

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2 \qquad y^2 \text{ ſubt.}$$
$$1 = z^2 - 2zy \qquad 2zy - 1 \text{ add.}$$
$$2zy = z^2 - 1 \qquad 2z \text{ div.}$$
$$y = (z^2 - 1) : 2z$$

$$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \qquad x^2 \text{ ſubt.}$$
$$1 = t^2 - 2tx \qquad 2tx - 1 \text{ add.}$$
$$2tx = t^2 - 1 \qquad 2t \text{ div.}$$
$$x = (t^2 - 1) : 2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4 - 1) : 4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16 - 1) : 8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA CI.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut ſumma addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$: erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2 y^2 + x^2 = x^2 (y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipſius y dimenſionem, cum valor rationalis deſideretur, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1 \qquad y^2 \text{ ſub.}$$
$$t^2 - 2ty = 1 \qquad 2ty - 1 \text{ add.}$$
$$t^2 - 1 = 2ty \qquad 2t \text{ div.}$$
$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = v^2 x^2 + y^2$. Atque adeo Problema præſens reductum eſt ad caſum ſimilem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2 x^2 + y^2$ æquale eſſe debet, latus $= z - vx$, erit

$$v^2 x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2 x^2 \qquad v^2 x^2 \text{ ſ.}$$
$$y^2 = z^2 - 2zvx \qquad 2zvx - y^2 \text{ add.}$$
$$2zvx = z^2 - y^2 \qquad 2zv \text{ div.}$$
$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari poſſunt.

Sit ex. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$, conſequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{36-16}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA CII.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit ſumma numerorum quæſitorum $= 2x$, differentia $= 2y$, erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 6). Sit latus quadrati ipſi $3x^2 + y^2$ æqualis $= t + y$: erit,

erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2 \\ x^2-2xy+y^2 \\ x^2 \quad\quad -y^2 \\ \hline 3x^2+y^2=t^2+2ty+y^2 \\ \hline \end{array} \quad y^2 \text{ ſub.}$$

$$\begin{array}{l} 3x^2=t^2+2ty \\ \hline 3x^2-t^2=2ty \\ \hline (3x^2-t^2):2t=y \end{array} \quad \begin{array}{l} t^2 \text{ ſub.} \\ 2t \text{ div.} \end{array}$$

Sit $x=4$, $t=6$, erit $y=(48-36):12$ $=12:12=1$, conſequenter $x+y=$ $4+1=5$, $x-y=4-1=3$.

PROBLEMA CIII.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum ſumma eſt numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæſiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui iſti junctim ſumti æquantur, $vx-y$: erit

$$\begin{array}{l} x^2+y^2=v^2x^2-2vxy+y^2 \\ \hline x^2=v^2x^2-2vxy \\ \hline x=v^2x-2vy \\ \hline 2vy=v^2x-x \\ \hline 2vy:(v^2-1)=x \end{array} \quad \begin{array}{l} y^2 \text{ ſub.} \\ x \text{ div.} \\ 2vy-x \text{ add.} \\ v^2-1 \text{ div.} \end{array}$$

Sit $v=2$, $y=3$; erit $x=12:(4-1)$ $=12:3=4$.

PROBLEMA CIV.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi unus ducatur in cubum alterius, productum ſit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit, per conditionem Problematis; xy^3, conſequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$\begin{array}{l} xy=z^2 \\ \hline x=z^2:y \end{array} \quad y \text{ div.}$$

Pro z itaque aſſumendum eſt quadratum per y diviſibile, ſi numeri integri deſiderentur.

Sit ex. gr. $z=6$, $y=3$: erit $x=36:3=12$.

PROBLEMA CV.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, ſumma ſit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $=x$, alter $=y$, erit $xy^3+x^2y^2$, conſequenter & $xy+x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $=yv-x$: erit

$$\begin{array}{l} xy+x^2=y^2v^2-2xyv+x^2 \\ \hline xy=y^2v^2-2xyv \\ \hline x=yv^2-2xv \\ \hline 2xv+x=yv^2 \\ \hline x=yv^2:(2v+1) \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 \text{ ſub.} \\ y \text{ div.} \\ 2xv \text{ add.} \\ 2v+1 \text{ div.} \end{array}$$

Sit ex. gr. $y=6$, $v=1$: erit $x=6:3=2$. Sit $y=15$, $v=2$: erit $x=15.4:(4+1)$ $=15.4:5=3.4=12$.

PROBLEMA CVI.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus ſubductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} xy-y=v^3 \\ \hline y=v^3:(x-1) \end{array} \quad x-1 \text{ div.}$$

Aſſumendus ergo eſt cubus, qui ſit per $x-1$ diviſibilis.

Ex. gr. Sit $x=6$, $v=10$; erit $y=1000:5=200$. Sit $x=3$, $v=6$; erit $y=216:2=108$.

PROBLEMA CVII.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} yx^2=z^3x^3:v^3 \\ \hline y=z^3x:v^3 \\ \hline yv^3=z^3x \\ \hline yv^3:z^3=x \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 \text{ div.} \\ v^3 \text{ mult.} \\ z^3 \text{ div.} \end{array}$$

Si

Si adeo numeri integri deſiderantur, aſſumendus eſt valor ipſius y per cubum aliquem z^3 diviſibilis, ſeu cubi multiplus.

Sit ex. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16 . 27 : 8 = 2 . 27 = 54$.

PROBLEMA CVIII.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum æquale ſit cubo radice ſua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ æquatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde ſi ſubtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2 \qquad x \text{ div.}$$

$$y^3 x^2 - 3y^2 x + 2y = a - x \qquad x - 2y \text{ add.}$$

$$y^3 x^2 - 3y^2 x + x = a - 2y$$

Facile jam apparet, ſi valor ipſius x rationalis deſideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3 x^2}{8} - \frac{3a^2 x}{4} + x = 0 \qquad 8 \text{ mult.}$$

$$a^3 x^2 - 6a^2 x + 8x = 0 \qquad x \text{ div.}$$

$$a^3 x - 6a^2 + 8 = 0 \qquad 6a^2 - 8 \text{ add.}$$

$$a^3 x = 6a^2 - 8 \qquad a \text{ div.}$$

$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, ſi numeri rationales deſiderentur, Problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA CIX.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc eſt, omnibus ſuis partibus aliquotis æqualem.*

Sit numerus quæſitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas ſeu factores reſolvi poſſit: erunt partes aliquotæ $1, y, y^2, y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & $x, yx, y^2 x, y^3 x$, &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c} + x + yx + y^2 x + y^3 x \text{ \&c.} = y^n x$$

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx - y^2 x - y^3 x \text{ \&c.}$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x$$

Jam ut x ſit numerus integer, nec in caſu ſpeciali, ſi y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diverſus ſit a numero earundem in formula generali; neceſſe eſt ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in caſu contingat, niſi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x eſt numerus primus, neceſſe eſt ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. in omni caſu ſit numerus primus; conſequenter ſeries terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus eſt numerus primus (*§. cit.*), & n notat numerum terminorum, qui iſtiuſmodi terminum præcedunt. Quare Problema, quod ſpeciem indeterminati mentiebatur, determinatum eſt.

Patet autem ſimul

Theorema 1. Si numerorum ſeries in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum ſumma ſit numerus primus; ſumma in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum ſerie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus eſt numerus primus; numerus iſte primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In ſerie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.

$4 - 1 = 3$, $8 - 1 = 7$, $32 - 1 = 31$, $128 - 1 = 127$, $2048 - 1 = 2047$ &c. ſunt numeri primi. Ergo $2 . 3 = 6$; $4 . 7 = 28$; $31 . 16 = 496$; $127 . 64 = 8128$; $2047 . 1024 = 2096128$; &c. &c. ſunt numeri perfecti.

Scholion.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima ſolvit* Diophantus, *difficiliora ſunt determinatis, niſi ſimplicia fuerint. Unde Tyrones ſub initium ea prætermittere poſſunt, quæ difficultatem creant, ad ſequentia pedem promoventes. Non tamen prorſus negligenda ſunt, cum maximus eorum ſæpe ſit uſus in Problematibus Geometriæ ſublimioris ſolvendis. Ceterum Ars reſolvendi Problemata indeterminata numerica* Analyſis Diophantea *appellari ſolet.*

Caput III.

De Algebra ad Geometriam elementarem applicata.

Problema CX.

250. *Problema geometricum algebraice reſolvere:*

Resolutio.

1. Obſerventur ea omnia, quæ in Probl. 36 (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rariſſime ad æquationem eodem modo in Problematis geometricis perveniatur, quo in numericis uſi ſumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda ſunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in ſchemate depictarum relationes, nullo habito diſcrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur; ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, ſeu quibus datis, aliæ una dentur, ſive per triangula ſimilia (§. 175 *Geom.*), ſive per rectangula (§. 417 *Geom.*), ſive per alia (quod tamen raro fieri ſolet) Theoremata.

γ) Ut igitur triangula ſimilia & rectangula obtineas, ſæpius producendæ ſunt lineæ, donec vel directe vel indirecte datis fiant æquales, vel alias ſecent; ſæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ; ſæpius puncta quædam connectenda; ſæpius anguli

anguli datis æquales conſtruendi; quæ fieri poſſe, ex Geometria elementari manifeſtum eſt. Eum in finem probe tenenda ſunt Theoremata de æqualitate angulorum & ſimilitudine triangulorum (§. 156, 183, 201, 207, 233, 267, 268, 269, 329 *Geom.*)

δ) Quodſi in æquationem non ſatis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ ſunt linearum relationes; ac interdum ſufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, ſed aliam, qua data ipſa quoque innoteſcit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda eſt conſtructio geometrica variis quidem modis pro diverſitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum ſimpliciſſimos regulæ Algebræ caſus exemplis geometricis illuſtramus; ſuffecerit nobis oſtendiſſe, quomodo æquationes ſimplices & quadraticæ conſtruantur.*

PROBLEMA CXI.

252. *Æquationem ſimplicem conſtruere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo conſiſtit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales reſolvantur: id quod exemplis rectius oſtenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in caſu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a+b)(a-b)$, (§. 86); erit $c : a+b = a-b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b-bcc}{ad}$. Invenitur *per caſum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut ſit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique, *per caſum* 1, $i = \frac{hc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i. *Brevius.* Fiat $a : a+c = a-c : g$, *per caſum* 3, & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, *per caſ.* 1, quæ erit x.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur, ut in caſu præcedente, $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, ſumma linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg:a} = \frac{(a+d)b}{f + cg:a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$; conſequenter $x = \frac{(a+d)b}{f+h}$. Reductus adeo eſt caſus præſens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a-d)}{h+c}$; conſequenter $h + c : a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Conſtruatur triangulum ABC, cujus crus AB $= a$, BC $= b$, (§. 180 *Geom.*); erit AC $= \sqrt{(a^2+b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC $= m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, conſequenter $c : m = m : x$. Tab. I. Fig. 3.

9. Sit $x = \frac{a^2-b^2}{c}$. Super AB $= a$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC $= b$. Cum triangulum ACB ſit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB $=$ $\sqrt{(a^2}$ Tab. I. Fig. 4.

$\surd(a^2 - b^2)$, (*§*. 417 *Geom.*). Dicatur CB $= m$: erit $x = m^2 : c$, conſequenter $c : m = m : x$.

Tab.I. *Fig.* 5. 10. Sit $x = \frac{a^2 b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$: erit $x = \frac{a^2 + cd}{h + c}$. Quæratur inter AC $= c$ & CB $= d$ media proportionalis CD $= \surd cd$, (*§*. 327 *Geom.*). Fiat CE $= a$; erit DE $= \surd(a^2 + cd)$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{h + c}$; conſequenter $h + c : m = m : x$.

PROBLEMA CXII.

253. *Æquationem quadraticam geometrice conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad ſimplices reduci poſſint (*§*. 143); ipſas quoque, *per Probl. præced.* (§. 252) conſtruere licet.

Tab.I. *Fig.* 5. Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (*§*. 299 *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \surd ab$, ſi inter AC $= a$ & CB $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 . ax = . b^2$; erit $x = . \frac{1}{2}a . \surd(\frac{1}{4}a^2 . b^2)$, hoc eſt, vel $x = \frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, vel $x = \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2) - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, vel $x = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Omne igitur artificium conſtruendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipſius $\surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, itemque ipſius $\surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$.

Tab.I. *Fig.* 3. Utrumque vero jam docuimus in Problemate præcedente. Nimirum ſi in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$ (*§*. 417 *Geom.*). Sed

Fig. 4. ſi ſuper AB $= \frac{1}{2}a$, deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, ut in Problemate præcedente demonſtratum.

SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes ſimplices & quadraticæ eum in modum conſtrui poſſint, quo eas conſtruere docuimus: minime tamen conſultum eſt, ut iis ſtricte inhæreamus. Hac enim ratione in conſtructiones parum commodas ſæpe incideremus, cum ſingulares Problematis ſpecialis circumſtantiæ multo concinniorem meditanti inſinuent. Immo in genere notandum eſt, ex calculo analytico difficillime erui conſtructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium ſpectetur, ſolutione arithmetica ad praxin ſufficiente. Ratio hæc eſt, quod in algebraica ſolutione Problema tanquam unicum in rerum poſſibilium regione conſideretur, independens ab omnibus reliquis; cum tamen ex Veterum methodo appareat & ipſa ratio ſuadeat, ſolutionem unius a ſolutione alterius pendere.*

PROBLEMA CXIII.

255. *Data perimetro* AB + BC + CA, *& area trianguli rectanguli; invenire hypothenuſam.* Tab. I. *Fig.* 3.

Sit AB + BC + CA $= a$, AC $= x$, area $= b^2$, erit BC + BA $= a - x$.

Jam cum ſit AC^2 = AB^2 + BC^2 (§. 417 *Geom.*) & AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 — 2AB. BC (*§*. 261 *Arithm.*): erit AC^2 = (AB + BC)^2 — 2AB. BC (§. 87 *Arithm.*). Eſt vero AC^2 $= x^2$ & (AB + BC)^2 $= a^2 - 2ax + x^2$, 2AB. BC $= 4b^2$ (§. 392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$
$$2ax = a^2 - 4b^2$$
$$x = \tfrac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodſi triangulum conſtrui debet, dicatur altitudo BD, hoc eſt perpendiculum in hypothenuſam AC demiſſum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*).

$$\tfrac{1}{2}xy = b^2$$
$$y = b^2 : \tfrac{1}{2}x$$

Conſtructio. Erigatur ad BD $= a$ perpendicularis AB $= 2b$, fiatque BC $= b$ & quæratur Tab. XII. *Fig.* 113.

Tab. XII. *Fig.* 113. ratur (§.271 *Geom.*) quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Fiat $CB = \frac{1}{2}a$, & $CI = BH$; erit $BI = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad $BO = \frac{1}{2}x$, & $BE = BG = b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæſita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare, ſi ſuper BI deſcribatur ſemicirculus, & ex K agatur eidem parallela KL ſecans ſemicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæſitum.

Æquatio ſecunda in hanc reſolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

ſeu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§.185 *Arith.*). habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo eſt ut dimidia perimeter ad compoſitam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenuſam.

S C H O L I O N.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur inveſtigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§.118 Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipſis æquale.*

P R O B L E M A CXIV.

Tab.I. *Fig.* 3. 257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB, & BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $= a^2$ $\quad BC = x$

$AB = y$

erit $AC = y^2 : x$

Ergo

(§.417 *Geom.*) $\quad$ (§.392 *Geom.*)

$$y^4 : x^2 = y^2 + x^2 \qquad \tfrac{1}{2}xy = a^2$$

$\times x^2$

$$y^4 = x^4 + x^2y^2 \qquad xy = 2a^2$$

$$y^4 = \frac{16a^8}{y^4} + 4a^4 \qquad x = 2a^2 : y$$

$\times y^4$

$$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4 \qquad x^2 = 4a^4 : y^2$$

$$x^4 = 16a^8 : y^4$$

$$x^2y^2 = 4a^4$$

$$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8$$
$$+4a^8 \quad + \quad 4a^8$$

$$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$\left.\begin{matrix} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{matrix}\right\} = 2a^4\sqrt{5}$$

$$y^4 = 2a^4 + 2a^4\sqrt{5} = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$y = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4\sqrt{5}$, radix $2a^4 - y^4$ eſt falſa.

Similiter reperitur valor ipſius x. Eſt enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, adeoque $y^4 = 16a^8 : x^4$, & hinc ob $y^4 = x^2y^2 + x^4$ porro

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$

$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$

$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = 2a^4 + x^4$$

$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$

$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Conſtructio. Jungantur $AB = a$ & $AC = 2a$ ad angulos rectos, erit $BC = a\sqrt{5}$. Fiat $BD = AB$, erit $DC = a\sqrt{5} - a$. Fiat porro $CE = CD$, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari deſcribatur ſuper AE ſemicirculus; erit $CN = \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis $CH = a$ & $CG = CN$, deſcriptoque ſemicirculo ſuper HG; erit $CI = \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$. Tab. XII. *Fig.* 114.

Tab. XII. Fig. 114. Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\surd 5$; erit, deſcripto ſuper AK ſemicirculo, $CL = \surd(2a^2 + 2a^2\surd 5) = a\surd(2 + 2\surd 5)$. Fiat porro $CO = CL$; erit deſcripto ſuper HO ſemicirculo $CM = \surd(a^2\surd(2+2\surd 5)) = a\sqrt[4]{(2+2\surd 5)}$.

Quodſi itaque tandem fiat CF = CI; ducta FM erit CMF triangulum quæſitum.

Quodſi exponens rationis $= y$, BC $= x$, erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, adeoque (§.417 *Geom.*):

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \quad x^2 \text{ div.}$$
$$y^4 = y^2 + 1 \quad y^2 \text{ ſubt.}$$
$$y^4 - y^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \text{add.}$$
$$y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} y^2 - \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} - y^2 \end{matrix}\right\} = \surd\tfrac{5}{4}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2} + \surd\tfrac{5}{4}$$
$$y = \surd(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\surd 5)$$

Patet adeo rationem laterum eſſe conſtantem.

PROBLEMA CXV.

Tab. I. Fig. 6. 258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione ſecare in* C, *hoc eſt, ut ſit* AB : AC = AC : CB.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$; conſequenter, per conditionem Problematis,

$$a : x = x : a - x$$
$$x^2 = a^2 - ax \ (\S.297\ \textit{Arithm.}). \quad ax \text{ add.}$$
$$x^2 + ax = a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2 \quad \text{Ext. Rad.}$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \surd\tfrac{5}{4}a^2$$
$$x = \surd\tfrac{5}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a$$

Conſtructio. 1°. Jungantur $AB = a$ & $BD = \tfrac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD = \surd\tfrac{5}{4}a^2$. Tab. I. Fig. 6.
2°. Fiat $DF = \tfrac{1}{2}a$ & AF = AC; erit $AC = x$.

Alia ex æquatione tertia elicitur conſtructio. Nimirum radio $AC = \tfrac{1}{2}a$ deſcribatur circulus, & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare ſi fiat BF = BE; recta AB erit in F media & extrema ratione ſecta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE \cdot BD = ax + x^2$; conſequenter $ax + x^2 = a^2$ (§.379 *Geom.*). Tab. I. Fig. 7.

PROBLEMA CXVI.

259. *Rectam datam* AC, *utcunque diviſam in* B, *iterum ſecare in* D, *ita ut ſit* AD : DC = DC : BD. Tab. I. Fig. 8.

Sit $AB = a$, $BD = x$,
$BC = b$, erit $DC = b - x$,
$AD = a + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a + x : b - x = b - x : x$$
$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2 \quad x^2 - 2bx \text{ ſubtr.}$$
$$ax + 2bx = b^2 \quad a + 2b, \text{ div.}$$
$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam
$$a + 2b : b = b : x \ (\S.272\ \textit{Geom.}).$$

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci poteſt, a qua conſtructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$
erit $a + b : b - x = b : x$ (§.190 *Arithm.*)
$$a + b : b = b - x : x \ (\S.173\ \textit{Arithm.})$$
$$a + 2b : b = b : x \ (\S.190\ \textit{Arith.}).$$

Pro-

PROBLEMA CXVII.

Tab. I. Fig. 8. 260. *Datam rectam* AC *diviſam in* B *denuo ſecare in* D, *ita ut ſit* CB : DB = DA : BA.

Sit CB = a, DB = x, BA = b, erit DA = $b + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a : x = b + x : b$$

$$ab = bx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \text{ add. (§. 143).}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab = \tfrac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} = \tfrac{1}{2}b + x$$

$\tfrac{1}{2}b$ ſubt.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b = x$$

Tab. I. Fig. 9. *Conſtructio.* Inter EG = b & GE = a quæratur media proportionulis HG, quæ erit = $\sqrt{ab}$. Fiat GI = $\tfrac{1}{2}b$, & ducatur HI; erit HI = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)}$. Fiat denique KI = GI: erit KH = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + ab)}$, ſi inter $\tfrac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 327, 330 *Geom.*).

Tab. I. Fig. 4. Item, quia $\tfrac{1}{4}bb + ab$ eſt differentia quadratorum $\tfrac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2; ſuper AB = $\tfrac{1}{2}b + a$ deſcribatur ſemicirculus & in eo applicetur AC = a; erit CB = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + ab)}$, (§. 317, 417 *Geom.*).

DEFINITIO XIX.

261. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA CXVIII.

Tab. I. Fig. 10. 262. *Datam rectam* AB *ita ſecare in* C, *ut partes* AC *&* CB *ſint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ.*

Sit AB = a, AC = x,
DE = b, CB = $a - x$.
FG = c,

Ergo (§. 261).

$$x : b = c : a - x$$

$$ax - x^2 = cb$$

mut. ſig.

$$-cb = x^2 - ax$$

$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add. (§. 143).}$$

$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - cb)} \begin{cases} = \tfrac{1}{2}a - x \\ = x - \tfrac{1}{2}a \end{cases}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$$

Conſtructio. Quæratur inter HI = b & IK = c media proportionalis MI = $\sqrt{cb}$ (§. 327 *Geom.*). Radio IL = $\tfrac{1}{2}a$ deſcribatur arcus, & ducatur PM ipſi IK parallela (§. 258 *Geom.*); erit NM = x & MP = $a - x$. Nam demiſſo ex centro L perpendiculo LO, erit NO = OP (§. 291 *Geom.*) & OL = MI = $\sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed NL = LI (§. 40 *Geom.*) = $\tfrac{1}{2}a$. Ergo NO = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 417 *Geom.*); conſequenter, ob MO = IL (§. 238 *Geom.*) = $\tfrac{1}{2}a$, MN = $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)} = x$, & PM = $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)} = a - x$. Tab. I. Fig. 11.

COROLLARIUM.

263. Conſtruere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$, idem eſt, ac datis duabus rectis c & b, vel ſi $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA CXIX.

264. *Datis duabus rectis* DE *&* FG *reciprocas invenire, quarum differentia ſit data rectæ* AC *æqualis.* Tab. I. Fig. 10.

Sit DE = a, reciproca minor
FG = b, = x,
AC = c, erit major = $c + x$.

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc \qquad \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{4}cc + ab = \tfrac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} = \tfrac{1}{2}c + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} - \tfrac{1}{2}c = x$$

Tab.I. Fig. 5. *Conſtructio.* Quæratur inter AC $= b$ & CB $= a$ media proportionalis DC. Fiat CE $= \frac{1}{2}c$; erit DE $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$. Unde ſi ſubtrahitur $\frac{1}{2}c =$ EF, relinquitur DF $= x$.

Tab.I. Fig. 12. Alia magis ingenioſa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Deſcribatur nimirum ex centro C, radio arbitrario, majori tamen quam $\frac{1}{2}c$ & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ $= c$ & IP $= a - b$. Prolongetur PI in O, donec PO $= b$. Tandem per O deſcribatur circulus priori concentricus: erit HI $= x$. Demiſſa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI $=$ LQ & LH $=$ LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM $=$ IH (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe NI $=$ PO $= b$. Ergo NI. IO $= ab$; conſequenter $ab =$ HI. IM $=$ HI. $(c +$ HI$)$ (§. 381 *Geom.*). Eſt vero etiam $ab = x(c + x)$. Ergo HI $= x$.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$; conſequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Conſtructio. Eadem eſt, quæ precedens. Sed hic MI $= x$, ita enim HI $=$ QM $= x - c$, conſequenter NI. NO $= ab$ & HI. IM $= x^2 - cx$.

Corollarium.

265. Conſtruere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$, idem eſt ac datis duabus rectis a & b, vel, ſi $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

Problema CXX.

266. *Datam rectam* AB *ita ſecare in* C, *ut rectangulum ſub tota* AB *&* *ſegmento minore* AC *æquale ſit rectangulo ſub majore* CB *&* *differentia utriuſque* CB — AC. Tab.I. Fig. 10.

Sit AB $= a$, AC $= x$,

erit CB $= a - x$,

CB — AC $= a - 2x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$-a^2 = -4ax + 2x^2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$

$$+a^2 \qquad +a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Conſtructio. Quæratur inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, adeoque ſubducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam, per conditionem Problematis,

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit $a : a - 2x = a - x : x$ (§. 299 *Arithm.*)

$$2a - 2x : a = a : a - x$$

$$a - x : \tfrac{1}{2}a = a : a - x$$

$$\tfrac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

Scholion.

267. *His reſolutionibus per analogias, & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus eſt, ſi geometricas more Veterum mediteris demonſtrationes.*

Pro-

PROBLEMA CXXI.

Tab.I. Fig.13. n. 1. 268. *Dato radio circuli* ED; *invenire latus Trigoni regularis ipſi inſcribendi* AB.

Ducatur latus Hexagoni EB, & ſit BD=BE (§. 356 *Geom.*) $=a$, AB$=x$; erit BF$=\frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE =BD, *per demonſtr.* BF=BF: erit EF =FD (§. 235 *Geom.*) $=\frac{1}{2}a$. Quare (§. 417 *Geom.*) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc eſt

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Eſt ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et ſi fiat $a=1$, erit $= x\sqrt{3}$.

Tab.I. Fig.13. n. 2. *Conſtructio.* Concinnior hæc eſt: Super diametro AB conſtruatur triangulum æquilaterum AFB, & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB ſit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & FB $=2a$, CB $=a$; erit FC $=\sqrt{3aa}$ (§. 417 *Geom.*) $=x$.

Theorema. Quadratum lateris Trigoni eſt ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM I.

269. Si, dato latere Trigoni regularis b, inveniri debet radius circuli circumſcribendi y; erit $3y^2 = b^2$, conſequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ eſt media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM II.

270. Quoniam dimidium latus Trigoni regularis eſt ſinus 60° (§. 2 *Trigon.*), per Problema præſens invenitur ſinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus Problematis ſolutio uſum potius reſpicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim conſtructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Eſt enim diameter* $AB = 2a$. *Quare ſi fiat* $AD = a$, *ducaturque* DB, *cum angulus ad* D *rectus ſit* (§. 317 Geom.), *adeoque* $AB^2 - AD^2 = DB^2$ (§. 417 Geom.) *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$. Tab.I. Fig.13. n. 2.

PROBLEMA CXXII.

272. *Dato radio circuli* AE; *invenire latus Octogoni regularis circulo inſcribendi.* Tab.I. Fig.17.

Sit AE$=r$, AF$=y$; erit latus quadrati AB$=\sqrt{2r^2}$ (§. 21 *Trig.*) & AG $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum AEF=45° (§. 342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§. 291 *Geom.*); erit quoque EAG=45° (§. 241 *Geom.*); conſequenter EG=AG (§. 253 *Geom.*) $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG$=r-\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$yy = \tfrac{1}{2}r^2 + 1\tfrac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc eſt $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod ſi fiat $r=1$; erit $y=\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus Octogoni ſit ſinus 22° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipſum Problema invenitur ſinus 22° 30′.

PROBLEMA CXXIII.

274. *Dato latere Octogoni* AF; *invenire radium circuli circumſcribendi* AE. Tab.I. Fig.17.

Tab.I. *Fig.* 17. Sit $AF = b$, $AE = y$, erit (§. 272)

$$b^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4}$$
$$\sqrt{2y^4} = 2y^2 - b^2$$
$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \tfrac{1}{2}b^4$$
$$\tfrac{1}{2}b^4 \qquad \tfrac{1}{2}b^4 \text{ (§. 261}$$
$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4 \text{ Arith.)}$$
$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2 - b^2$$
$$b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2$$
$$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Eſt igitur $b : y = y : b + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$
conſeq. $\tfrac{1}{2}b : y = y : 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Hinc elicitur ſequens geometrica

Conſtructio. Super latere Octogoni $AB = b$ deſcribatur ſemicirculus, & ex centro C erigatur perpendicularis indefinita CF, erit recta $DB = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (*§.* 417 *Geom*). Fiat $AE = 2b + 2b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, deſcriptoque ſemicirculo AFE; erit $AF = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$, (*§.* 330 *Geom.*); conſequenter radius circuli Octogono circumſcribendi: quod adeo ſuper recta AB conſtruetur, ſi radio AF deſcribatur circulus tranſiens per A & B. (Tab. XII. *Fig.* 115.)

PROBLEMA CXXIV.

Tab.I. *Fig.* 14. 275. *Dato radio circuli* AC; *inveniре latus Decagoni regularis inſcribendi* AB.

Quoniam AB eſt $\tfrac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus $ACB = 36°$ (§. 57, 59 *Geom.*); conſequenter, ob $AC = BC$ (§. 40 *Geom.*), $ABC = CAB = 72°$ (§. 248 *Geom.*); adeoque $DAC = 108$ (§. 149 *Geom.*). Fiat $AD = AC$, erit $ADC = ACD = 36°$ (§. 248 *Geom.*); conſequenter $DCB = 72°$. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc $BD : BC = BC : AB$ (§. 267 *Geom.*). Tab.I. *Fig.* 14.

Sit jam $AC = BC = a$, $AB = x$; erit $BD = a + x$; conſequenter *per demonſtrata*,

$$a + x : a = a : x$$
$$ax + x^2 = a^2$$

Eſt ergo a media & extrema ratione ſecanda, cujus pars major x (§. 258). Vel radio a quærendæ ſunt reciprocæ $a + x$ & x (*§.* 265).

Theorema. Latus Decagoni regularis circulo inſcripti eſt pars major radii media & extrema ratione ſecti. Tab.I. *Fig.* 15.

Conſtructio. Quoniam $x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$ (§. 258); radio a deſcribatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis $IE = a$. Fiat $EF = \tfrac{1}{2}a$: erit $FI = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Quare ſi ex F, radio IF, deſcribatur arcus KI, erit $KE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$.

SCHOLION.

276. *Hanc ipſam conſtructionem tradit* PTOLEMÆUS *in ſuo* Almageſto.

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per Problema præſens ſinus 18° (*§.* 2. *Trigon.*).

PROBLEMA CXXV.

278. *Dato latere Decagoni regularis circulo inſcribendi* AB; *invenire radium* AC. Tab.I. *Fig.* 14.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $BD = a + x$, & *per demonſtrata in Probl. præc.*

$a +$

$a+x:x=x:a$

$ax+a^2=x^2$

$a^2=x^2-ax$

$\frac{5}{4}a^2=x^2-ax+\frac{1}{4}a^2$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x-\frac{1}{2}a$, ob $x>\frac{1}{2}a$ (§. 275).

$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x$.

Tab.I. Fig.16. *Conſtructio.* Conſtruatur triangulum rectangulum MLN, in quo ML $=a$ & MN $=\frac{1}{2}a$: erit LN $=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§.417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec NO $=$ LN; erit MO $=x$. Ex centro itaque O per M circulus deſcribi poteſt.

Aliter.

$a+x:x=x:a$

$a:x=x-a:a$

Quærendæ adeo ſunt ipſi a reciprocæ x & $x-a$.

P R O B L E M A CXXVI.

Tab.I. Fig.17. 279. *Dato radio circuli* AE *& latere Decagoni* AF; *invenire latus Pentagoni* AB.

Sit AE $=a$, AB $=x$,
AF $=b$, AG $=\frac{1}{2}x$, (§.291 *Geom.*)
GE $=\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$
FG $=a-\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$

Quare (§. 417 *Geom.*)

$b^2=\frac{1}{4}x^2+a^2-2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}+a^2-\frac{1}{4}x^2$

$b^2=2a^2-2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$

$2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}=2a^2-b^2$

$4a^4-a^2x^2=4a^4-4a^2b^2+b^4$

$-a^2x^2=-4a^2b^2+b^4$

$4a^2b^2-b^4=a^2x^2$

$4b^2-b^4:a^2=x^2$

Eſt vero $b=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$ (§. 275)

$b^2=\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$b^4=\frac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

Ergo

$x^2=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-(\frac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}):a^2$
$=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{14}{4}a^2+3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$
$=\frac{10}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=a^2+\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$
$=a^2+b^2$.

Conſtructio: Quæratur latus Decagoni EK (§. 275); erit KI latus Pentagoni. Tab.I. Fig.15.

Theorema. Latus Pentagoni regularis poteſt latera Hexagoni & Decagoni eidem circulo inſcriptorum ſimul.

S C H O L I O N.

280. *Eandem prorſus conſtructionem dedit* Ptolemæus.

C O R O L L A R I U M.

281. Per præſens adeo Problema inveniri poteſt ſinus 36° (§. 2 *Trigon.*).

P R O B L E M A CXXVII.

282. *Datis ſumma crurum Trianguli rectanguli* AB+BC, *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenuſam* AC *demiſſo*; *invenire latera.* Tab.I. Fig.3.

Sit AB+BC $=a$, BD $=b$, AB—BC $=y$, AC $=x$; erit AB $=\frac{1}{2}(a+y)$, BC $=\frac{1}{2}(a-y)$; conſequenter

(§. 417 *Geom.*)

$x^2=\frac{1}{2}(aa+yy)$

$2x^2=aa+yy$

$2x^2-a^2=y^2$

(§. 330 *Geom.*)

BA : BD = AC : BC

$\frac{1}{2}(a+y):b=x:\frac{1}{2}(a-y)$

$\frac{1}{4}(a^2-y^2)=bx$

$a^2-y^2=4bx$

$a^2-4bx=y^2$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

Conſtructio nihil difficultatis habet. Quodſi enim triangulum conſtrui debet, ad AB $= a$
Tab. XII. Fig. 116. excitetur in A perpendicularis AC $= b$ (§. 249 *Geom.*), erit BC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Quare ſi fiat CD $=$ AC, erit DB $= \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam porro BE $=$ BD, &, deſcripto ſuper EB ſemicirculo ex C, ducatur CH ipſi AB parallela (§. 258 *Geom.*) ſecans ſemicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quæſitum.

PROBLEMA CXXVIII.

Tab. I. Fig. 18. 283. *Datis, pro triangulo rectangulo* BAC, *hypothenuſa* BC *&* *differentia crurum* DC; *invenire crura.*

Sit BC $= c$, DC $= f$, $\frac{1}{2}$(AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \frac{1}{2}f$, AB $= x - \frac{1}{2}f$ (§. 6); conſequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)}$$

Conſtructio. Conſtruatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF $=$ FE $= \frac{1}{2}c$, erit AE $= \sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE deſcribatur ſemicirculus, ob AF $=$ FE, tranſiturus per F, & in eo applicetur EG $= \frac{1}{2}f$; erit AG $= x$; conſequenter ſi fiat GD $=$ GC $=$ GE, crus majus AC, minus AB $=$ AD.

PROBLEMA CXXIX.

Tab. I. Fig. 19. 284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quæ producta tranſeat per datum punctum* H *tangentis* HI.

Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 379 *Geom.*). Tab. I. Fig. 19.

$$y^2 + my = n^2$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$

$$y + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)} - \tfrac{1}{2}m$$

Conſtructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis MI $= \frac{1}{2}m$; erit HM $= \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$. Fiat NM $=$ MI $= \frac{1}{2}m$; erit HN $= y$. Quare ſi ex centro H, radio HN, deſcribatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK ſit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA CXXX.

285. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum ſumma æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc, dd, quæſita yy & $dd - yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : bb = cc : dd - yy$$

$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$

$$y^4 - ddy^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - bbcc$$

$$\tfrac{1}{2}dd - y^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)})}$$

Conſtructio. Quæratur ad AB $= d$, AC $= b$, & BD $= c$ quarta proportionalis CE $= bc : d$. Deſcribatur ſemicirculus ſuper CF $= \frac{1}{2}d$, & in eo applicetur CG $=$ CE; erit FG $= \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$. Fiat HC $= d$ & CI $= \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$; erit media proportionalis CK $= y$. Denique ſuper CH $= d$ deſcribatur ſemicirculus, & in eo applicetur CL $=$ CK, erit LH $= \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quæſiti. Tab. I. Fig. 20.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

286. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæſita yy & $hh+yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : ff = gg : hh + yy$$
$$y^4 + hhyy = ffgg$$
$$\tfrac{1}{4}h^4 \qquad \tfrac{1}{4}h^4$$
$$y^4 + hhyy + \tfrac{1}{4}h^4 = ffgg + \tfrac{1}{4}h^4$$
$$y^2 + \tfrac{1}{2}hh = \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)$$
$$y^2 = -\tfrac{1}{2}hh + \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)$$
$$y = \surd(-\tfrac{1}{2}hh + \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4))$$

Conſtructio. Eadem fere, quæ Problematis præcedentis.

PROBLEMA CXXXII.

Tab.II. Fig. 21. n. 1. 287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH; *invenire altitudinem* ML.

Sit HL $= c$, LI $= d$, HI $= g$, HM $= z$, erit MI $= g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipſius MI²

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$
$$cc = dd - gg + 2gz$$
$$cc - dd = 2gz - gg$$
$$cc + gg - dd = 2gz$$
$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica conſtructio non deſideratur, utpote ex Elementis manifeſta; ſed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2gz$ eſt differentia inter zz & $gg - 2gz + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum ſegmentorum baſis HM & MI. Tab.II. Fig. 21. n. 1.

PROBLEMA CXXXIII.

289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *ſimile conſtruere.* Tab.II. Fig. 21. n. 1. & 2.

Sit HI $= f$, LM $= e$, NP $= m$, QO $= n$, baſis trianguli quæſiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§. 396 *Geom.*)
$$m : n = y : z$$
$$mz = ny$$

(§. 392 *Geom.*)
$$fe = zy$$
$$fe : y = z$$
$$mfe : y = mz$$
$$ny = mfe : y$$
$$ny^2 = mfe$$
$$y^2 = mfe : n$$
$$y = \surd(mfe : n)$$

Conſtructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipſi NP parallela: erit RS $= me : n$. Quæratur inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= \surd(mfe : n)$, ſuper qua, ob angulos N & P datos, triangulum TSV conſtrui poteſt (§. 264 *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y$ $\qquad$ $fe = zy$

Fiat $n : m = e : r$ $\qquad$ $f : z = y : e$ (§. 299 *Arithm.*)

erit $z : y = e : r$ $\qquad$ (§. 167 *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ $\qquad$ (§. 194 *Arithm.*).

Eſt ergo y media proportionalis inter f & r, ſeu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA CXXXIV.

Tab.II. Fig.22. 290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *ſit æqualis lineæ datæ.*

Ducatur diagonalis CB & in E conſtituatur angulus CEF = CBG (§. 208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit AB = b, CB = c, EG = d, BG = z, CF = y: erit BF = $y - c$. BG : GE = AB : EC (§. 268 *Geom.*). Unde reperitur EC = $bd : z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per conſtruct.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) CB : BG = CE : EF. Unde reperitur EF = $zbd : cz = bd : c$. Porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99, 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arithm.*); conſequenter CBG = EBF (§. 88 *Arithm.*) = CEF (§. 87 *Arithm.*). Ergo, ob angulum communem F (§. 267 *Geom.*),

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3 y = bbdd$$

$$y^2 - cy = bbdd : cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

Ex æquatione prima ſtatim liquet, inveniendas eſſe ipſi $bd : c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Conſtructio. Fiat BM = EG = d, & ducatur LM ipſi AC parallela; erit LM = $bd : c$ (§. 268 *Geom.*). Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit ON = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$ (§. 417 *Geom.*). Tab.II. Fig.22. Translata ergo ON ex N in F; erit CF = y. Denique cum EF = $bd : c$ = LM; ex puncto F, intervallo EF, determinetur punctum E. Quodſi jam ex C ducatur recta per E occurrens ipſi AB continuatæ in G, erit EG æqualis lineæ datæ.

PROBLEMA CXXXV.

291. *A dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.* Tab.II. Fig.23.

Quia punctum E poſitione, circulus GDFG & poſitione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque EG = a, GC = b, ED = x; erit EF = $a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*)

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

Conſtructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea deſcribatur ſemicirculus CDE, ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Eſt vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$: ergo DE = $\sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA CXXXVI.

292. *Examinare regulam* Renaldinianam, *Polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi.* Tab.II. Fig.24.

Regula *Caroli* RENALDINI (*a*) hæc eſt. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet. Super AB conſtruatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per ſecundum diviſionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipſius mente BG latus Polygoni.

Fal-

(*a*) De Reſolutione & Compoſitione Mathematica lib. 2. f. 367.

Tab.II. Fig. 24. Falſitatem Regulæ una inſtantia oſtendiſſe ſufficit.

Sit BG latus Octogoni, & fiat BH $=$ BG; erit HG latus Quadrati. Sit porro CB $= 1$, EG $= x$; erit CD $= \frac{1}{2}$, per Regulam RENALDINI, FC $= \sqrt{3}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam angulus ad C rectus (*§.* 184 *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) FC : CD $=$ EG : DE, hoc eſt, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc CE $= \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob CE² $+$ EG² $=$ CG² (§. 417 *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13}$$

$$\frac{3}{13.13} \qquad \frac{3}{13.13} \quad \text{add.}$$

$$\frac{3}{13.13} + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13} + \frac{3}{13.13} = \frac{120}{13.13}$$

$$\frac{1}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120}.$$

$$x = \frac{1}{13}\sqrt{120} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo ſemilatus Quadrati, ſi vera eſſet Regula RENALDINI, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diverſum a *Renaldiniano* eſſe extractio radicis probat. Fallit ergo regula RENALDINI in Octogono, adeoque non univerſalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorſus modo oſtenditur, quod etiam fallat in aliis Polygonis.*

PROBLEMA CXXXVII.

294. *Data diagonali Pentagoni regularis* AD; *invenire latus Pentagoni* AE.

Sit AE $= x$, AD $= a$. Quoniam anguli AEC menſura eſt arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFA ſemiſumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc eſt, arcus AE (§. 342 *Geom.*), eſt vero AB $=$ AE (§. *cit. Geom.*); erit AEF $=$ AFE (*§.* 142 *Geom.*), conſequenter AF $=$ AE (§. 253 *Geom.*) $= x$, adeoque FD $= a - x$. Porro anguli AED menſura eſt AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFD menſura itidem AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*) Tab.II. Fig. 25.

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Eſt adeo x pars major ipſius a media & extrema ratione ſectæ (*§.* 258).

COROLLARIUM.

295. Quod ſi AD $= x$, ED $= a$, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA CXXXVIII.

296. *Invenire circulum ſuperficiei Cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria Cylindri $= p$; altitudo a; erit ſuperficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*).

Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ eſt ejuſdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*)

$$px^2 : 2r = ap \quad 2r \text{ mult.}$$
$$px^2 = 2rap \quad p \text{ div.}$$
$$x^2 = 2ar$$
$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies Cylindri æquatur circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum & altitudinem Cylindri.

PROBLEMA CXXXIX.

297. *Invenire Cylindrum, cujus ſuperficies ſit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo Cylindri $= x$, radius baſis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 425 *Geom.*), conſequenter (§. 516 *Geom.*).

$$pyx : r = \tfrac{1}{2}pr \quad r$$
$$pyx = \tfrac{1}{2}pr^2 \quad p$$
$$yx = \tfrac{1}{2}r^2 \quad y$$
$$x = r^2 : 2y$$

Eſt adeo Problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio aſſumi poſſit vel, quod perinde eſt, altitudo.

PROBLEMA CXL.

298. *Data diametro Sphæræ & altitudine Cylindri ipſi æqualis; invenire diametrum Cylindri.*

Sit diameter Sphæræ $= d$, altitudo Cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $b : c$; erit ſoliditas Sphæræ $cd^3 : 6b$ (§. 556 *Geom.*), & ſoliditas Cylindri $= acx^2 : 4b$ (§. 541 *Geom.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$
$$4d^3 = 6ax^2$$
$$2d^3 : 3a = x^2$$
$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

reſoluta ſequens ſuppeditat

Theorema: Quadratum diametri Sphæræ eſt ad quadratum diametri Cylindri ipſi æqualis, ut tripla Cylindri altitudo ad diametrum Sphæræ duplam.

PROBLEMA CXLI.

299. *Data diametro Sphæræ* AB; *invenire latus Tetraëdri ipſi inſcribendi* AD. Tab. II Fig. 26

Sit diameter Sphæræ AB $= a$, latus Tetraëdri AD $= x$, erit CD radius circuli, cui unum e triangulis Tetraëdri inſcribi poteſt $= \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}$ (§. 269). Sit AC $= y$, erit CB $= a - y$; conſequenter (§. 327 *Geom.*)

$$AC : CD = CD : CB$$
$$y : \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} : a - y$$
$$ay - y^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$

(§. 417 *Geom.*)

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$x^2 = y^2 + \tfrac{1}{3}x^2$$
$$\tfrac{2}{3}x^2 = y^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = y$$

$$ay - \tfrac{2}{3}x^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$ay = x^2$$
$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = x^2$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = x$$

Eſt ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris Tetraëdri eſt ad quadratum diametri Sphæræ, cui inſcribi poteſt, in ratione ſubſeſquialtera.

COROL-

COROLLARIUM I.

300. Eſt ergo latus Tetraëdri ad diametrum Sphæræ, cui inſcribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$, erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo Tetraëdrum ſphæræ inſcribi, ſi diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque $AC = \frac{2}{3} AB$.

PROBLEMA CXLII.

Tab.II. Fig.28. 302. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Cubi ſeu Hexaëdri ipſi inſcribendi* FG.

Sit diameter Sphæræ, quæ diagonali Cubi FH æquatur, $= a$, latus Cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$, & $FH^2 = 3x^2$; conſequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$$

Theorema. Quadratum lateris Hexaëdri eſt ad quadratum diametri Sphæræ circumſcriptæ in ratione ſubtripla.

COROLLARIUM I.

303. Eſt ergo latus Hexaëdri ad diametrum Sphæræ cui inſcribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$; conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 304. Sit in diametro Sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$, & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{9}a^2}$; conſequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, ſeu latus Hexaëdri.

PROBLEMA CXLIII.

Tab.II. Fig.29. 305. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Octaëdri inſcripti* ML.

Sit $LM = x$, diameter Sphæræ circumſcriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem ſubtendit (§. 342, 475 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{2}{4}bb \text{ ſeu } \frac{1}{2}bb = x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema. Quadratum lateris Octaëdri eſt ad quadratum diametri Sphæræ circumſcriptæ in ratione ſubdupla.

COROLLARIUM I.

306. Eſt ergo latus Octaëdri ML ad diametrum Sphæræ circumſcriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$; adeoque huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

307. Si ex centro Sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, adeoque latus Octaëdri inſcribendi; id quod in ipſo calculo ſuppoſuimus, in futuros tamen uſus ſigillatim enunciandum. Tab.II. Fig.27.

PROBLEMA CXLIV.

308. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Dodecaëdri* AB. Tab.II. Fig.30.

Quoniam puncta A, C, F, H ſunt in Sphæra: planum per ea tranſiens eſt circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a Dodecaëdro demonſtrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter ſe æquantur (§. 475, 106 *Geom.*); AC = CF = HF = HA (§. 179 *Geom.*) adeoque AHFC Quadratum (§. 342 & 98 *Geom.*). Jam cum Pentagona 12 in 36 triangula reſolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonniſi 6 ſubtendat; omnia iſta triangula a ſex quadratis ſubtendantur neceſſe eſt; conſequenter diagonalis AC eſt lateri Hexaëdri ſive Cubi eidem Sphæræ inſcripti æqualis (§. 460 *Geom.*).

Sit latus Dodecaëdri $AB = x$, diameter Sphæræ $= d$, erit $AC = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), conſequenter

Tab.II. *Fig.*30.

$$AC : AB = AB : AC - AB$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \text{ (§.294).}$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}d^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x$.

Æquatio altera hoc ſuppeditat

Theorema. Quadratum diametri Sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris Dodecaëdri & Hexaëdri eidem inſcriptorum in triplum latus Dodecaëdri.

Corollarium I.

309. Si diameter Sphæræ fuerit 1, erit latus Dodecaëdri inſcripti $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; conſequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad $3 - \sqrt{5}$. Eſt ergo diameter Sphæræ lateri Dodecaëdri inſcripti tum in ſe, tum potentia incommenſurabilis.

Corollarium II.

Tab.II. *Fig.*27. 310. Latus Dodecaëdri eſt portio major BG lateris Hexaëdri DB eidem Sphæræ inſcripti media & extrema ratione ſecti in G (§. 258).

Problema CXLV.

Tab.II. *Fig.*31. 311. *Data diametro Sphæræ* HM; *invenire latus Icoſaëdri inſcripti.*

Sit ABCDEA circulus ſubtendens angulum ſolidum Icoſaëdri H; erit latus Icoſaëdri æquale lateri Pentagoni AB huic circulo inſcripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inſcriptum Decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui iſti parallelus & ab eo diſtat intervallo radii Tab.II. CG; erit DN = DC (§. 279). Quodſi *Fig.*31. ergo anguli Pentagonorum lineis tranſverſis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo ſuperiore, quinque ab inferiore ſubtenduntur.

Sit HM $= b$, HC $= x$, GC $= y$. Quoniam GC eſt latus Hexagoni; erit HG latus Decagoni (§. 279) adeoque $= \sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, (§. 275). Habemus ergo

$$2HG + BC = HM \qquad HC^2 = HG^2 + GE^2$$

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b \qquad x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$

h. e. $2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$

$$5y^2 = b^2 \qquad x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2 \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$

ſeu $\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

Conſtructio. Fiat AH $=$ AB $= b$, erit Tab.II. EH $= \sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob EH : *Fig.*27. AH $=$ EK : IK, hoc eſt, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) IK $= b : \sqrt{5}$. Eſt ergo IK radius circuli, cui Pentagonum Icoſaëdri inſcribitur. Porro EI $= b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*) & hinc AI $= \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK $= \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*).

Corollarium I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri Sphæræ eſt in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum ſolidum Icoſaëdri ſubtendentis.

Corollarium II.

313. Liquet etiam, latus Icoſaëdri diametro Sphæræ circumſcriptæ tum in ſe, tum potentia incommenſurabile eſſe.

Scho-

SCHOLION I.

314. *Si diameter Sphæræ fuerit* 100000 *erit* (§. 299, 305, 302, 311, 308) *latus Tetraëdri inſcripti* 81649, *Octaëdri* 70710, *Hexaëdri* 57736, *Icoſaëdri* 52573, *Dodecaëdri* 35682 (a).

SCHOLION II.

315. *Cum ex diametro Sphæræ corporibus regularibus circumſcriptæ invenire poſſimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum ſuperficies, tum ſoliditates eorundem, eaſque tum inter ſe, tum cum Quadrato & Cubo diametri Sphæræ conferre: ſed quoniam hæc doctrina rariſſimi eſt uſus, eam prætermittendam eſſe judicamus.*

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam planam applicata.

PROBLEMA CXLVI.

316. D*atis baſi* HI *trianguli cujuscunque, & angulis ad baſin* H *&* I; *invenire altitudinem.*

Tab.II. Fig.21. n.1. Sit HI $= a$, LM $= x$, ſinus anguli MIL $= s$, ejus coſinus $= c$; ſinus anguli LHM $= p$, ejus coſinus $= q$. Erit (§.33 *Trigon.*) $s : x = c :$ MI & $p : x = q :$ HM. Unde reperitur MI $= cx : s$ & HM $= qx : p$ (§.302 *Arithm.*). Quare (§.87 *Arithm.*).

$$cx : s + qx : p = a \qquad sp$$

$$pcx + sqx = asp \qquad pc + sq$$

$$x = asp : (pc + sq).$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

reſoluta ſequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL baſis HI eſt ad altitudinem ML, ut ſumma rectangulorum ex ſinu anguli obliqui ad baſin unius in coſinum alterius ſe habet ad rectangulum ex ſinibus angulorum ad baſin.

(a) HERIGONIUS *Curſ. Mathem.* Tom. I. p. 779.

Aliter.

Sumatur ML pro ſinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, ſeu cotangentes datorum H & I. Sint ſinus totus $= t$, cotangentes $= m$ & n, LM $= x$, HI $= a$; erit $t : m = x :$ HM, & $t : n = x :$ MI (§. 40 *Trigon.*); conſequenter HM $= mx : t$, MI $= nx : t$, adeoque (§. 87 *Arithm.*). Tab.II. Fig.21. n.1.

$$a = (mx + nx) : t \qquad t$$

$$at = mx + nx \qquad m + n$$

$$at : (m + n) = x$$

Theorema. Baſis trianguli eſt ad altitudinem ut ſumma cotangentium angulorum ad baſin ad ſinum totum.

PROBLEMA CXLVII.

317. *Datis ſumma crurum* HL + LI, *una cum angulis ad baſin* H *&* I; *invenire crura* HL *&* LI.

Sit HL + LI $= a$, ſinus H $= m$, ſinus I $= n$, HL $= x$, erit IL $= a - x$. Quare (§. 33 *Trigon.*).

$x : n$

Tab.II. *Fig.*21. n. 1.

$$x : n = a - x : m$$
$$mx = na - nx$$
$$mx + nx = na$$
$$\text{———————— } m+n \text{ div.}$$
$$x = na : (m+n)$$
$$a - x = (ma + na - na) : (m+n) = ma : (m+n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI eſt ad crus unum HL ut ſumma ſinuum angulorum ad baſin H & I ad ſinum anguli I cruri iſti HL oppoſitum.

PROBLEMA CXLVIII.

318. *Datis angulis ad baſin* H *&* I, *una cum ſegmento baſeos uno* HM; *invenire ſegmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$, ſinus anguli H $= m$, ejus coſinus $= n$; ſinus anguli I $= p$, ejus coſinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro, *vi* § *cit.* $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§. 81 *Arithm.*),

$$px : q = am : n$$
$$\text{———————— } nq$$
$$pnx = amq$$
$$\text{———————— } pn$$
$$x = amq : pn$$

Eſt adeo $pn : mq = a : x$.

Theorema. Si ex vertice trianguli L in baſin HI perpendiculum demittitur; ſegmentum unum HM eſt ad alterum MI ut rectangulum ex ſinu anguli ſegmento MI adjacentis in coſinum anguli ſegmento HM adjacentis ad rectangulum ex ſinu anguli H in coſinum anguli I.

PROBLEMA CXLIX.

Tab.I. *Fig.*3. 319. *Datis area trianguli rectanguli* ABC, *una cum angulo* C; *invenire crura* AB *&* BC.

Sit area $= b^2$ BC $= x$

Sinus totus $= r$, erit BA $= 2b^2 : x$ (§. 394

Tangens anguli C $= t$ *Geom.*)

Tab.I. *Fig.*3.

Quare (§. 40 *Trigon.*)

$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$
$$x^2 : 2b^2 = r : t$$
$$x^2 = 2rb^2 : t$$
$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli eſt ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad ſinum totum.

Tab.II. *Fig.*32.

Conſtructio: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu aſſumto, erit DE $= r$ & FE $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Fiat DG = FE, DH $= b$, & agatur ipſi EG parallela HI: erit DI $= br : t$ (§. 271 *Geom.*). Fiat MI $= 2b$ & quæratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quæ erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN = LI, ducaturque NO ipſi MK parallela, erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, conſequenter KOI, triangulum quæſitum.

Tab. XII. *Fig.* 117.

Aliter. Sit EDA angulus datus. Fiat DA $= 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit ſimul DA $= r$ & AE $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum, & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit AG $= \frac{2br}{t}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat AH = AG, & AI $= \frac{1}{2}$AD $= b$, erit, deſcripto ſuper IH ſemicirculo, AL $= \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$. Fiat denique AB = AL, & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quæſitum.

PROBLEMA CL.

Tab. III. *Fig.*33.

320. *Data ſubtenſa arcus* AB *quadrante minoris, una cum radio circuli* CE; *invenire ſubtenſam* CB *arcus compoſiti ex arcu* AB *& ejus complemento dimidio ad ſemicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF = AB, ducanturque rec-

Tab. III. Fig. 33. rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), & ob paralleliſmum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*) $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arithm.*). Eſt vero etiam, ob CE = EB (§. 40 *Geom.*) $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$; conſequenter CF : CB = CB : CE (§. 267 *Geom.*). Sit jam AB $= a$, CE $= r$, CB $= x$; erit CF $= a + 2r$; conſequenter

$$a + 2r : x = x : r$$
$$ar + 2r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM I.

321. Cum angulus CBD ſit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*); conſequenter BD ſubtenſa dimidii complementi ad ſemicirculum arcus AB $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM II.

322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem ſubtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM III.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ ſimul ſemicirculum ſubtendunt, ſunt inter ſe ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320, 321), hoc eſt, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc eſt, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concurſus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA CLI.

Tab. II. Fig. 34. 324. *Datis in quadrilatero circulo inſcripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC, *una cum diagonali* EC; *invenire diagonalem* AB.

Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $=$ Tab. II. Fig. 34. d, EC $= f$, AB $= y$. Ducatur EF, ita ut ſit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc eſt, $f : d = b :$ BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*), & AEF = CEB (§. 88 *Arithm.*); erit EC (f): CB (c) = EA (a): AF ($ac : f$) (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arithm.*).

$$(bd + ac) : f = y$$
$$bd + ac = fy$$

Theorema. In quadrilatero circulo inſcripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppoſitis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA CLII.

325. *Dato ſinu anguli ſimpli, invenire ſinus & coſinus angulorum multiplorum.*

Sit angulus quicunque A, fiat AB = Tab. III. BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV: erit A = ADB (§. 184 Fig. 35. *Geom.*), EBD = A + ADB (§. 239 *Geom.*) = 2A, *per demonſtr.* Eodem modo oſtenditur, eſſe FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHK A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodſi AB ſumatur pro ſinu toto; erit BC ſinus, AC coſinus anguli ſimpli A; ED ſinus, BE coſinus anguli dupli; FG ſinus, DG coſinus anguli tripli, &c. (§. 2, 11 *Trigon.*).

Sit AB $= r$, BC $= b$, AC $= a$; erit, ob angulum A utrique △△ BAC &

& EAD communem, & rectos ad C & E æquales (*§. 267 Geom.*):

AB : BC = AD : DE

$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$

AB : AC = AD : AE

$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$

Ergo BE = AE — AB = $2a^2 : r — r$ = $(2a^2 — r^2) : r$. Eſt vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo BE = $(2a^2 — a^2 — b^2) : r$ = $(a^2 - b^2) : r$ & AF = AE + EF = $(3a^2 - b^2) : r$.

AB : BC = AF : FG (§. 268 *Geom.*)

$r : b = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3ab^2 - b^3}{r^2}$

AB : AC = AF : AG

$r : a = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$

Ergo DG = AG − AD = $(3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a$ = $(3a^3 — ab^2 — 2ar^2) : r^2$ = (ſubſtituto valore ipſius $r^2 = a^2 + b^2$), $(a^3 — 3ab^2) : r^2$; conſequenter AH = AG + GH = $(4a^3 — 4ab^2) : r^2$

AB : BC = AH : HI

$r : b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3b - 4ab^3}{r^3}$

AB : AC = AH : AI

$r : a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4 - 4a^2b^2}{r^3}$

Quia FA = $(3a^2 - b^2) : r = (3a^2 - b^2) r^2 : r^3$ = $(3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : r^3$ ideo erit FI = AI − AF = $(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorſus modo reperitur

KL = $(5a^4b - 10a^2b^3 + b^5) : r^4$

& HK = $(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$;

MN = $(6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^5) : r^5$

& LN = $(a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$;

PO = $(7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7) : r^6$

& QR = $(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

Si itaque radius ſeu ſinus totus = r, erit ſinus anguli

ſimpli b

dupli $2ba : r$

tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$

quadrupli $(4ba^3 - 4b^3a) : r^3$

quintupli $(5ba^4 - 10b^3a^2 + b^5) : r^4$

ſextupli $(6ba^5 - 20b^3a^3 + 6b^5a) : r^5$

ſeptupli $(7ba^6 - 35b^3a^4 + 21b^5a^2 - b^7) : r^6$

&c.

Hinc patet lex progreſſionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro ſinu anguli multipli ex termino ſecundo, quarto, ſexto, octavo &c. binomii ex coſinu a & ſinu anguli ſimpli b compoſiti ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem eſt cum exponente multipli, ſignis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc formula generalis in caſu indefinito emergit

$$\frac{m}{1.r^{m-1}} ba^{m-1} — \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}} b^3a^{m-3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5.r^{m-1}} b^5a^{m-5} — \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7.r^{m-1}} b^7a^{m-7} \&c.$$

Similiter ſi ſinus totus = r, erit coſinus anguli

ſimpli a

dupli $(a^2 - b^2) : r$

tripli $(a^3 - 3ab^2) : r^2$

quadrupli $(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$

quintupli $(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$

ſextupli $(a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$

ſeptupli $(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

&c.

Unde denuo patet lex progreſſionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio, quinto, ſeptimo, nono &c. binomii ex coſinu a & ſinu anguli ſimpli b compoſiti ad eam

eam dignitatem evecti, cujus exponens eſt idem cum exponente multipli anguli deſiderati, ſignis + & — alternantibus (§. 95). Erit ergo formula generalis in caſu indefinito

$$\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}}b^4a^{m-4} - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}}b^6a^{m-6} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8.r^{m-1}}b^8a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16 *Trig.*) & ipſius b^2 potentiæ ſunt etiam rationales; ſubſtituto hoc valore, ſive in formula generali, ſive in ſpecialibus, prodit coſinus anguli multipli per ſolum coſinum ſimpli & radium determinatus. Ita reperietur coſinus anguli

dupli, $\frac{a^2-b^2}{r} = \frac{a^2-r^2+a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli, $\frac{a^3-3ar^2+3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4-6a^2r^2+6a^4+r^4-2a^2r^2+a^4}{r^3}$

$$= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$$

quint. $\frac{a^5-10a^3r^2+10a^5+5ar^4-10a^3r^2+5a^4}{r^4}$

$$= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a.$$

Similiter ex ſinuum formula excluditur coſinus, ſi valor ipſius $a = \sqrt{(r^2-b^2)}$ ſubſtituitur: quamvis ea non ſit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM

326. Cum ſinus ſit chordæ dimidium (§. 2 *Trigon.*), ſi chorda arcus ſimpli dicatur b, & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per eaſdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per eaſdem formulas arcus per datum numerum multiplicari poteſt.

PROBLEMA CLIII.

327. *Data tangente arcus ſimpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum ſit ut coſinus $\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2}$ + &c. ad ſin. $\frac{m}{r^{m-1}}ba^{m-1} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}}b^3a^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26 *Trigon.*); erit tangens (aſſumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus coſinuum A,B,C,D,E, pro coëfficientibus ſinuum P,Q R,S,T, excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rrb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}} \text{ \&c.}$$

Sit tangens anguli ſimpli t, erit (§. *cit. Trigon.*) $a:b = r:t$, conſequenter $a = br:t$. Quodſi hic valor in locum ipſius a ſubſtituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^mr^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^mr^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^mr^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^mr^{m-6}}{t^{m-7}}}{\frac{b^mr^m}{t^m} - \frac{Ab^mr^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^mr^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^mr^{m-6}}{t^{m-6}}} \text{ \&c.}$$

Quodſi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^mt - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6} \text{ \&c.}$$

Subſtitutis tandem valoribus P,Q,R,S & A,B,C, &c. tangentium formula erit

$$\left(\frac{m}{1}r^mt - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}r^{m-2}t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}r^{m-4}t^5 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}r^{m-6}t^7 \text{ \&c.}\right)$$

$$:\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.2} r^{m-2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3} r^{m-4}t^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.} r^{m-6}t^6 \text{ \&c.}\right)$$

Apparet adeo, ſi binomium ex radio & tangente $r + t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, ſed per radium multiplicatis & utrobique ſignis + atque — alternantibus.

PROBLEMA CLIV.

328. *Data ſecante arcus ſimpli, invenire ſecantem multipli.*

Quoniam ſecans eſt tertia proportionalis ad coſinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) aſſumtis pro coëfficientibus coſinus (excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. ſecans indeterminata.

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6} \text{ \&c.}}$$

Eſt vero $r : b = ſ : t$ (*§. cit. Trig.*): unde eruitur $r = bſ : t$. Hoc valore in formula ſecantis ſubſtituto, mutatur ea in ſequentem:

$$\frac{rb^m ſ^m}{a^m t^m - Ab^2a^{m-2}t^m + Bb^4a^{m-4}t^m \text{ \&c.}}$$

Porro $a : b = r : t$ (*§. cit. Trigon.*), adeoque $a = br : t$. Subſtituto itaque valore ipſius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m ſ^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2} t^2 + Bb^m r^{m-4} t^4 \text{ \&c.}}$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m, determinabitur valor ſecantis indefinitæ ex tangente & ſecante anguli ſimpli

$$\frac{ſ^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 - Cr^{m-7}t^6 \text{ \&c.}}$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Æquationibus altioribus.

PROBLEMA CLV.

329. *Explicare naturam æquationum.*

1. Aſſumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit; formenturque inde ſimplices æquationes, ſed nihilo æquales.
2. Æquationes ſimplices in ſe invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum conſideratio earum proprietates manifeſtabit.

Sit $x = 2$	$x = a$
$x = -3$	$x = -b$
$x = 4$	$x = c$
erit $x - 2 = 0$. I	$x - a = 0$
$x + 3 = 0$. II	$x + b = 0$
$x - 4 = 0$. III	$x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II, & factum denuo per æquationem III.

$x-2$

$$\begin{array}{rl} & x - 2 = 0 \\ & x + 3 = 0 \\ \hline & +3x - 6 \\ x^2 - 2x & \\ \hline x^2 + x - 6 & = 0 \\ x - 4 = 0 & \\ \hline & -4x^2 - 4x + 24 \\ x^3 + x^2 - 6x & \\ \hline x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & x - a = 0 \\ & x + b = 0 \\ \hline & x^2 + bx - ab = 0 \\ & - ax \\ & x - c = 0 \\ \hline & x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\ & + bx^2 + acx \\ & - ax^2 - abx \end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad ſuperiores gradus evehi poſſunt) ſequentia obſervabit.

1. *Quantitatem cognitam ſecundi termini eſſe ſummam radicum, ſed ſigno contrario affectarum; quantitatem cognitam tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis; quantitatem cognitam quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis &c terminum denique ultimum eſſe factum omnium radicum.* Ex gr. in æquatione quadratica termini ſecundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero ſunt $+ 2$ & $- 3$. Similiter in cubica quantitas cognita ſecundi termini $- 3 = + 3 - 4 - 2$. Radices ſunt $- 3$, $+ 4$ & $+ 2$. Quantitas cognita termini tertii in æquatione cubica $- 10 = - 6 + 8 - 12$. Radices ſunt, $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$. In eadem terminus ultimus $+ 24 = 2 . 3 . 4$.

2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimenſiones, ſeu exponens unitates.* Ex. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimenſiones: radices duæ ſunt $+ 2$ & $- 3$. In æquatione cubica x^3 tres habet dimenſiones, radices tres ſunt $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$.

3. *In qualibet æquatione tot eſſe radices veras, quot ſunt ſignorum permutationes; tot eſſe falſas, quot eorundem ſucceſſiones.* Ex. gr. in æquatione quadratica $+ x^2 + x - 6 = 0$, una eſt ſignorum ſucceſſio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+ 2$, alteram falſam $- 3$. In æquatione cubica $+ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ ſunt ſignorum permutationes $+ -$ & $- +$; una ſucceſſio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+ 2$ & $+ 4$, unam falſam $- 3$.

SCHOLION I.

330. *Theoremata duo priora ex ipſa æquationum geneſi haud difficulter demonſtrantur: tertium vero, quod* HARRIOTUS *per inductionem invenit, nemo hactenus demonſtrare potuit.*

SCHOLION II.

331. *Ceterum non eſt, quod miremur, unam æquationem multas habere poſſe radices. Unius enim ejuſdemque Problematis varii eſſe poſſunt caſus & in ſingulis caſibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis ſupra habuimus (§. 269, 262). Quoniam tamen caſus quidam interdum impoſſibiles ſunt; radices quoque impoſſibiles eſſe debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falſas & falſæ in veras, ſi ſigna terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falſam; ſed ſi ſcribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ ſunt ſignorum ſucceſſiones $+ +$ & $- -$, una vero permutatio $+ -$; adeoque æquatio duas radices falſas, veram unam habet.

Problema CLVI.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda eſt æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

$$\begin{array}{l} \text{Fiat } x + 3 = y \\ \text{erit } x = y - 3 \\ x^2 = y^2 - 6y + 9 \\ \hline x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 = -6y^2 + 36y - 54 \\ +13x = \qquad +13y - 39 \\ -10 = \qquad\qquad -10 \\ \hline 0 = y^3 - 15y^2 + 76y - 130 \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

$$\begin{array}{l} \text{Fiat } y - 2 = x \\ \text{erit } y = x + 2 \\ y^2 = x^2 + 4x + 4 \\ \hline y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ -15y^2 = -15x^2 - 60x - 60 \\ +76y = \qquad +76x + 152 \\ -130 = \qquad\qquad -130 \\ \hline 0 = x^3 - 9x^2 + 28x - 30 \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

Corollarium I.

334. Quodſi radicem augeas quantitate radice falſa maxima majore, radices falſæ evadunt veræ; & contra ſi radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falſæ. Si enim $y = -4$, & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra ſi $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falſas mutentur.

Corollarium II.

335. Dum radices veræ augentur, falſæ minuuntur. Nam ſi $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $= 4 - 5 = -1$. Similiter ſi fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $= -5 - 2 = -7$.

Problema CLVII.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit ex. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

$$\begin{array}{l} \text{Fiat } ax = y \\ \text{erit } x = y : a \\ x^2 = y^2 : a^2 \\ \hline x^3 = y^3 : a^3 \\ +px^2 = +py^2 : a^2 \\ +qx = +qy : a \\ -r = -r \\ \hline \dfrac{y^3}{a^3} + \dfrac{py^2}{a^2} + \dfrac{qy}{a}\, r = 0 \\ \hline y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0 \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$!

Corollarium I.

337. Hinc manifeſtum eſt, æquationem datam tantum multiplicari debere per progreſſionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas per quam radix multiplicari jubetur. Sit ex. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$\begin{array}{llllll} x^4 + & 4x^3 - & 19x^2 - & 106x - & 120 = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline y^4 + & 8y^3 - & 76y^2 - & 848y - & 1920 = 0 \end{array}$$

En

En æquationem, in qua $y = 2x$!

Similiter ſit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$x^3 * - 3x + 1 = 0$$
$$\underline{1 \quad 3 \quad 9 \quad 27}$$
$$y^3 * - 27y + 27 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 3x$!

SCHOLION.

338. *Stellula repleri ſolent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA CLVIII.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

Fiat $x : a = y$

erit
$$x = ay$$
$$x^2 = a^2y^2$$
$$x^3 = a^3y^3$$
$$-px^2 = -a^2py^2$$
$$+ qx = + aqy$$
$$- r = - r$$
$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$
$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a$!

COROLLARIUM.

340. Apparet adeo, non alia re opus eſſe, quam ut æquatio data dividatur per progreſſionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit ex.gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
$$\underline{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16}$$
$$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter ſi radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$x^3 * - 36x - 54 = 0$$
$$\underline{1 \quad 3 \quad 9 \quad 27}$$
$$y^3 * - 4y - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA CLIX.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda eſt quantitate data.

Sit e.gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit
$$x = y - 1$$
$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = \qquad - 23y + 23$$
$$- 70 = \qquad - 70$$
$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

342. *Idem Problema ſolvi poteſt radicem æquationis quantitate data minuendo: ſed cum hac ratione metuendum ſit, ne radices veræ in falſas mutentur (§. 334) conſultius eſt, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA CLX.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus ſecundus terminus px^2.

Fiat

Fiat $x+t=y$

erit $x=y-t$

$x^2=y^2-2ty+t^2$

$x^3=y^3-3ty^2+3t^2y-t^3$

$\mp px^2=\mp py^2\pm 2pty\mp pt^2$

$-qx= \quad -qy+qt$

$+r= \quad +r$

Ut ſecundus terminus tollatur, ſi fuerit $-px^2$ fieri debet,

$-3t-p=0$

Unde erit $-3t=p$

$t=-\frac{1}{3}p$

Quodſi fuerit $+px^2$, erit

$-3t+p=0$

$-3t=-p$

$t=+\frac{1}{3}p$

Et in genere, ſi fuerit $x^m\mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x=y-t$, erit

$x^m=y^m-mty^{m-1}$ &c.

$\mp px^{m-1}=\mp py^{m-1}$ &c.

conſequenter in caſu primo

$-mt-p=0$

$-mt=p$

$t=-p:m$

in caſu autem altero

$-mt+p=0$

$-mt=-p$

$t=p:m$

Unde patet

Regula: Si terminus ſecundus ſit poſitivus, augeatur; ſi privativus, minuatur radix quantitate cognita ſecundi termini per exponentem primi diviſa.

Sit ex. gr. ex æquatione $x^3-8x^2-x+8=0$ tollendus ſecundus terminus.

Fiat $x-8:3=y$

erit $x=y+8:3$

$x^2=y^2+16y:3+64:9$

$x^3=y^3+8y^2+64y:3+512:27$

$-8x^2=-8y^2-128y:3-512:9$

$-x= \quad -y-8:3$

$8= \quad +8$

$y^3 * -67y:3-880:27=0$

In hac æquatione $y=x-8:3$.

COROLLARIUM I.

344. Quodſi ex æquatione quadratica affecta ſecundus terminus aufertur, ad puram reducitur, ſicque ea alio adhuc modo reſolvi poteſt. Si ex. gr. $x^2-8x+15=0$.

Fiat $x-4=y$

erit $x=y+4$

$x^2=y^2+8y+16$

$-8x=-8y-32$

$+15= \quad +15$

$y^2-1=0$

$y=1$

Conſequenter $x=1+4=5$.

COROLLARIUM II.

345. Secundo termino ſublato, æquationes cubicæ ad tres caſus reducuntur. Nimirum

$x^3 * -px-r=0$

$x^3 * +px-r=0$

$x^3 * -px+r=0$

PRO-

PROBLEMA CLXI.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

$$\begin{aligned}
\text{erit } x^2 &= y^2 - 2my + m^2 \\
x^3 &= y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3 \\
-4x^2 &= -4y^2 + 8my - 4m^2 \\
+4x &= +4y - 4m \\
-6 &= -6
\end{aligned}$$

Quoniam æquatio ſiniſtra dextræ æqualis; ſi tertius terminus deficere debet, talis aſſumendus eſt valor ipſius m, ut ſit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

$$\text{erit ergo } m^2 + \tfrac{8}{3}m = -\tfrac{4}{3}$$

$$\tfrac{16}{9} \qquad \tfrac{16}{9}$$

$$m^2 + \tfrac{8}{3}m + \tfrac{16}{9} = \tfrac{4}{9}$$

$$m + \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}$$

$$m = -\tfrac{2}{3}$$

$$\text{Fiat ergo } x = y + \tfrac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{erit } x^2 &= y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{4}{9} \\
x^3 &= y^3 + 2y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{8}{27} \\
-4x^2 &= -4y^2 - \tfrac{16}{3}y - \tfrac{16}{9} \\
+4x &= +4y + \tfrac{8}{3} \\
-6 &= -6
\end{aligned}$$

$$y^3 - 2y^2 * - 130 : 27 = 0.$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \tfrac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque caſibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA CLXII.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, ſi ſecundus deficiat.*

Pro quantitate incognita ſubſtituendus eſt terminus ultimus per y diviſus.

Sit ex. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $-3x$. Operatio talis erit

$$\begin{aligned}
x^3 &= \frac{1}{y^3} \\
-3x &= -\frac{3}{y} \\
+1 &= +1
\end{aligned}$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PROBLEMA CLXIII.

349. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \tfrac{67}{3}y - \tfrac{880}{27} = 0$$

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$

$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA CLXIV.

350. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri poteſt per multiplicationem: interdum per diviſionem radicis. Neutra tamen regula univerſalis eſt.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipſam; ſi vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis ſub ſigno radicali tollendæ poſitæ, aut in genere per radicem ejuſdem gradus, quæ tolli debet, ſed ex quantitate ſub ſigno radicali tollendæ poſita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumſtantiæ ſingulares aliud ſuadent.

Exempla.

$$\begin{array}{ccccc} x^4 & +2ax^3\sqrt{2} & +8abx^2 & -a^3x\sqrt{8} & -2a^2b^2 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{8} & 4 \\ \hline y^4 & +4ay^3 & +16aby^2 & -8a^3y & -8a^2b^2 = 0. \end{array}$$

In hac æquatione $y = a\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -ax^2\sqrt[3]{2} & +abx\sqrt[3]{32} & -aab = 0 \\ 1 & \sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{16} & 4 \\ \hline y^3 & -2ay^2 & +8aby & -4aab = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Diviſio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -3x^2\sqrt{3} & * & -6\sqrt{3} = 0 \\ 1. & \sqrt{3}. & 3. & 3\sqrt{3} \\ \hline y^3 & -3y^2 & * & -2 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x:\sqrt{3}$

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -ax^2\sqrt[3]{2} & +abx\sqrt[3]{32} & -a^2b = 0 \\ 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 2 \\ \hline y^3 & -ay^2 & +2aby & -\tfrac{1}{2}a^2b = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x:\sqrt[3]{2}$.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -x^2\sqrt{2} & +3\tfrac{1}{2}x & -3\sqrt{2} = 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ \hline y^3 & -y^2 & +\tfrac{7}{4}y & -\tfrac{3}{2} = 0 \end{array}$$

Quodſi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$\begin{array}{cccc} y^3 & -y^2 & +\tfrac{7}{4}y & -\tfrac{3}{2} = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline z^3 & -2z^2 & +7z & -12 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x:\sqrt{2}$.

PROBLEMA CLXV.

351. *Invenire utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne; &, ſi quas habet, quænam eæ ſint.*

Cum æquationis terminus ultimus ſit factum omnium radicum (§. 329), reſolvatur is in ſuos factores, & hi ſucceſſive ſubſtituantur pro x in æquatione data: in quibus enim caſibus numeri poſitivi & negativi ſe mutuo deſtruunt, in iis factor ſubſtitutus eſt valor ipſius x.

Sit ex. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 4 \\ -6x & = & -12 \\ +8 & = & +8 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 16 \\ -6x & = & -24 \\ +8 & = & +8 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 ſunt 1, 3, 5.

Subſtituatur 1 pro x; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 1 \\ -3x^2 & = & -3 \\ -13x & = & -13 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt

Eſt ergo 1 una ex radicibus veris. Subſtituatur porro 3 pro x; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 27 \\ -3x^2 & = & -27 \\ -13x & = & -39 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & -24 \end{array}$$

Eſt ergo 3 nulla ex radicibus veris. Subſtituatur ergo -3 pro x.

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & -27 \\ -3x^2 & = & -27 \\ -13x & = & +39 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt itaque -3 radix falſa æquationis. Subſtituatur denique 5 pro x; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 125 \\ -3x^2 & = & -75 \\ -13x & = & -65 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compoſitæ ex multiplicatione ſimplicium oriantur (§. 329); ſi radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per ſimplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam diviſibilis ſit neceſſe eſt. Quare diviſio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes ſimplices conflantur $x-1=0$, $x+1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-4=0$, $x+4=0$; $x-6=0$, $x+6=0$; $x-8=0$, $x+8=0$; $x-12=0$, $x+12=0$. Diviſio fruſtra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falſa eſt, nec verarum una: ſuccedit autem diviſio per $x-2$.

$$\begin{array}{r} x-2)\; x^3 - 3x^2 - 10x + 24\;(x^2 - x - 12 \\ x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline -x^2 - 10x \qquad\qquad \\ -x^2 + 2x \qquad\qquad \\ \hline -12x + 24 \qquad \\ -12x + 24 \qquad \\ \hline 0 \qquad\qquad \end{array}$$

Eſt adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus ſit 12 in quotiente, 8 & 12 non ſunt in numero radicum. Diviſio æquationis quadraticæ $x^2 - x - 12 = 0$ per $x-3$ fruſtra tentatur; ſed per $x+3$ ſuccedit.

$$\begin{array}{r} x+3)\; x^2 - x - 12\;(x - 4 \\ x^2 + 3x \qquad\qquad \\ \hline -4x - 12 \qquad \\ -4x - 12 \qquad \\ \hline 0 \qquad\qquad \end{array}$$

Eſt ergo 3 radix falſa æquationis &, ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter ſit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5; conſequenter diviſores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur diviſio per $x-1$.

$$\begin{array}{r} x-1)\; x^3 - 3x^2 - 13x + 15\;(x^2 - 2x - 15 \\ x^3 - x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline -2x^2 - 13x \qquad\qquad \\ -2x^2 + 2x \qquad\qquad \\ \hline -15x + 15 \qquad \\ -15x + 15 \qquad \\ \hline 0 \qquad\qquad \end{array}$$

Eſt ergo 1 radicum verarum una. Diviſio in æquatione quadratica per $x-3$ non ſuccedit: ſuccedit tamen per $x+3$.

$$\begin{array}{r|l} x+3) & x^2 - 2x - 15 \;(x - 5 \\ & x^2 + 3x \\ \hline & -5x - 15 \\ & -5x - 15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt itaque *3* radix falſa, & ob $x-5 = 0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifeſtum eſt, Problema præſens hanc quoque admittere ſolutionem:

1. Numerus, quem radicem eſſe ſuſpicamur, ſubducendus eſt ex coëfficiente ſecundi termini.
2. Reſiduum multiplicandum eſt per illum ipſum numerum, & factum ex coëfficiente termini tertii ſubtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini quarti ſubtrahatur, & ita porro.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -10x & +24 = 0 \\ & -2 & +2 & +24 \\ \hline & -1 & -12 & 0 \\ -2 & \overline{} & \overline{} & \\ & +2 & +24 & \end{array}$$

Quoniam 0 relinquitur, 2 eſt una radicum verarum.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & -1 & +2 & +15 \\ \hline & -2 & -15 & 0 \\ -1 & \overline{} & \overline{} & \\ & +2 & +15 & \end{array}$$

Eſt ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium inveſtigatio moleſta accidat, conſultum eſt, ut vel æquationem propoſitam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus diviſores pauciores habet, vel duos numeros inveſtigemus, intra quos radices continentur: quem in finem ſequentia ſubnectimus Problemata.*

PROBLEMA CLXVI.

354. *Æquationem propoſitam, in qua terminus ultimus plures admittit diviſores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores diviſores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$; vel $x=2$, vel $x=-2$; vel $x=3$, vel $x=-3$; vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. &, his valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, obſervetur, quo in caſu ſumma relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda eſt, vel minuenda (§. 333).

Sit ex. gr. $x^3 - 3x^2 - 10x^2 + 24 = 0$

$$\begin{array}{rcr} \text{Fiat } x & = & 1 \\ \hline \text{erit } x^3 & = & 1 \\ -3x^2 & = & -3 \\ -10x & = & -10 \\ +24 & = & +24 \\ \hline \text{Summa} & = & +12 \end{array}$$

Cum 12 pauciores diviſores admittat quam 24;

Fiat $x = y + 1$
erit $x^2 = y^2 + 2y + 1$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 & = & - 3y^2 - 6y - 3 \\ -10x & = & - 10y - 10 \\ +24 & = & + 24 \\ \hline & & y^3 \quad * \quad - 13y + 22 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione eſt $y = x - 1$.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio* $y^3 * - 13y + 13 = 0$ *habet radicem falſam* -4. *Si enim hunc valorem pro* y *ſubſtituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur adeo* -3 *radix falſa æquationis propoſitæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; *prorſus ut ſupra* (§. 351).

PROBLEMA CLXVII.

356. *Invenire limites æquationis, hoc eſt, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arithm.*).

$x < q : p$ (§. 182 *Arithm.*).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arithm.*).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246, 180 *Arith.*)

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 *Arithm.*).

$px \quad px$ add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arithm.*)

adeoque $(\sqrt{q} + p)\, x > q$ (§. 89 *Arith.*)

$x > q : (\sqrt{q} + p)$ (§. 182 *Arithm.*).

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor eſſe debet quam $q : p$ & major quam $q : (\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$.

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q poſitiva, erit

$px > q$

$x > q : p$

Sunt adeo limites æquationis p & $q : p$. Nempe radix minor eſt quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$

hoc eſt, $px + q < px + x\sqrt{q}$

adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2 + q)}$. Nimirum radix minor eſſe debet quam $p + \sqrt{q}$; ſed major quam $\sqrt{(p^2 + q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r : q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt adeo limites $r : q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3 + qx = r$

$qx < r$

$x < r : q$

Similiter $r > x^3$

$r^{1:3} > x$

$r^{2:3} > x^2$

$xr^{2:3} > x^3$

$xr^{2:3} + qx > x^3 + qx$
$> r$

$x > r : (r^{2:3} + q)$

Sunt adeo limites $r : q$, & $r : (r^{2:3} + q)$,

Sit $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

erit $x^3 - px^2 = r - qx$

Quodſi ergo $x > p$, erit quoque $r > qx$, conſequenter $x < r : q$. Sed ſi $p > x$; erit $qx > r$, conſequenter $x > r : q$.

In utroque igitur caſu limites ſunt p & $r : q$.

Sit $x^3 - px^2 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = px^2 + qx$

$px^2 + qx > r$

$x^2 + qx : p > r : p$

$x^2 + qx : p + q^2 : 4p^2 > r : p + q^2 : 4p^2$

$x^2 + q : 2p > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)}$

$x > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)} - q : 2p$

Similiter $px^2 + qx > x^3$

$px + q > x^2$

$q > x^2 - px$

$q + \frac{1}{4}p^2 > x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} > x - \frac{1}{2}p$

$x < \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$

Sunt adeo limites $\sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)} - q : 2p$ & $\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$.

Sit $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$

erit $x^4 - qx^2 = rx + s$

Ergo $x^4 > qx^2$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

Similiter $x^4 - rx = qx^2 + s$

ergo $x^3 > r$

$x > r^{1:3}$

Tandem $x^4 - s = qx^2 + rx$

Ergo $x^4 > s$

$x > s^{1:4}$

$x^3 > s^{3:4}$

$x^3 s^{1:4} > s$

Similiter $x > q^{1:2}$ $x > r^{1:3}$

$xq^{1:2} > q$ $x^2 > r^{2:3}$

$x^3 q^{1:2} > qx^2$ $x^2 r^{1:3} > r$

$x^3 r^{1:3} > rx$

Ergo ob $x^4 = qx^2 + rx + s$

$x^4 < x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$

$x < q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ vel $s^{1:4}$, & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum eſt in caſibus aliis.

SCHOLION.

357. *In æquatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *factores termini ultimi ſunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3} + \frac{25}{9})} - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3} = \frac{98 - 50}{30} = \frac{48}{30} = 1\frac{3}{5}$ *fere, &* $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non poteſt eſſe minor quam* $1\frac{3}{5}$ *debet tamen eſſe minor quam* 5. *Unde apparet diviſionem tentandam eſſe per* $x - 2$.

Quo

Quo facto reperitur $x = 2$ *& æquatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$, *& falſa* $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (§. 143).

PROBLEMA CLXVIII.

358. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, ſublato ſecundo termino, ad hos tres caſus reducuntur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$px = py + pz$

Quamobrem in caſu primo

$$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$$

Fiat $3y^2z + 3z^2y = +py + pz$

$(y+z)$

erit $3yz = p$

$3y$

$$z = p : 3y$$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$

hoc eſt $y^3 + p^3 : 27y^3 = q^3$

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$
$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$
$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$
$$\left.\begin{array}{l} y^3 - \tfrac{1}{2}q \\ \tfrac{1}{2}q - y^3 \end{array}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y = (\tfrac{1}{2}q \pm)\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}))^{1:3}$$

Eſt nempe $y = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})}$ & $z = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y + z = x =$
$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in caſu altero $\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in caſu tertio $x = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})}$.

Ex. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6, q = 40$, adeoque $\tfrac{1}{2}q = 20$, $\tfrac{1}{4}q^2 = 400$, $\tfrac{1}{3}p = 2$, $\tfrac{1}{27}p^3 = 8$; conſequenter $\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)} = \sqrt{392} = \sqrt{2.196} = 14\sqrt{2}$. Unde $\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)} = 20 \pm 14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} = 2 \pm \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3, q = 36$, adeoque $\tfrac{1}{2}q = 18$, $\tfrac{1}{4}q^2 = 324$, $\tfrac{1}{3}p = 1$, $\tfrac{1}{27}p^3 = 1$, conſequenter $\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 = 325 = \tfrac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)} = 10\sqrt{\tfrac{13}{4}} = \tfrac{40}{4}\sqrt{3\tfrac{1}{4}}$. Unde $\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)} = 18 \pm \tfrac{40}{4}\sqrt{3\tfrac{1}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{3\tfrac{1}{4}}$. Quare per regulam ſecundam $x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{3\tfrac{1}{4}} + \tfrac{3}{2} - \sqrt{3\tfrac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, eodem modo, quo in caſu primo, reperitur $\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} = -2 + \sqrt{2}$, adeoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20 \pm \sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 Arithm.): *ut tamen appareat quomodo radix inveniri poſſit, ſi regulæ communes com-*

commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis caſibus ſimilibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica (§. 358) Cardani *regulas vocat* Cartesius (*a*), *quia eas primus publicavit: ipſe enim* Cardanus *inventionis laudem* Scipioni Ferreo *tribuit.*

Problema CLXIX.

360. *Extrahere radicem deſideratam ex quantitate irrationali compoſita.*

Sit ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam eſſe $x+\sqrt{y}$, erit $x^2+2x\sqrt{y}+y=3+\sqrt{8}$.

Fiat $x^2+y=3$ $\quad 2x\sqrt{y}=\sqrt{8}$

erit $x^4+2x^2y+y^2=9$ $\quad 4x^2y=8$

$$4x^2y=8$$

$$x^4-2x^2y+y^2=1$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=1$$

$$x^2=y+1$$

Eſt vero etiam, ob $x^2+y=3$, $x^2=3-y$

Quare $3-y=y+1$

$$3=2y+1$$

$$2=2y$$

$$1=y$$

Ergo $x^2=y+1=2$

$$x=\sqrt{2}$$

Eſt ergo $x+\sqrt{y}=\sqrt{(3+\sqrt{8})}=1+\sqrt{2}$.

Sit ſimiliter in Problemate præcedente ex $20+\sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem eſſe $x+\sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=20+\sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{392}$

erit $9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$

Porro $x^3+3xy=20$

$$x^6+6x^4y+9x^2y^2=400$$

$$9x^4y+6x^2y^2+y^3=392 \text{ ſubt.}$$

$$x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=8$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=2$$

$$x^2-2=y$$

Subſtituto valore ipſius y in æquatione:

$$x^3+3xy=20$$

erit $x^3+3x^3-6x=20$

hoc eſt $4x^3-6x=20$

$$x^3 * -\tfrac{6}{4}x=5$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\text{§. } 337).$$

$$z^3 * -6z=40$$

Si pro z ſubſtituatur 4; erit $64-24=40$. Eſt ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351); conſequenter $x=z:2=2$. Quare cum ſit

$$x^2-2=y$$

erit $4-2=y$

$$2=y$$

Eſt ergo radix cubica ex $20+\sqrt{392}$ extracta $2+\sqrt{2}$.

Eodem modo operandum eſt in caſibus aliis.

Problema CLXX.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua ſecundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4+qx^2+rx+ſ=0$, ubi retinetur in omnibus terminis ſignum +, ut omnes caſus repræ-

(*a*) *Geom.* Lib. II. p. m. 93, & 94.

repræſententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); aſſumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in ſe invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 * + zx^2 + yvx + vz &= 0 \\ + vx^2 - yzx & \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem ſupponitur cum propoſita; erit

$$z + v - y^2 = q \qquad yv - yz = r \qquad vz = ſ$$
$$q + y^2 = z + v \qquad v - z = r:y$$
$$q + y^2 - v = z \qquad v - q - y^2 + v = r:y$$
$$2v = q + y^2 + r:y$$
$$v = (q + y^2 + r:y):2$$

Subſtituatur valor ipſius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$$q + y^2 - (q + y^2 + r:y):2 = z$$

hoc eſt $z = (2q + 2y^2 - q - y^2 - r:y):2$
$= (q + y^2 - r:y):2.$

Ergo $vz = \frac{(q + y^2 + r:y)}{2}\frac{(q + y^2 - r:y)}{2}$

$$= \frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2:y^2}{4} = ſ$$
$$\overline{}\ 4y^2$$
$$q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2 = 4ſy^2$$
$$y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 = 0$$
$$- 4ſy^2$$

Fiat $y^2 = t$, erit

$$t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0.$$
$$- 4ſt$$

PROBLEMA CLXXI.

362. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, ex. gr. *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. I. $x^4 = a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$; & hinc denuo educatur radix quadrata : reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{\sqrt{2}}$.

II. Si æquatio fuerit affecta,

1. Tollatur ſecundus terminus, ſi adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data, ex æquationibus quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propoſitæ erui poſſunt.

Ex. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $ſ = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, ſit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$:
$- 4ſt$
ſi in ea ſubſtituantur valores quantitatum q, r, $ſ$, prodibit

$$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$$

Hæc æquatio cum ſit per $t - 100$ diviſibilis (§. 351); erit $t = 100$, adeoque in Problemate præcedente $y^2 = 100$ & hinc $y = 10$.

Hoc valore ſubſtituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r:y}{2} = z$; reperitur z

$$= \frac{-86 + 100 - 600:10}{2} = -\frac{46}{2} = -23.$$

Eodem valore ipſius y ſubſtituto in æquatione $v = \left(\frac{q + y^2 + r:y}{2}\right)$; invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600:10}{2} = \frac{74}{2}$ $= 37$. Tandem valores quantitatum y, z & v

& v ſubſtituendi ſunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus:

I. $x^3 + 10x - 23 = 0.$

$$x^2 + 10x = 23$$
$$\quad 25 \quad 25$$
$$x^2 + 10x + 25 = 48$$
$$x + 5 = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$
$$x = \pm 4\sqrt{3} - 5$$

II. $x^2 - 10x^2 + 37 = 0$

$$x^2 - 10x^2 = -37$$
$$\quad 25 \quad 25$$
$$x^2 - 10x + 25 = -12$$
$$\left.\begin{matrix} x - 5 = \\ 5 - x = \end{matrix}\right\} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$
$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt ergo radices æquationis propoſitæ $4\sqrt{3} - 5$, $-4\sqrt{3} - 5$, $5 + 2\sqrt{-3}$ & $5 - 2\sqrt{-3}$

PROBLEMA CLXXII.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices ſurdæ extrahi poſſint (§. 143), nec difficile ſit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, univerſalis eſt, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, conſultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, ſive $x < 10 +$ & $> 7 +$ (§. 354): ponamus radicem eſſe $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus aſſumtus 8 radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2 = \quad 64 + 16y + y^2$$
$$-5x = -40 - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decreſcunt, & radix tantum deſideratur prope vera, y^2 abjiciatur: quo facto, erit

$$-7 + 11y = 0$$
$$y = \tfrac{7}{11} = \tfrac{6}{10} \text{ fere}, = 0.6$$

Ergo $x = 8 + 0.6 = 8.6$

Ponamus $x = 8.6 + y$: erit

$$x^2 = \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + y^2$$
$$-5x = -\tfrac{430}{10} - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$\tfrac{7396}{100} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0$$

hoc eſt, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum ſemel hic exhibere placuit)

$$7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$
$$-0.04 + 12.20y = 0$$
$$12.20y = 0.04$$
$$y = 004 : 1220 = 0.0032$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032.$

Ponamus $x = 8.6032 + y$, erit

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -4.301600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -3.100000000$$
$$-0.000094976 + 12.20640000y = 0$$
$$y = 0000094976 : 1220640000$$
$$= 0.000077808.$$

Ergo

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.000077808 = 8.603277808$.

Sit ſimiliter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem eſſe $5 + y$ [numerus 5 aſſumitur vi limitum æquationis (§. 354)]: quoniam termini, in quibus eſt y^2 & y^3, omittuntur; non opus eſt, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 + 75y \ldots \\ +2x^2 &= 50 + 20y \ldots \\ -23x &= -115 - 23y \\ -70 &= -70 \\ \hline -10 &+ 72y = 0 \\ \hline y &= \tfrac{10}{72} = 0.1 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \ldots \\ +2x^2 &= 52.020 + 20.400y \\ -23x &= -117.300 - 23.000y \\ -70 &= -70.000 \\ \hline -2.629 &+ 75.430y = 0 \\ \hline 75.430y &= 2.629 \\ \hline y &= 2629 : 75430 = 0.0348 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quouſque libuerit.

Nec difficile eſt eadem methodo regulam generalem inveſtigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus eſſe $x = t + y$; erit

$$\begin{aligned} x^m &= t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} y^2 \ldots \\ +ax^{m-1} &= at^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2}y + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3}y^2 \ldots \\ +bx^{m-2} &= bt^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3}y + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4}y^2 \ldots \\ +cx^{m-3} &= ct^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4}y + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5}y^2 \ldots \\ &\text{\&c. \&c.} \\ +f &= +f \end{aligned}$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$

$mt^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4}$ &c. $= q$

$\frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5}$ &c. $= r$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimenſiones aſcendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis ſpecialibus

$$\begin{aligned} p + qy &= 0 \\ \hline \text{erit } qy &= -p \\ \hline y &= -p : q \end{aligned}$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi inſtauratione opus eſt, qua in exemplis ſpecialibus paulo ante uſi ſumus.

Quodſi vero regula deſideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$ $(q+ry$

$y=-p:(q+ry)$

Sed $y=-p:q$, per regulam priorem.

Ergo $y=-p:(q-\frac{pr}{q})=-pq:(q^2-pr)$.

Vel quia $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$

$qy:r+y^2=-p:r$

$q^2:4r^2+qy:r+y^2=q^2:4r^2-p:r$

$q:2r+y=\surd(\frac{1}{4}q^2-pr):r$

Habetur adeo x, ſi valor ipſius y adjiciatur valori t, ſigno vel poſitivo, vel privativo, prout repertus fuerit.

Scholion.

364. *Duas regulas poſteriores methodo ab hac diverſa inveſtigavit celeberrimus* Halleius (*a*), *& eaſdem aliquot exemplis illuſtravit. Quamvis vero uſus earum ex ante allatis exemplis manifeſtus eſſe videatur; non inconſultum tamen judicamus ut unum apponamus.*

Sit $x^3+\underset{a}{438}x^2-\underset{b}{7825}x-\underset{f}{98508430}=0$.

Fiat $x=t+y=300+y$; erit

$x^3=27000000+270000y+900y^2+y^3$
$+ax^2=39420000+262800y+438y^2$
$-bx=-2347500-7825y$
$-f=-98508430$

$0=-34435930+524975y+1338y^2$

Eſt itaque $p=-34435930$, adeoque $-p=34435930$, $q=524975$, $r=1338$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=34435930:(524975+46075274340:524975)=34435930:612741=56$, conſequenter $x=300+56=356$.

Fiat jam $x=356+y$; erit

$x^3=45118016+380208y+1068y^2+y^3$
$+ax^2=55510368+311856y+438y^2$
$-bx=-2785700-7825y$
$-f=-98508430$

$0=-665746+684239y+1506y^2$.

Eſt itaque $p=-665746$, $q=684239$, $r=1506$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=665746:(684239+1002613476:684239)=6657460:685704=0.9708$, conſequenter $x=356+0.9708=356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri poteſt, quia rationali accuratior. Poſſunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, ſi operatio continuetur.

Corollarium.

365. Sit $x^m-f=0$ & fiat $x=t+y$; erit $x^m-f=t^m+mt^{m-1}y+\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde ſi fiat $t^m+mt^{m-1}y-f=0$, erit $y=(f-t^m):mt^{m-1}$, quæ eſt regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior deſideretur, fiat ut ante $t^m=p$, $mt^{m-1}=q$, $\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}=r$; reperietur ut in problemate $y=-p:(q-pr:q)$. Unde apparet eandem regulam inſervire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

Problema CLXXIII.

366. *Ex ſerie infinita radicem extrahere.*

Sit $v=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5$ &c.

Fiat $x=hv+iv^2+kv^3+lv^4+mv^5+nv^6$ &c. erit (§. 95),

$x^2=h^2v^2+2hiv^3+i^2v^4+2ikv^5+k^2v^6$
$+2hkv^4+2hlv^5+2ilv^6$
$+2hmv^6$

$x^3=h^3v^3+3h^2iv^4+3hi^2v^5+i^3v^6$
$+3h^2kv^5+3h^2lv^6$
$+6hikv^6$

$x^4=h^4v^4+4h^3iv^5+6h^2i^2v^6$
$+4h^3kv$

(*a*) In Tranſact. Anglican. n. 210. p. 136.

$x^5 = \qquad h^5v^5 + 5h^4iv^6$
$x^6 = \qquad h^6v^6$

Subſtituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -v + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-v =$	$-v$						
$+ax =$	$+ahv$	$+aiv^2$	$+akv^3$	$+alv^4$	$+amv^5$	$+anv^6$	&c.
$+bx^2 =$		$+bh^2..$	$+2bhi..$	$+bi^2..$ $+2bhk..$	$+2bik..$ $+2bhl..$	$+bk^2..$ $+2bil..$ $+2bhm..$	
$+cx^3 =$			$+ch^3..$	$+3ch^2i..$	$+3chi^2..$ $+3ch^2k..$	$+ci^3..$ $+3ch^2l..$ $+6chik..$	
$+dx^4 =$				$+dh^4..$	$+4dh^3i..$	$+6dh^2i^2..$ $+4dh^3k..$	
$+ex^5 =$					$+eh^5..$	$+5eh^4i..$	
$+fx^6 =$						$+fh^6..$	

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v ſubducitur ex altero æquationis membro ipſi æquali; omnes terminos v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6 &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coëfficiens nihilo æqualis, erit

$$ah - 1 = 0 \qquad ai + bh^2 = 0$$
$$h = 1 : a \qquad i = -bh^2 : a$$
$$i = -b : a^3$$

$$ak + 2bhi + ch^3 = 0$$
$$k = (-2bhi - ch^3) : a$$
$$k = (+2b^2 - ac) : a^5$$

$$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$$
$$l = (-bi^2 - 2bhk - 3ch^2i - dh^4) : a$$

conſequenter ob

$$bi^2 = b^3 : a^6,\ 2bhk = (4b^3 - 2abc) : a^6$$
$$3ch^2i = -3bc : a^5 \qquad dh^4 = d : a^4$$
$$l = -b^3 : a^7 - 4b^3 : a^7 + 2abc : a^7 + 3bc : a^6 - d : a^5$$
$$l = (5abc - 5b^3 - a^2d) : a^7$$

$$am + 2bik + 2bhl + 3chi^2 + 3ch^2k + 4dh^3i + eh^5 = 0$$

Ergo ob

$$2bik = (-4b^4 + 2ab^2c) : a^8,\ 4dh^3i = -4bd : a^6$$
$$2bhl = (10ab^2c - 10b^4 - 2a^2bd) : a^8 \qquad eh^5 = e : a^5$$
$$3chi^2 = 3b^2c : a^7 \qquad 3ch^2k = (6b^2c - 3ac^2) : a^7$$
$$m = (14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e) : a^9$$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc^2 - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f) : a^{11}$, & ita porro.

Quodſi tandem in æquatione aſſumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h, i, k, l, m, n &c. ſubſtituantur, prodibit radix quæſita

$$x = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a^3}v^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5$$

&c. in infinit.

CAPUT VI.

De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

DEFINITIO XX.

367. PEr *Geometriam Sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & ſolidis inde genitis tractat.

DEFINITIO XXI.

Tab. III. Fig. 36. 368. *Diameter* curvæ eſt recta AD rectas MM inter ſe parallelas bifariam ſecans in P. In ſpecie *Axis* vocatur, ſi rectas æquidiſtantes ad angulos rectos ſecet.

DEFINITIO XXII.

369. *Vertex curvæ* eſt punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO XXIII.

Tab. III. Fig. 36. 370. *Ordinatim applicatæ* ſunt lineæ æquidiſtantes MM, quæ a diametro bifariam ſecantur. Earum dimidiæ PM vocantur *Semiordinatæ*. Vocantur etiam Tab. V. Fig. 60. *Semiordinatæ* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AT poſitione datam ductæ, ac inter ſe parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Tab. III. Fig. 36. 371. *Abſciſſa* AP eſt pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & ſemiordinatam PM intercepta. Quidam *ſagittam* vocant.

SCHOLION.

372. *Abſciſſæ nimirum a quovis puncto in linea poſitione data computari poſſunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex ſubſequentibus patebit.*

DEFINITIO XXV.

373. *Diameter tranſverſa* AB eſt recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra eaſdem æquidiſtantes MM bifariam ſecat. Tab. III. Fig. 37.

DEFINITIO XXVI.

374. *Diameter conjugata* eſt recta, quæ alteri diametro æquidiſtantes bifariam ſecat.

DEFINITIO XXVII.

375. *Quantitates variabiles* ſunt, quæ, creſcentibus aliis vel decreſcentibus, aut creſcunt aut decreſcunt. Tab. III. Fig. 38.

Ex. gr. ſemiordinata PM & abſciſſa AP circuli ſunt quantitates variabiles: una enim creſcente, creſcit etiam altera.

Quantitates conſtantes ſunt, quæ, creſcentibus aliis vel decreſcentibus, eædem manent.

Ita ſemidiameter circuli AC eſt quantitas conſtans: creſcentibus enim abſciſſis & ſemiordinatis AP & PM ſemper eadem manet.

HYPOTHESIS VIII.

376. *Quantitates conſtantes primis alphabeti literis indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abſciſſam*, y *ſemiordinatam denotet, niſi aliud expreſſe moneatur.*

DEFINITIO XXVIII.

377. *Curva algebraica* eſt, in qua relatio abſciſſarum AP ad ſemiordinatas per æquationem algebraicam explicari poteſt. Sit ex. gr. in circulo Tab. III. Fig. 36.

AB

Tab. III. Fig. 38. AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit PB $= a - x$, conſequenter ob $PM^2 =$ AP. PB (§. 327, 377 *Geom.*) $y^2 = ax - x^2$. Vel ſit PC $= x$, AC $= a$, PM $= y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc eſt, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION I.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati ſunt gradus, ita ut æquatio ſemper eadem maneat in ſingulis punctis curvæ.*

SCHOLION II.

379. *Vulgo cum* CARTESIO (*a*) *lineas algebraicas* geometricas *vocant, quod eas tantum ad conſtruenda Problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus ſummis in re Geometrica arbitris* LEIBNITIO *atque* NEWTONO (*b*).

DEFINITIO XXIX.

380. *Curva tranſcendens* eſt, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ tranſcendentes ab aliis,* CARTESII *exemplo, dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur; aliter ſentientibus viris ſummis* LEIBNITIO *atque* NEWTONO. *Invenit quoque* LEIBNITIUS *novum æquationum tranſcendentium genus, quibus curvæ tranſcendentes definiuntur, & quæ ſunt gradus indefiniti, hoc eſt, non conſtanter eædem in omnibus curvæ punctis* (*c*).

DEFINITIO XXX.

382. *Curvæ algebraicæ ejuſdem generis* ſunt, quarum æquationes ad eandem dimenſionem aſſurgunt. Cum vero ſola æquatio, quæ rectam definit, unius dimenſionis eſſe poſſit; *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimenſiones aſſurgit; ſi ad tres, *curva ſecundi generis*; ſi ad quatuor, *curva tertii generis*, &c.

Ex. gr. æquatio pro circulo eſt $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Eſt ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis eſt, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva ſecundi generis eſt, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO XXXI.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diverſi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, ſed pro diverſitate generis diverſimode explicandi, definiuntur.

Ex. gr. ſit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; ſi $m = 4$, erit $a^3x = y^4$, &c. in infinitum. Omnes iſtæ curvæ dicuntur ejuſdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum tranſcendentibus non ſunt confundendæ. Licet enim, intuitu totius familiæ, ſint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ reſpectu, gradum determinatum habent: cum æquationes tranſcendentes, reſpectu ejuſdem curvæ, indefiniti gradus exiſtant* (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis conſtantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes per quas curvæ definiuntur, ingre-

(*a*) *Geom.* Lib. 2. p. m. 17. & ſeq.
(*b*) *Act. Erudit. Lipſ.* A. 1708. p. 516.
(*c*) *Act. Erudit. Lipſ.* A. 1684. p. 234. 235.

ingrediantur facta vel ex potentiis abſciſſarum & ſemiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abſciſſarum in potentias ſemiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis; omnes vero æquationes nihilo æquales fieri poſſint (e. gr. ſi $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum + in omnibus terminis retinetur, quia in caſibus ſingularibus infinitæ variationes occurrere poſſunt. Et, ſi plures potentiæ ejuſdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x, occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b, explicatur per omnes ejus coëfficientes, & exponens dignitatis, v. gr. n, per omnes dignitatum exponentes.

Definitio XXXII.

386. *Sectiones conicæ* ſunt lineæ curvæ, quæ ex coni ſectione oriuntur.

Scholion.

387. *Sectiones conicæ præter Circulum ſunt tres*, Parabola, Hyperbola *&* Ellipſis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ ſcilicet frequentioris ſunt uſus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus; quia nobis propoſitum eſt, Algebræ ad Geometriam Subliminiorem applicationem exemplis docere; licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonſtrari, ſi in ſolido, ſeu in cono ex quo ſecantur, conſiderentur.*

Definitio XXXIII.

388. *Parabola* eſt curva, in qua $ax = y^2$; hoc eſt, quadratum ſemiordinatæ æquatur rectangulo ex abſciſſa in rectam conſtantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

Scholion.

389. *Hanc proprietatem Parabolæ competere aſſumimus reſpectu axis: quod vero etiam ipſi competere debeat reſpectu cujuslibet diametri, inferius demonſtrabitur.*

Corollarium I.

390. Eſt ergo Parabola curva primi generis, & creſcentibus abſciſſis creſcunt ſemiordinatæ; conſequenter curva in ſe non redit.

Corollarium II.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc eſt, abſciſſa eſt tertia proportionalis ad parametrum & ſemiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abſciſſam & ſemiordinatam.

Corollarium III.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc eſt, ſemiordinata eſt media proportionalis inter parametrum & abſciſſam.

Corollarium IV.

393. Data itaque parametro AB deſcribi poteſt Parabola. Continuetur enim parameter AB in C, & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum aſſumtis, circino uſque ad A aperto, ducantur arcus rectam BV in I, II, III, IV, V, &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5, &c. interſecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5, &c. abſciſſæ; BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. ſemiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare ſi lineæ B1, B2, B3, &c. ex recta BC in BN transferantur, & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII, &c. curva per puncta I, II, III &c. tranſiens Parabola eſt: BN vero ejus axis (§. 392). Elegantius Parabola deſcribitur, ſi ſumto AX pro axe Parabolæ & puncto A pro vertice, fiat AB parametro æqualis, & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos ſecet, deſcribantur pro arbitrio circuli quotcunque tranſeuntes per B & axem ſecantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abſciſſæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3, &c. ſemiordinatæ Parabolæ (§. 327 *Geom.*). Tab. III. *Fig.* 39. Tab. XII. *Fig.* 118.

Corol-

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 39. 394. Quodlibet etiam punctum Parabolæ geometrice determinari poteſt. Ex. gr. quæritur, utrum punctum M ſit in Parabola, necne? Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM, & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN deſcribatur ſemicirculus. Quodſi enim is tranſeat per M; erit punctum M in Parabola (§. 327 *Geom.* & §. 392 *Analyſ.*).

DEFINITIO XXXIV.

Tab. III. Fig. 40. 395. *Focus* eſt punctum axis F, in quo ſemiordinata FN æquatur ſemiparametro.

PROBLEMA CLXXIV.

396. *Invenire diſtantiam Foci a vertice* AF.

Sit $AF = x$, parameter $= a$, erit $FN = \frac{1}{2}a$ (§. 395); conſequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\S. 388)$$
$$\text{———————— } a \text{ div.}$$
$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In Parabola diſtantia foci a vertice AF eſt ad parametrum in ratione ſubquadrupla, ſeu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388): quadratum ſemiordinatæ PM eſt quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam $\frac{1}{4}ax$, ſive AF. AP.

COROLLARIUM II.

398. Invenitur adeo diſtantia foci a vertice AF, ſi ad abſciſſam quamcunque AP & dimidiam ſemiordinatam $\frac{1}{2}$PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Eſt enim $\frac{1}{4}PM^2 = AP.\ AF$ (§. 377 *Geom.*); conſequenter $PM^2 = 4\,AF.\ AP$.

PROBLEMA CLXXV.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem ſemiordinatæ* M *ductæ.*

Sit $AP = x$. Quoniam $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396) erit $PF = x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, ſi AF > PA; conſequenter Tab. III. Fig. 40.

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = \quad ax \quad (\S. 388)$$
$$\text{————————————}$$
$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 417\ \textit{Geom.})$$
$$\text{————————————}$$
$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem ſemiordinatæ Parabolæ ducta æquatur aggregato ex abſciſſa AP & diſtantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in *f* & F transfertur, & per AD parallelæ quotcunque, ipſi in punctis P normales, MM aguntur, tandemque ex F intervallo P*f* puncta M determinantur; curva per hæc puncta tranſiens eſt Parabola. Tab. III. Fig. 41.

COROLLARIUM II.

401. Poteſt ergo Parabola etiam continuo motu deſcribi. Nimirum aſſumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB ſecans axem *f*D ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero ſui extremo in foco F fixum, quod ſit = AD + AF. Quodſi ſtylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorſum & dein ſiniſtrorſum promoveatur; ſtylus Parabolam deſignabit. Eſt enim conſtanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$; conſequenter punctum M in Parabola (§. 399).

PROBLEMA CLXXVI.

402. *Invenire rationem ſemiordinatarum in Parabola.*

Sint abſciſſæ x & v, ſemiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388); conſequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \quad (\text{§. } 124)$$

$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut abſciſſæ: ipſæ autem ſemiordinatæ in ratione ſubduplicata abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXVII.

Tab. III. Fig. 40. 403. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum ſemiordinatarum* PM + *pm in differentiam earundem* R*m.*

$$pm + \text{PM} = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad (\text{§. } 292)$$

$$m\text{R} = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$(\text{PM} + pm)m\text{R} = av - ax = a(v - x)$$

$$= a.\ \text{P}p$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum ſemiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abſciſſarum.

COROLLARIUM.

404. Eſt ergo parameter ad ſummam duarum ſemiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abſciſſarum. (§. 299 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXVIII.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſemiordinata in abſciſſam.*

Tab. III. Fig. 40. Quoniam $\text{PM} = \sqrt{ax}$ (§. 392); erit $\text{PM}.\ \text{AP} = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare cum ſit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc eſt, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124) hoc eſt $a : \text{PM} = \text{PM}.\ \text{AP} : \text{AP}^2$.

Theorema. In Parabola eſt rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ad quadratum abſciſſæ ut parameter ad ſemiordinatam.

PROBLEMA CLXXIX.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una $= x$, altera $= v$; ſemiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), conſequenter $xv = y^2z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In Parabola quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXX.

407. *Determinare quantitatem chordæ* AM. Tab. III. Fig. 41

Sit parameter $= a$, $\text{AP} = x$, erit $\text{PM}^2 = ax$ (§. 388). Quare cum $\text{AP}^2 = x^2$; erit $\text{AM}^2 = ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x)x = (a + \text{AP}).\ \text{AP}$.

Theorema. In Parabola chorda eſt media proportionalis inter abſciſſam & compoſitam ex parametro & abſciſſa.

DEFINITIO XXXV.

408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & ſemiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter ſemiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit. Tab. III. Fig. 42

COROLLARIUM.

409. Eſt adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*); adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329, 267 *Geom.*), PR : PM = PM : PT, & PM : PT = MR : TM, hoc eſt, in omni curva ſubnormalis eſt tertia proportionalis ad ſubtangentem & ſemiordinatam, & normalis eſt ad tangentem ut ſemiordinata ad ſubtangentem.

PRO-

PROBLEMA CLXXXI.

Tab. III. Fig. 42. 410. *Determinare quantitatem ſubtangentis* PT *& ſubnormalis* PR *in Parabola.*

Sit AP $= x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, RA $= v$, erit PR $= v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc eſt

$$\begin{aligned} x^2 - 2vx + v^2 &= 0 \\ + ax - t^2 & \end{aligned}$$

Eadem æquatio provenit, ſi recta TM Parabolam ſecet, & quidem ad utrumque ſectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abſciſſis per x deſignatis. Quare ſi fiat $x = z$ ſeu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem eſſe debet; conſequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\frac{1}{2}a = v - x = PR$$

Porro (§. 409) PR : PM = PM : PT

hoc eſt, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : PT$

Ergo $PT = ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema. In Parabola ſubtangens PT eſt abſciſſæ AP dupla; ſubnormalis vero PR parametri ſubdupla, adeoque conſtans.

COROLLARIUM I.

411. Quoniam TA $= x$, & diſtantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit TF $= \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 399); conſequenter TFM triangulum æquicrurum.

COROLLARIUM II.

412. Quoniam PA $= x$, & AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit PF $= x - \frac{1}{4}a$; conſequenter cum ſit PR $= \frac{1}{2}a$ (§. 410), FR $= x + \frac{1}{2}a$, adeoque FR = FM (§. 399) = TF (§. 411). Circulus igitur, ex foco Parabolæ F per punctum ejus M ductus, ſubtangentem PT & ſubnormalem PR determinat; conſequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM. Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM III.

413. Quodſi MN ducatur parallela axi AR, erit angulus NMT = FTM (§. 233 *Geom.*). Cumque ſit TF = FM (§. 411); erit FTM = FMT (§. 184 *Geom.*); conſequenter FMT = NMT (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXXII.

414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela; determinare rationem ſegmentorum* HF *&* FN. Tab. III. Fig. 43.

Sit AP = AT (§. 410) $= x$, parameter $= a$, erit PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392), PT = IO (ob TO = MF = PI, (§. 257 *Geom.*) $= 2x$ (§. 410). Sit MF = PI $= v$, erit TI $= v + 2x$, IA $= v + x$. Sit denique IQ = FG $= t$, erit OQ = OI + IQ $= 2x + t$, QA $= x + v + t$, & hinc $QN^2 = ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

OI : IF = OQ : QN

hoc eſt, $OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$ (§. 124)

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : QN^2$$

$$4x : a = (2x + t)^2 : \frac{a(2x + t)^2}{4x}$$

Eſt itaq; $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

 Quod-

Tab. III. *Fig.* 43. Quodſi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$; reliquis manentibus iiſdem. Unde patet, eſſe LI = IQ. Eſt vero (§. 268 *Geom.*). OH:OL = HN:LQ & OH : OL = HF: LI, adeoque HN : HF = LQ : LI (§. 167, 173 *Arithm.*). Sed LI = $\frac{1}{2}$ LQ = IQ, *per demonſtrata.* Ergo HF = $\frac{1}{2}$ HN = FN (§. 149. *Arith.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam ſecat in F.

Corollarium I.

415. Eſt ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abſciſſa (§. 368, 370, 371).

Corollarium II.

416. Quoniam anguli recti ad G & I *per conſtr.* æquales ſunt (§. 145 *Geom.*) & ob paralleliſmum rectarum FG & OQ *per conſtruct.* anguli F & O in △△ FNG & OFI æquales ſunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$OI : FI = FG : GN$$
$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$ erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x)\,v$. Jam cum FM = v, & x reſpectu puncti M conſtans; $a + 4x$ eſt parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abſciſſam.

Corollarium III.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta eſt $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri eſt rectæ illius quadrupla.

Problema CLXXXIII.

Tab. XII. *Fig.* 119. 418. *Si* TM *Parabolam tangit in* M *&* MR *fuerit ad eam normalis, & ex foco* F *ducatur recta* FM *atque* FO *ad* TM *normalis; demittatur etiam ex* R *ad rectam* FM *normalis* RH; *determinare quantitatem ſegmentorum* MH *&* FH, *itemque rectæ* OF.

Sit parameter a, AP = x, erit FM $= \frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR $= \frac{1}{2}a$, & TP $= 2x$ (§. 410). Cum TFM ſit triangulum æquicrurum (§. 411), erit TO = OM (§. 184 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. *cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388); conſequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ ſubductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\,\frac{1}{4}a$ (§. 417 *Geom.*). Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)\,a$. Jam cum in Triang. OFM & HMR anguli ad O & H recti *per hypoth.* ſint inter ſe æquales (§. 145 *Geom.*), & ob paralleliſmum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*), anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$FM : OF = MR : MH$$

adeoq; $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)

$$(\tfrac{1}{4}a + x)^2 : (\tfrac{1}{4}a + x)\tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2$$
$$\tfrac{1}{4}a + x : \tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)\,a : MH^2 \quad (\text{§. } 124)$$
$$1 : \tfrac{1}{4}a = a : MH^2 \quad (\text{§. } cit.)$$

$$MH^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$MH = \tfrac{1}{2}a = PR$$

Ergo HF = FM − HM $= x - \frac{1}{4}a$ = FP.

Theorema 1. Recta OF ex foco Parabolæ F ad tangentem TM ducta eſt media proportionalis inter quartam partem parametri & rectam FM ex foco F ad punctum Parabolæ M ductam.

Theorema

Tab. XII. *Fig.* 119. *Theorema* 2. Si MR fuerit ad Parabolam in puncto M normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Parabolæ punctum M ductam normalis RH; erit MH ſubnormali PR & HF portioni axis inter focum F & ſemiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA CLXXXIV.

Tab. III. *Fig.* 42. 419. *Invenire æquationem ad Parabolam externam; hoc eſt, punctis Parabolæ M ad rectam AO, quæ ad axem AR in vertice A perpendicularis, relatis.*

Sit abſciſſa AN $=x$, ſemiordinata NM $=y$, parameter $=a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendiculares ad AR; erit AN ipſi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM ſit parallela ipſi AR; erit AN $=$ PM & NM $=$ AP (§. 257 *Geom.*); conſequenter PM $=x$, AP $=y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO XXXVI.

Tab. III. *Fig.* 44. 420. *Ellipſis* eſt linea curva, in qua quadratum ſemiordinatæ PM eſt ad rectangulum ex ſegmentis axis AP & PB ut parameter ad axem; hoc eſt, ſi AB $=a$, parameter $=b$, PM $=y$, AP $=x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.

COROLLARIUM I.

421. Eſt ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc eſt, quadratum ſemiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abſciſſam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abſciſſa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abſciſſam.

COROLLARIUM II.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, conſequenter $a = x$. Patet adeo curvam ſecare AB in A & B, conſequenter in ſe redire. Tab. III. *Fig.* 44.

COROLLARIUM III.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2 b : 4a = \frac{1}{4}ab$; conſequenter $y =$ CD $= \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo DE $= 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc eſt, axis minor ED eſt medius proportionalis inter majorem AB & parametrum; conſequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

Invenitur ergo axis, parametro, abſciſſa & ſemiordinata datis; ſi fiat, 1° $b : y = y : \frac{y^2}{b}$ 2° $x - \frac{y^2}{b}$ ſeu $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : a$. Nimirum ſit axis AB poſitione datus, & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abſciſſa AP & ſemiordinata PM, fiat AN $=$ AQ $=$ PM; ducta NF ipſi LQ parallela, erit AF $= y^2 : b$, conſequenter FP $= x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque AH $=$ FP & AG $=$ AP, ducatur GB ipſi HP parallela: erit AB $= bx^2 : (bx - y^2)$; adeoque axis quæſitus. Tab. XII. *Fig.* 120.

COROLLARIUM V.

425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$ Tab. IV. *Fig.* 45.

erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$;

conſequenter 1° $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2° $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$. Datis ergo axe AB, abſciſſa AP & ſemiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1°. Fiat AI $=$ PM, & ex A per M ducatur recta AL. 2°. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 *Geom.*) ob AP : PM $=$ AI : LI; LI $= y^2 : x$. 3°. Producatur PM in O, donec PO $=$ LI $= y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4°. In A excitetur per-

Tab. IV. Fig. 45. perpendicularis AG = [ob BP : PO = BA : GA] $ay^2 : (ax - x^2)$: quæ erit parameter AG.

COROLLARIUM VI.

426. $y = \sqrt{(\frac{abx - bxx}{a})} = \sqrt{(\frac{bx}{a}(a - x))}$.

Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abſciſſæ BP ſemiordinata PN aſſignatur, ſi parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB, & erecta perpendiculari PN, fiat PL = PH, tandemque ſuper AL ſemicirculus deſcribatur. Eſt enim AB (a) : AG (b) = BP (x) : PH $(bx : a)$, & PN = $\sqrt{}$(AP. PL) = $\sqrt{}$(AP. PH) = $\sqrt{((a - x) \times (bx : a))} = \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$.

PROBLEMA CLXXXV.

Tab. III. Fig. 44. 427. *Invenire diſtantiam foci a vertice* AF.

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AF $= x$, erit FR $= \frac{1}{2} b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4} ab^2 = abx - bx^2 \quad (\text{§. } 420)$$

$$\frac{1}{4} ab = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4} ab$$
$$\frac{1}{4} a^2 \qquad \frac{1}{4} a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab$$

$$\frac{1}{2} a - x = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$$

$$\frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b)} = x$$

Conſtructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens ſemicirculo ſuper AL deſcripto in K, erit CK $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$. Fiat itaque CF = CK; erit in F focus.

Tab. IV. Fig. 46. *Aliter.* Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4} ab}$ = CD, (§. 423) ſi intervallo DF $= \frac{1}{2} a$ interſecetur AB in F, erit in F focus. Nam CD² $= \frac{1}{4} ab$ & DF² $= \frac{1}{4} a^2$. Ergo CF $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$, ut ante.

Æquatio ſecunda ſequens ſuppeditat

Theorema. Si axis AB in foco F ſecetur; erit rectangulum ex ſegmentis axis AF. FB ſubquadruplum rectanguli ex parametro in axem, ſeu quadrato axis dimidii minoris CD æquale. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM.

428. Diſtantia foci a centro eſt = $\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$, hoc eſt quadratum ejus eſt differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA CLXXXVI.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM *&* pm *in Ellipſi.*

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\text{§. } 421).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

ſeu PM² : pm^2 = AP. BP : Ap. pB

Theorema. In Ellipſi quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM I.

430. Eſt igitur etiam DC² : PM² = CB² : AP. PB, conſequenter DC² : CB² = PM² : AP. PB (§. 173 *Arithm.*), hoc eſt, quadratum axis minoris eſt ad quadratum majoris ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex axis ſegmentis.

COROLLARIUM II.

431. Sit CP $= x$; erit AP $= \frac{1}{2} a - x$, & PB $= \frac{1}{2} a + x$; conſequenter AP. PB $= \frac{1}{4} a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4} ab : \frac{1}{4} a^2 = y^2 : \frac{1}{4} a^2 - xx$$

hoc eſt $b : a =$

$$ay^2 = \frac{1}{4} a^2 b - bx^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4} ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam Ellipſis definit, abſciſſis a centro C computatis.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. III. Fig. 44. 432. Sit CD $= d$, AC $= r$, PC $= x$; erit AP $= r - x$ & PB $= r + x$; conſequenter AP. PB $= r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus ergo, ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde

$$r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$

$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem Ellipſis naturam definit, abſciſſis denuo a centro C computatis, & qua in ſubſequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM IV.

433. Creſcentibus adeo abſciſſis x, ſemiordinatæ decreſcere debent. Quodſi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$; conſequenter $y^2 = 0$, adeoque Ellipſis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, Ellipſin eſſe lineam in ſe redeuntem.

PROBLEMA CLXXXVII.

Tab. IV. Fig. 46. 434. *Determinare quantitatem rectarum* FM *&* fM *ex utroque foco* F *&* f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint FC $= f$C $= c$, reliqua ut ante: erit PC $= \frac{1}{2}a - x$, P$f = c + \frac{1}{2}a - x$, PF $= c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque PF$^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$, $= (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$; P$f^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Eſt vero (§. 430),

$$CB^2 : DC^2 = AP.\,PB : PM^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$

$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$ Tab. IV. Fig. 46.

$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$

$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipſis faciliime deſcribitur. Determinatis enim focis F & f (§. 427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodſi immiſſo ſtylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipſis deſignabitur.

COROLLARIUM II.

436. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum Ellipſeos M. Axis enim AB dividatur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f deſcribuntur arcus: duo enim hi arcus ſe mutuo ſecabunt in puncto M. Poſſunt autem una eademque opera quatuor ſimul determinari puncta, ſingula nempe in ſingulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PROBLEMA CLXXXVIII.

437. *Determinare quantitatem rectæ* MR *ex quovis Ellipſis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.* Tab. III. Fig. 44.

Sit MR $=$ PC $= v$, AC $= r$; erit AP $= r - v$, & PB $= r + v$. Sit DR $= z$, DC $= c$; erit RC $=$ PM $= c - z$; conſequenter (§. 430)

DC^2:

Tab. III. *Fig.*44.

$$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$$
$$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$$
$$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2 \ (\text{§.173 } Arith.)$$
$$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2 \ (\text{§.193 } Arithm.)$$
$$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2 \ (\text{§.173 } Arithm.)$$
$$DR.RE : RM^2 = DC^2 : AC^2.$$

Theorema. Rectangulum ex ſegmentis axis conjugati eſt ad quadratum ſemiordinatæ ipſius, ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

Corollarium I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

Corollarium II.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§.437); ſi fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Eſt adeo p parameter axis conjugati (§.420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, ſeu ad axem conjugatum & axem majorem.

Problema CLXXXIX.

Tab. IV. *Fig.*47. 440. *Determinare ſubtangentem* PT *& ſubnormalem* PR *in Ellipſi.*

Eadem prorſus methodo utendum, qua in Parabola uſi ſumus. Nimirum ſit parameter $= b$, axis major $= a$, AP $= x$, PM $= y$, MR $= t$, RA $= z$; erit PR $= z - x$, conſequenter PM$^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Eſt vero etiam PM$^2 = bx - bx^2 : a$ (§.421). Quare

$$t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a$$
$$at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2$$
$$ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0$$
$$x^2 + \frac{ab - 2az}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0$$

Cum ex ſuperioribus conſtet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut ſupra (§.410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, æquatio eadem cum anteriore, conſequenter Tab. IV. *Fig.*47.

$$(ab - 2az) : (a - b) = -2v$$
$$ab - 2az = -2av + 2bv$$
$$ab + 2av - 2bv = 2az$$
$$\tfrac{1}{2}b + v - bv : a = z$$

Eſt vero $v = x$, *per hypoth.* Quare ſi x pro v ſubſtituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a =$ AR. Ergo PR $= \frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$, quæ expreſſio hanc ſuppeditat analogiam:

$$a : b = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Theorema. In Ellipſi eſt ut axis primus ad parametrum, ita diſtantia ſemiordinatæ a centro ad ſubnormalem.

Porro $PR : PM = PM : PT$ (§.409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Eſt vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§.420). Ergo PT $= (abx - bx^2) : (\frac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$. Habemus adeo

$$\tfrac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$$
$$PC : AP = PB : PT$$

Ergo $PB.AP = CP.PT$

Theorema. In Ellipſi rectangulum ex ſegmentis axis æquatur rectangulo ex diſtantia ſemiordinatæ a centro in ſubtangentem.

Tandem AT $=$ PT $-$ AP $= (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - x : \tfrac{1}{2}a = x : AT$$
$$PC : AC = AP : AT$$

Theo-

Tab. IV. Fig. 47. *Theorema.* Ut diſtantia ſemiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abſciſſa ad portionem ſubtangentis inter verticem Ellipſis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 173 *Arithm.*); conſequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. 190 *Arithm.*), hoc eſt, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM II.

442. Eſt ergo $AC^2 = PC. CT$ (§. 377 *Geom.*), hoc eſt quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

COROLLARIUM III.

443. Creſcentibus abſciſſis x, decreſcit $\frac{1}{2}a - x$; conſequenter ratio $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arithm.*). Abſciſſa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor (§. 440).

COROLLARIUM IV.

444. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, quando AC fit abſciſſa, $\frac{1}{2}a - x = 0$; conſequenter abſciſſa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum ſubtangente TP nunquam concurrit. Eſt igitur axi parallela.

COROLLARIUM V.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC reſpectu infinitæ pro nihilo habendam eſſe.

PROBLEMA CXC.

446. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſubtangente* PT *in abſciſſam* CP.

Sit $PC = x$, $PT = t$, $AC = r$; erit $AP = r - x$, & $PB = r + x$, $CT = t + x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$

$$x : r = r : t + x$$

erit $tx + xx = r^2$

$$tx = r^2 - x^2 = AP. PB$$

Theorema. Rectangulum ex ſubtangente PT in abſciſſam CP æquatur rectangulo ex ſegmentis axis. Tab. IV. Fig. 47.

PROBLEMA CXCI.

447. *Determinare valorem ſubtangentis* PT, *abſciſſis a centro computatis.*

Sit $AC = r$, $PC = v$, erit $PB = r + v$, $AP = r - v$; conſequenter (§. 440)

$$PC : PB = AP : PT$$

$$v : r + v = r - v : t$$

$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema. Rectangulum ex ſubtangente & diſtantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus diſtantiæ a quadrato ſemiaxis tranſverſi.

PROBLEMA CXCII.

448. *Determinare quantitatem ſubtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 226 *Geom.*), erit ob paralleliſmum rectarum KM & CT (§. 256) angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*). conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$

$$\frac{r^2 - v^2}{v} : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodſi fiat $DC = c$, $DK = z$, erit $KC = PM = y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 437). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$, & $v^2 y (= 2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expreſſio itaque ſubtangentis in axe conjugato eadem, quæ in tranſverſo (§. 440).

PROBLEMA CXCIII.

Tab. IV. Fig. 48. 449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur, & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ ſecat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG & GN.

Sit AB $=a$, PM $=y$, PC $=c$, FG $=$ KD $=t$, GI $=$ KS $=z$, erit IF $=$ HL $=$ DS $=t-z$, HL$^2 = t^2-2tx+z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Eſt itaque (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$
$$y : c = t : (tc : y)$$

Et quia △ TMP ∽ FOG (§. 233 & 267 *Geom.*), & GIH ∽ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam TMP ∽ GIH; conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$
$$y : \frac{ax-x^2}{c} = z : \frac{(ax-x^2)z}{cy} \text{ (§. 440)}$$

Ponamus brevitatis gratia $ax-x^2 = v$; erit FL $=$ HI $= vz : cy$. Ergo CL $=$ FL $+$ FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL $=$ AC $-$ CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2+vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ & BL $=$ AB $-$ AL $= a - (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Eſt vero (§. 429)

$$AP.\ PB : LA.\ LB = PM^2 : HL^2$$
$$x^2 : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc HL$^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2 = t^2c^2v - 2tc^2vz + z^2c^2v$$
$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2 = t^2c^2v + z^2c^2v$$
$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v = v^2z^2 + c^2vz^2$$
$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^2 - t^2c^2v}{v^2+c^2v} = z^2$$

Quodſi jam KN dicatur z, reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2+c^2v}$, conſequenter KN$^2 =$ KS^2, adeoque & KN $=$ KS. Tab. IV. Fig. 48.

Eſt vero (§. 268 *Geom.*) KN : KS $=$ GN : HG. Ergo GN $=$ HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum Ellipſis C tranſiens eam bifariam ſecat.

COROLLARIUM I.

450. Eſt ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368, 370). Tab. IV. Fig. 49.

COROLLARIUM II.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam ſubſtituere liceat; omnes rectæ per centrum tranſeuntes & in peripheria utrinque terminatæ ſunt diametri, ipſiſque coordinatæ ſunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM III.

452. Eſt ergo etiam ECV ordinatæ HN parallela & per centrum C tranſiens diameter, conſequenter MQ & EV ſunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA CXCIV.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit CA $=r$, CR $=v$, PT $=t$, PC $=x$; erit AR $=r-v$, RB $=r+v$; conſequenter AP. PB $=tx$ (§. 446), AR. RB $=r^2-v^2 = tx+x^2-v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipſi TM parallela, *per hypoth.* erit MTC $=$ TCV (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R ſint recti,

per

Tab. IV. *Fig.* 49. *per conſtruct.* erit (§. 267 *Geom.*), PM : RV = TP : RC. Hinc $PM^2 : RV^2 = TP^2 : RC^2$ (§. 124). Eſt vero etiam $PM^2 : RV^2 = AP.PB : AR.RB$ (§. 429). Ergo (§. 167 *Arithm.*)

$$AP.PB : AR.RB = TP^2 : RC^2$$
$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$
$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2$$
$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$
$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2$$
$$v^2 = tx$$

hoc eſt, $CR^2 = AP.PB$.
conſequenter AP : CR = CR : PB.

PROBLEMA CXCV.

454. *Determinare quantitatem ſemiordinatæ* GH *ad diametrum Ellipſis* MQ.

Ductis KI ipſi FD & KG ipſi AB parallelis, fiat $CP = x$, $AC = r$, $PT = t$, $PM = y$, $KG = IL = m$, $LC = n$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$
$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per conſtr.* ang. TSI = KHG (§. 233 *Geom.*) adeoque ob rectos ad I & K *per conſtr.* T = HGK (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*).

$$TP : PM = KG : KH$$
$$t : y = m : \frac{my}{t}$$
$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$
$$CI = CL + LI = n + m$$
$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$
$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

$AI.IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. 432).

Eſt vero (§. 429)

$$AP.PB : AI.IB = PM^2 : HI^2$$
$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

y^2

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

x^2

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} \quad - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$
$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc eſt, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446)

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$
$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$
$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$
$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$
$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2.$$

Sit jam $CM = v$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : CM = CL : CG$$
$$x : v = n : (vn : x)$$

Ergo $MG = MC - CG = v - vn : x$, & GQ = GC

Tab. IV. *Fig.* 49. $=GC+MC=v+vn:x$, MG. GQ $=v^2-v^2n^2:x^2$

Quodſi $v^2-v^2n^2:x^2=$ MG.GQ multiplices per $r^2-x^2=CR^2$ (§.453) & $r^2+n^2-x^2-r^2n^2:x^2=KG^2$ per $v^2=CM^2$; utrobique prodit $r^2v^2+n^2v^2-x^2v^2-r^2n^2v^2:x^2$. Eſt itaque MG. QG. $CR^2=KG^2$. CM^2, adeoque (§.299 *Arithm.*) $KG^2:CR^2=$ MG. QG : CM^2. Jam ob parallelas EV & HN, *per hypoth.* MCV $=$ MGH (§.233 *Geom.*), & ob parallelas KG & KC, *per conſtr.* MGK $=$ MCR (§.*cit.*). Ergo KGH $=$ RCV (§.91 *Arith.*), conſequenter $KG^2:CR^2=HG^2:CV^2$ (§.267 *Geom.* & §. 260 *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arithm.*) MG. QG : $CM^2=HG^2:CV^2$.

Theorema. In Ellipſi eſt quadratum ſemiordinatæ ad quadratum ſemidiametri conjugatæ ut rectangulum ex ſegmentis diametri ad quadratum ſemidiametri.

Corollarium.

455. Sit MQ $=a$, EV $=c$, MG $=x$, HG $=y$, erit GQ $=a-x$; conſequenter (§.454)

$$ax-x^2:\tfrac{1}{4}a^2=y^2:\tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2ax-\tfrac{1}{4}c^2x^2=\tfrac{1}{4}a^2y^2 \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$c^2x-\frac{c^2x^2}{a}=ay^2$$

Fiat $\dfrac{c^2}{a}=b$, erit $c^2=ab$.

Hinc $abx-bx^2=ay^2$.

Eadem ergo eſt relatio ſemiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§.420), & diametri parameter eſt tertia proportionalis ad diametros a & c.

Scholion.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas Ellipſis proprietates reſpectu axis deduxerimus; evidens eſt, omnes quoque iſtas proprietates Ellipſi competere intuitu diametri.*

Problema CXCVI.

457. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem Ellipſis* TM *perpendicularis.* Tab. XII. *Fig.* 119.

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*); adeoque TR:RM $=$ TF:FO (§.268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR ſemiordinata PM ſit ad hypothenuſam TR perpendicularis (§.368, 370); erit $\triangle$ PMR $\backsim$ $\triangle$ TMR (§.329 *Geom.*), adeoque TR : RM $=$ RM : PR (§.267 *Geom.*). Eſt ergo RM : PR $=$ TF : FO (§.167 *Arithm.*); conſequenter FO. RM $=$ PR. TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema. Rectangulum ex ſubnormali PR in differentiam diſtantiæ foci a ſemiordinata atque ſubtangentis TF æquale eſt rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

Problema CXCVII.

458. *Si in* F *fuerit focus Ellipſis &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem ſegmentorum* MH *&* HF. Tab. XII. *Fig.* 119.

Sit parameter $=b$, axis $=a$, diſtantia foci a centro $=c$, erit FM $=\tfrac{1}{2}a-c+2cx:a$ (§.434), PR $=(\tfrac{1}{2}ab-bx):a$ (§.440), AT $=\tfrac{1}{2}ax:(\tfrac{1}{2}a-x)$ (§.*cit.*) & AF $=\tfrac{1}{2}a-c$, conſequenter TF $=\tfrac{1}{2}ax:(\tfrac{1}{2}a-x)+\tfrac{1}{2}a-c=ax:(a-2x)+\tfrac{1}{2}a-c=(\tfrac{1}{2}a^2-ac+2cx):(a-2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipſi MR (§.256 *Geom.*); adeoque angulus OFM ipſi HMR æqualis (§.233 *Geom.*) & hinc

Tab. XII. *Fig.* 119. & hinc, ob rectos ad O & H æquales (*§*.145 *Geom.*), reperitur (§.267 *Geom.*) FM: FO=MR: MH, hoc eſt, FM: $\frac{PR.TF}{MR}$ =MR: MH (§.457). Eſt itaque MH =(PR.TF): FM; conſequenter FM: TF=PR: MH. Quare

$$\tfrac{1}{2}a-c+\frac{2cx}{a}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=\frac{ab-2bx}{2a}:MH$$

$$a^2-2ac+4cx:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=ab-2bx:MH$$

(*§*.184 *Arith.*)

$$\frac{a^2-2ac+4cx}{a-2x}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=b:MH$$

(§.183 *Arith.*)

Eſt ergo $MH=\frac{1}{2}b$ (§.149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Ellipſin normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Ellipſeos punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XXXVII.

459. *Hyperbola* eſt linea curva, in qua $ay^2=abx+bxx$, hoc eſt, $b:a=y^2:ax+x^2$, ſeu quadratum ſemiordinatæ eſt ad rectangulum ex abſciſſa in rectam compoſitam ex eadem abſciſſa & recta quadam conſtante, quæ *Axis transverſus*, *vel Latus transverſum* audit, ut recta alia conſtans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transverſum.

COROLLARIUM.

460. Eſt ergo etiam hic ut in Ellipſi $y^2=bx+bx^2:a$, $b=ay^2:(ax+xx)$, $a=bxx:(y^2-bx)$ &c. niſi quod hic contraria ſigna occurrant (*§*.421 & ſeqq.).

DEFINITIO XXXVIII.

461. In Hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transverſum & parametrum, quia talis eſt axis conjugatus in Ellipſi (*§*.423).

DEFINITIO XXXIX.

462. Si axis transverſus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur. Tab. III. *Fig.* 37.

PROBLEMA CXCVIII.

463. *Datis parametro & axe transverſo* AB, *invenire diſtantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $=b$, $AB=a$, erit $FN=\frac{1}{2}b$ (§.395) & (*§*.459),

$$b:a=\tfrac{1}{4}bb:ax+xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb=abx+bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab=ax+xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab=\tfrac{1}{4}aa+ax+xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab)}=\tfrac{1}{2}a+x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}ab)}-\tfrac{1}{2}a=x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. Vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab}=CE$ (§.461), ſi fiat AG=EC, erit $GC=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}ab)}$. Quare cum ſit $AC=\frac{1}{2}a$, ſi ex centro C radio CG deſcribatur arcus GF axem ſecans in F, erit $AF=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}ab)}-\frac{1}{2}a$, adeoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Eſt adeo diſtantia foci a centro $FC=\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab)}$. Quare ſi $FC^2=c^2$, erit $CE^2=c^2-\frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM II.

465. Quia $ax+xx=\frac{1}{4}ab$ & $ax+xx=AF.FB$, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum ſemiaxis conjugati (§.461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale eſt.

PROBLEMA CXCIX.

Tab. III. Fig. 40. 466. *Invenire rationem ſemiordinatarum* PM *&* pm.

Sit axis transverſus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = v$, $pm = z$; erit (§.460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}.$$

$$= ax + xx : av + v^2 \text{ (§.124).}$$

$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema. In Hyperbola quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex abſciſſa in rectam quandam compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo.

COROLLARIUM.

467. Creſcentibus adeo abſciſſis x, creſcunt quoque rectangula $ax + x^2$, conſequenter & quadrata ſemiordinatarum y^2, adeoque ſemiordinatæ ipſæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA CC.

468. *Invenire rationem axis transverſi ad axem conjugatum.*

Si axis transverſus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§.461). Hoc ergo ad quadratum transverſi, ut ab ad aa, hoc eſt, ut b ad a (§.124).

Theorema. Quadratum axis conjugati eſt ad quadratum transverſi, ut parameter ad axem transverſum.

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 37. 469. Quoniam $b : a =$ PM^2 : AP. PB (§. 459); quadratum axis conjugati eſt ad quadratum transverſi ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex abſciſſa in compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo.

PROBLEMA CCI.

Tab. III. Fig. 37. 470. *Sint duæ Hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transverſum atque conjugatum habentes, quarum axes* AN *&* BY *cum axe transverſo communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *Hyperbolæ unius ducantur rectæ* fM *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit FC $= f$C $= c$, reliqua ut in præcedentibus: erit AF $= c - \frac{1}{2}a$, A$f = c + \frac{1}{2}a$, PF $= x - c + \frac{1}{2}a$, P$f = c + \frac{1}{2}a + x$

$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2,$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{2}a^2 + 2cx + ax + x^2.$$

Jam (§.464) quadratum ſemiaxis conjugati CE $= cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§.469)

$$AC^2 : CE^2 = AP.\ BP : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Eſt itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

Tab. IV. Fig. 50. 471. Datis ergo axe transverſo & diſtantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita deſcribitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero ſui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipſum ſuperet axe transverſo AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & ſtilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. IV. *Fig.* 50. 472. Iiſdem datis, puncta quotcunque Hyperbolæ determinantur, ſi ex foco f intervallo quocunque AB majore deſcribatur arcus, facto fb = AB, intervallo reſiduo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m interſecans, erit enim ob $fm - Fm$ = AB, m punctum hyperbolæ (§. 470) Vel commodius hyperbola ita deſcribitur: Fiat AB axi tranſverſo æqualis, determinenturque foci f & F (§. 463.). Jungatur ipſi fO recta fK ſub angulo acuto quocunque, & ex centro f radiis ipſa fA majoribus deſcribantur arcus quotcunque concentrici ſecantes rectam fK in I, II, III, &c. Fiat fL = AB, & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. interſecentur arcus iſti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in Hyperbola. Eſt enim fI = f1, fII = f2, fIII = f3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 = LI, F2 = LII, F3 = LIII &c. *per conſtr.* Ergo $f1 - F1 = fI - LI$ = AB, $f2 - F2 = fII - LII$ = AB, $f3 - F3 = fIII - LIII$ = AB &c. conſequenter puncta 1, 2, 3, &c. in Hyperbola (§. 470).

Tab. XII. *Fig.* 121.

PROBLEMA CCII.

Tab. IV. *Fig.* 51. 473. *Determinare ſitum rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipſi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.*

Sit AP $= x$, PM $= y$, parameter $= b$, axis transverſus $= a$: erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$; conſequenter DE tota extra Hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; Hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO XL.

Tab. IV. *Fig.* 51. 474. Si recta DE per verticem Hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE ſemiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Aſymptotæ Hyperbolæ.*

COROLLARIUM I.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE = CP : Pr, & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 *Arithm.*). Quare cum ſit PM = Pm (§. 370); erit quoque MR = mr (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

476. Si AI ducatur parallela ipſi DC & AH ipſi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA = $\frac{1}{2}$ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$EC; conſequenter AI = CI (§. 87).

DEFINITIO XLI.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia Hyperbolæ.*

PROBLEMA CCIII.

478. *Determinare potentiam Hyperbolæ.*

Sit CA $= \frac{1}{2}a$, AE $= \frac{1}{2}c$, erit CE $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 417 *Geom.*); adeoque CI $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + cc)$.

Theorema: Potentia Hyperbolæ eſt decima ſexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum ſemiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam $cc = ab$ (§. 461); erit CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + ab) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$; hoc eſt potentia Hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transverſi in quartam partem aggregati ex axe tranſverſo & parametro.

PROBLEMA CCIV.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM & PR.

Quoniam

Tab. IV. *Fig.* 51.

Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461), & $CP = \frac{1}{2}a + x$; præterea (§.268 *Geom.*)

$$CA . AD = CP : PR$$
$$\tfrac{1}{2}a : \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 \qquad bx + bx^2 : a \ (\text{§. } 460)$$
$$\overline{PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2}$$

Theorema. Si in Hyperbola ſemiordinata PM producatur, donec aſymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato ſemiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Creſcente adeo ſemiordinata PM, decreſcit recta MR, adeoque Hyperbola ad aſymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere poteſt, quia cum ſit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas CF & CG* ἀσυμπτώτους *ſeu non coincidentes vocaverint Veteres.*

PROBLEMA CCV.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* M*r*.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, conſequenter $MR . Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In Hyperbola rectangulum ex MR & M*r* æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale eſt quadrato ſemiaxis conjugati DA (§.480), conſequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia ſunt.

PROBLEMA CCVI.

485. *Si* QM *& sm cum aſymptoto* CG, *qm &* SM *cum altera* CF *parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM. MS *& qm. ms.*

Tab. IV. *Fig.* 51.

Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b$, $QM = v$, $mq = z$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$a : v = b : (bv : a)$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : (bz : a)$$

Eſt ergo $MQ . MS = bvz : a$, & $mq . ms = bvz : a$; conſequenter $MQ . MS = mq . ms$.

Theorema. Si QM & *ms* cum aſymptoto CG; *qm* vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS & *qm* in *ms* æqualia ſunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = sm$ & $CQ = MS$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex *Cq* in *qm* & ex CQ in QM æqualia ſunt.

PROBLEMA CCVII.

487. *Determinare rationem rectanguli ex qm in ms ad potentiam Hyperbolæ, ſeu* AI^2.

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & P*r*, ang. $E = r$, & ob parallelas AI & *qm*, ang. $I = q$ (§. 233 *Geom.*); conſequenter (§.267 *Geom.*).

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : (cy : z)$$

Porro ob $mR . mr = AE^2$ (§. 484) erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : (cc : z)$$

Denique ob parallelas *sm* & MQ (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$z : y = (cc : z) : (ccy : zz)$$

Eſt enim $mr = RM$ (§. 475); cumque

Tab. IV. Fig. 51. que ſit $mr : qm = AE : AI$, & $MR : QM = DA : HA = AE : AI$, *per demonſtr.*, etiam $MQ = mq$ (§. 177 *Arith.*).

Quare $sm . qm = Cq . qm = ccyy : zz$. Eſt vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $sm . qm = AI^2$.

Theorema. Si qm aſymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex Cq in qm æquatur potentiæ Hyperbolæ.

COROLLARIUM I.

488. Quare ſi fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ eſt æquatio naturam Hyperbolæ intra aſymptotos declarans.

COROLLARIUM II.

489. Datis ergo aſymptotis poſitione & latere potentiæ Hyperbolæ CI vel AI, ſi in una aſymptotorum CG ſumantur abſciſſæ quotcunque, invenientur totidem ſemiordinatæ & per eas puncta quotlibet Hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abſciſſas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 272 *Geom.*). Nimirum ſint AB & AC aſymptoti, $AD = DI = a$ latus potentiæ Hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipſi AC, & PN parallela ipſi DI; erit $PN = DI$ (§. 257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN ſecans DI in H: erit (§. 268 *Geom.*)
Tab. XIII. Fig. 123.

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

adeoque $DH = a^2 : x$. Quare ſi fiat $PM (= y) = DH$: erit $y = a^2 : x$; conſequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in Hyperbola (§. 488).

COROLLARIUM III.

Tab. IV. Fig. 51. 490. Quodſi abſciſſæ non computentur a centro C, ſed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$; conſequenter $a^2 = by + xy$.

PROBLEMA CVIII.

491. *Determinare in Hyperbola ſubtangentem* PT *& ſubnormalem* PR. Tab. III. Fig. 42.

Sit parameter $= b$, axis transverſus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $PM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$
$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$
$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$- 2atx - az^2 \qquad b+a$$
$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b+a}x + \frac{at^2 - az^2}{b+a} = 0$$

Fiat jam, ob rationes ſupra (§. 410) allatas, $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$(ab - 2at) : (b + a) = - 2v \qquad b+a$$
$$ab - 2at = - 2bv - 2av$$
$$ab + 2bv + 2av = 2at \qquad 2a$$
$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc eſt, quia $x = v$,
$\tfrac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.
Ergo $PR = \tfrac{1}{2}b + bx : a + x - x = \tfrac{1}{2}b + bx : a = (\tfrac{1}{2}a + x) b : a$.

Theorema. In Hyperbola eſt ut axis transverſus ad parametrum, ita aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad ſubnormalem.

Porro (§. 409)

$$PR : PM = PM : PT$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}a + x}{a} b : \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} : PT$$

Reperitur ergo $PT = (abx + bx^2) : (\tfrac{1}{2}a + x) b = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

 Theo-

Tab. III. Fig. 42. *Theorema.* In Hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita aggregatum ex integro axe transverſo & abſciſſa ad ſubtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In Hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita ſemiaxis transverſus ad rectam AT inter verticem & tangentem intercepta.

PROBLEMA CCIX.

Tab. V. Fig. 52. 492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *ſecat in* G; *determinare rationem ſegmentorum* GN *&* GO.

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipſi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transverſus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $PC = \frac{1}{2}a + x = p$, $GI = HS = v$, $GF = HD = z$, erit $IF = DS = LO = z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus $GKI = PTM$ & ob parallelas KI & OF *per conſtr.* angulus $GKI = GOF$; conſequenter $GOT = PTM$. Quare, cum præterea F & P ſint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + xx)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur, brevitatis gratia, $ax + xx = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$, ut ante, erit $FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$, & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Eſt vero (§. 466)

$$AP.PB : AL.LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $yy = (ax + xx)b : a$ (§ 459). Cum itaque poſuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expreſſione ipſius OL^2 ſubſtituto, habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{2}ap^2bq}{p^2q}.$$

Enim vero $OL^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus adeo

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$$

Quodſi HN dicatur z, & calculus eodem modo inſtituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$.

Unde liquet eſſe $HN^2 = GF^2 = HD^2$; conſequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§. 268 *Geom.*) $HN : HD = NG : GO$; erit $NG = GO$.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Eſt itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368); MC vero eſt ſemidiameter transverſa.

PRO-

PROBLEMA CCX.

Tab.V. Fig. 53. 494. *Ductis duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem Hyperbolæ puncto* m, *utrinque in aſymptotis* CQ *&* CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm. mK *&* LN. NO.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque uſque ad aſymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm.mr = QN.NT$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$

$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam, ob parallelas *mr* & NT, angulus $r = T$; &, ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$

$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob ſimilem rationem, nempe ſimilitudinem △△ QLN & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$

$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN. NO = abzy : zy = ab$. Eſt vero etiam $Hm. mK = ab$. Sunt igitur duo iſta rectangula æqualia.

Theorema. Si intra aſymptotos Hyperbolæ, ex ejus puncto *m* ducantur utcunque duæ rectæ Hm & mK, & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm. mK = LN. NO$.

Idem invenitur, ſi ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam caſu $Hm. mk = LN. No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter ſe æqualia ſunt. Tab.V. Fig. 53.

PROBLEMA CCXI.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra aſymptotos* CQ *&* CT *ducatur; determinare rationem ſegmentorum* HE *&* mk *inter Hyperbolam & aſymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & *m* rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE. EG = Rm. mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mR : IE = EG : mr$$

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro, ob IG ipſi Rr parallelam, (§. 268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$

$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$

$$mr : km = EG : Ek$$

$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Eſt itaque $Ek. EH = abxy : ab = xy = Hm. mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$

$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$$

(§. 193 *Arithm.*)

h. e. $Em : mk = Em : HE$.

conſequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter aſymptotos recta Hk utcunque ducatur, ſegmenta HE & mk inter Hyperbolam & aſymptotos utrinque intercepta æqualia ſunt.

COROLLARIUM I.

497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk Hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter aſymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM II.

Tab.V. Fig.53. 498. Rectangulum itaque ex ſegmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PROBLEMA CCXII.

Tab.V. Fig.54. 499 *Determinare relationem ſemiordinatæ* PM *ad diametri abſciſſam* AP.

Sit AB diameter tranſverſa, DE diameter conjugata, adeoque ordinatæ NM parallela, C centrum Hyperbolæ & CQ atque CR ſint ejus aſymptotæ. Fiat DA $= c$, CA $= r$, PM y, CP $= v$ & CB $=$ AC: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare RM $= \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$, & MQ $= \frac{cv + ry}{r}$, conſequenter RM. MQ $=$ $(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Eſt vero RM. MQ $=$ DA^2 $= c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; r^2$$
$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc reſolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP.\,PB = DA^2 : AC^2$$

Eſt nimirum BP $=$ BC $+$ CP $= r + v$ & AP $=$ CP $-$ CA $= v - r$, adeoque AP. PB $= (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum ſemiordinatæ in Hyperbola eſt ad rectangulum ex abſciſſa & aggregato ex diametro tranſverſa AB & abſciſſa AP, ut quadratum ſemidiametri conjugatæ AD ad quadratum ſemidiametri tranſverſæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodſi fiat AP $= x$, & $2r =$ AB $= a$, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, conſequenter Tab.V. Fig.54

$$y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \tfrac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}.$$

Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio Hyperbolæ naturam definit reſpectu diametri, quæ eam exprimit reſpectu axis, eſtque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet eaſdem proprietates Hyperbolæ competere reſpectu diametri, quæ ſuperius ex æquatione fundamentali reſpectu axis deduximus.

PROBLEMA CCXIII.

501. *Ductis* AF *&* TN *aſymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit CF $= a$, AF $= b$; AD $= c$, RN $= z$, erit ob AE $=$ DA, etiam EF $=$ FC $= a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam RN. NQ $=$ DA^2 (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*).

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro, ob parallelas AF & NT, angulus F $=$ T, & ob parallelas AE & GN, angulus E $=$ Q (§. 133. *Geom.*), ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

Et QN : QT $=$ RN : TC (§. 263. *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo TC. TN $= \frac{azbc}{cz} = ab =$ CF. AF.

Theo-

Tab. V. *Fig.* 54. *Theorema.* Si ex vertice A & quocunque Hyperbolæ puncto N ducantur AF & TN cum aſymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodſi adeo fiat TC $= x$, TN $= y$; æquatio Hyperbolæ naturam inter aſymptotos reſpectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA CCXIV.

Tab. XII. *Fig.* 119. 503. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem Hyperbolæ* TM *perpendicularis.*

Eodem prorſus, quo ſupra (§. 457), modo reperitur FO. RM $=$ PR. TF, ut verba ſingula huc tranſcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex ſubnormali PR in differentiam diſtantiæ foci a ſemiordinata atque ſubtangentis TF æquale eſt rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA CCXV.

504. *Si in* F *fuerit focus hyperbolæ &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco* F *ad punctum contactus* M *ductam*; *determinare quantitatem ſegmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, diſtantia foci a centro $= c$, erit FM $= c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), PR $= (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), AF $= c - \frac{1}{2}a$, TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a = ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM perpendiculari, reperitur, prorſus ut ſupra, iiſdem retentis verbis, FM : TF $=$ PR : MH (§. 458). Quare

$$c - \tfrac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : \text{MH}$$ Tab. XII. *Fig.* 119.

Hoc eſt

$$2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : \text{MH}$$

(§. 184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = b : \text{MH}$$ (§. 183 *Arith.*)

Eſt ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arithm.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Hyperbolam normalis, & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XLII.

505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE ſunt æquales. Tab. IV. *Fig.* 51.

COROLLARIUM I.

506. Cum parameter ſit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipſa etiam axibus æqualis eſt.

COROLLARIUM II.

507. Quare ſi in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam Hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM III.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 ſunt inter ſe ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc eſt, ut rectangula ex abſciſſis in rectas compoſitas ex abſciſſis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM IV.

509. Si ſint CP $= x$, CA $= r$, erit AP $= x - r$ & PB $= x + r$ conſequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM V.

510. Quoniam AE $=$ CA (§. 505); erit ACE angulus ſemirectus (§. 241 *Geom.*); conſequenter angulus aſymptotorum FCG in Hyperbola æquilatera rectus.

Problema CCXVI.

Tab.V. Fig.55. 511. *Inveſtigare naturam curvæ, quæ oritur, ſi conus* ABC *ita ſecetur ut ſectionis axis* DE *ſit lateri coni* AC *parallelus, ipſum vero planum ſectionis* DLN *ad baſin ſectionis triangularis* AB *perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI baſi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*); conſequenter cum uterque circulus HMI & ANB per ſectionem triangularem ACB ſecetur in HI & AB, & a ſectione data in *p*M & LN; erunt cum HI & AB, tum *p*M & LN inter ſe parallelæ (§.499 *Geom.*). Quare cum ſit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§.492 *Geom.*); conſequenter cum DE & HI, itemque DE & AB ſint in eodem plano ſectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares ſunt ad DE (§. 484 *Geom.*); adeoque ſemiordinatæ ad axem DE applicatæ (§.368, 370). Et quia AH parallela ipſi EP, *per hypoth.* HP parallela ipſi AE, *per demonſtr.* erit HP=AE (§.257 *Geom.*). Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP=x, DE=z; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo PM²=HP. PI (§. 377)=tv & EN²=AE. EB (§.*cit.*)=$tzv : x$. Eſt ergo (poſitis PM²=y^2, EN²=q^2)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc eſt $= tvx : tzv$ (§. 124)

$$= x : z$$

Eſt itaque curva NMD*p*L Parabola (§. 402).

Problema CCXVII.

512. *Si conus* ABC *ita ſecetur, ut axis ſectionis* DE *cum diametro baſis* AB *continuata in* F *concurrat, & planum ſectionis continuatum eam ad angulos rectos ſecet; invenire naturam curvæ ex hac ſectione prodeuntis* DMNELD. Tab.V. Fig.56.

Eodem, quo ante (§.511) modo oſtenditur eſſe PM & QN cum ſemiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE=a, DP=x, DQ=v, PH=t, QL=s; erit PE=$a-x$, QE=$a-v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a-v : s = a-x : \frac{sa-sx}{a-v}$$

Quare (§. 377) PM²=HP. PI=$(tsa - tsx) : (a - v)$, & QN²=KQ. QL $= vts : x$. Eſt adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a-v} : \frac{vts}{x}$$

hoc eſt, $= tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$

(§. 124) $= ax - x^2 : av - v^2$

Eſt itaque curva DMNELD Ellipſis (§. 429).

Problema CCXVIII.

513. *Si conus* ABC *ita ſecetur, ut axis ſectionis* DQ *continuatus cum latere coni* AC *continuato in* E *concurrat, planum vero ſectionis* DLN *ſecet diametrum baſis* AB *ad angulos rectos; invenire naturam curvæ* DMN, *quæ ex hac ſectione reſultat.* Tab. IV. Fig.57.

Eodem modo, quo paulo ante (§. 511), oſtenditur, QN & PM eſſe ſemiordinatas cum circulorum HMI atque

Tab. IV. Fig. 57. atque ANB, tum curvæ DMN. Sit ED $= a$, DP $= x$, DQ $= v$, PH $= t$, PI $= s$; erit EP $= a + x$, EQ $= a + v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo HP. PI $= ts$ & AQ. QB $= (atsv + v^2 ts) : (ax + x^2)$; conſequenter ob $PM^2 = HP. PI$, & $QN^2 = AQ. QB$ (§. 377),

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{astv + vvst}{ax + xx}$$

hoc eſt, $= 1 : \frac{av + vv}{ax + xx}$

(§. 124) $= ax + xx : av + vv$

Eſt itaque LDMN Hyperbola (§. 466), DE ejus axis tranſverſus, E vertex Hyperbolæ oppoſitæ.

SCHOLION.

514. *Hinc intelligimus, quod ſtatim ab initio Parabolam, Hyperbolam atque Ellipſin tanquam ex Cono ſectas proponere, & ex indole ſectionis æquationem fundamentalem eruere licuiſſet, niſi nobi. conſtitutum fuiſſet oſtendere, quomodo ex æquationibus utcunque aſſumtis, vel datis, curvarum proprietates ac deſcriptiones per Algebram & Arithmeticam ſpecioſam eruere debeamus. Immo potuiſſent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum deſcriptiones fundamenti loco aſſumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de Ellipſi exemplum propoſuiſſe ſuffecerit.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. IV. Fig. 58. 59. 515. *Sit deſcripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in inſtrumento, cujus ſtructura ex Fig.* 59 *Tab. IV manifeſta eſt, ita ut paxilli in* E *defixi baſis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *inveſtigare naturam ejus.* Tab. IV. Fig. 58. 59.

Ex curvæ deſcriptione manifeſtum, eſſe longitudinem regulæ EM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, conſequenter diſtantiam paxillorum EF differentiam inter ſemiaxem majorem AC & ſemiaxem minorem DC.

Aſſumamus itaque quemcumque regulæ ſitum EFM (*Fig.* 58) & determinetur curva, in qua ſit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat CP $=$ RM $= x$, PM $= y$, AC $=$ EM $= a$, CD $=$ FM $= b$, erit EF $= a - b$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$

$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo PF $= x - x + bx : a = bx : a$

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 417 *Geom.*) $= b^2 - b^2 x^2 : a^2 = (a^2 b^2 - b^2 x^2) : a^2 = y^2$.

Eſt adeo curva ADMB Ellipſis (§. 432).

DEFINITIO XLIII.

516. *Circuli ſuperiorum generum* ſunt curvæ, in quibus eſt $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$. Tab. III. Fig. 38.

COROLLARIUM I.

517. Sit AP $= x$, PM $= y$, AB $= a$: erit PB $= a - x$, conſequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens eſt $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$, & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a - x)^n x^m$.

COROL-

COROLLARIUM II.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis ſub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum ſecundi generis definit.

DEFINITIO XLIV.

519. *Parabolæ ſuperiorum generum* ſunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, ex. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^5x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: ſpeciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, ſi $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, ſi $a^3x = y^4$; *ſurdeſolidalem* ſi $a^4x = y^5$ &c. Harum curvarum reſpectu *Parabola* primi generis ſuperius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad Parabolas quoque referri ſolent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $a^2x = y^3$, $ax^3 = y^4$: quia a nonnullis *ſemiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur ſub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM I.

520. Cum in Parabolis ſuperiorum generum ſit $y^m = a^{m-1}x$; ſi alia quæcunque ſemiordinata dicatur v, abſciſſa ipſi reſpondens z, erit $v^m = a^{m-1}z$, conſequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$

hoc eſt, $= x : z$

Communis adeo Parabolarum proprietas eſt, quod ordinatarum potentiæ rationem abſciſſarum habeant.

COROLLARIUM II.

521. In ſemiparabolis vero eſt $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, ſeu potentiæ ſemiordinatarum ſunt ut potentiæ abſciſſarum uno gradu inferiores; ex. gr. in ſemiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 ſunt ut quadrata abſciſſarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis Parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO XLV.

522. *Ellipſes infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, ſi $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. Ex. gr. *Elliptoidem cubicalem*, ſi $ay^3 = bx^2 (a - x)$: *Elliptoidem biquadraticalem* appellant Ellipſin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2 (a - x)^2$. Harum curvarum reſpectu *Ellipſis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM I.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abſciſſa reſpondens z; erit $av^{m+n} = bz^m (a - z)^n$, conſequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a - x)^n : bz^m (a - z)^n$ hoc eſt, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a - x)^n : z^m (a - z)^n$.

COROLLARIUM II.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m (a - x)^n$ & ſi porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m (a - x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc eſt, Ellipſes ſuperiorum generum degenerant in Circulos ſuperiorum generum.

DEFINITIO XLVI.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, ſi $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$ ex. gr. $ay^3 = bx^2 (a + x)$. Et harum curvarum reſpectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* ſalutatur.

COROL-

Corollarium.

526. Eſt ergo in infinitis Hyperboloibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a+x)^n : bz^m (a+z)^n$ hoc eſt, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a+x)^n : z^m (a+z)^n$.

Definitio XLVII.

527. *Conos ſuperiorum generum* appello, quorum baſes & ſectiones baſibus parallelæ ſunt circuli ſuperiorum generum. Generatur iſtiusmodi Conus, ſi recta linea AC in puncto ſublimi C fixa, ſed quæ pro re nata magis aut minus extendi poſſe concipitur, circa peripheriam circuli ANB convertatur. Tab.V. Fig. 55.

Problema CCXX.

528. *Inveſtigare naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DE *ſit lateri coni* AC *parallelus, planum vero ſectionis* LDN *ſecet diametrum baſis* AB *ad angulos rectos.* Tab.V. Fig. 55.

Eodem, quo ſupra (§. 511) modo oſtenditur, eſſe PM & EN inter ſe parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN ſemiordinatas. Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in Probl.* 216 (§. 511), $EB = tz : x$. Eſt vero (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM : PI$$
$$v^m : y^m = y : t$$
$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$.

$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$
$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$ Tab.V. Fig. 55.

hoc eſt $= 1 : \frac{z}{x}$ (§. 124).

ſeu $= x : z$

Sunt ergo curvæ iſtæ Parabolæ ſuperiorum generum (§. 520).

Vel ſit generaliter (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM^n : PI^n$$
$$v : y^m = y^n : t^n$$
$$y^{m+n} = t^n v^m$$
$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$
$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$
$$q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t z^n v}{x^n}$$
$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvæ DLN ſuperiorum generum Parabolis agnatæ (§. 521).

Problema CCXXI.

529. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ enaſcuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecantur, ut axis ſectionis* DE *cum diametro baſis* AB *continuata in* F *concurrat, planum vero ſectionis continuatum eandem ad angulos rectos ſecet.* Tab.V. Fig. 56.

Patet, ut ſupra (§. 511), PM & QN eſſe inter ſe parallelas atque ſemiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$, $PM = y$, $QN = z$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & reperietur *ut in Probl.* 217 (§. 512) $QK = vt : x$, $PI = (sa - sx) : (a - v)$. Eſt vero (§. 516)

Tab.V. *Fig.*56. $IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$\frac{s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

$$z^{m+n} = t^n v^n s^m : x^n$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n s^m}{x^n}$$

hoc eſt $= (a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$

Sunt adeo curvæ iſtæ in numero Ellipſium ſuperiorum generum (§.523).

PROBLEMA CCXXII.

Tab. IV. *Fig.*57. 530. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ gignuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DQ *cum latere coni continuato* AC, *continuatus & ipſe, in* E *concurrat, planum vero ſectionis* DLN *diametrum baſis* AB *ad angulos rectos ſecet.*

Patet, ut ſupra (§.511), PM & QN eſſe inter ſe parallelas, atque ſemiordinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DMN. Sit DE$=a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, PI$=s$; erit EP$=a+x$, EQ$=a+v$, & reperietur *ut in Probl.* 218 (§. 513) AQ$=t(a+v):(a+x)$ & QB$=sv:x$. Eſt vero (§.517)

$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

hoc eſt (§. 124) $= 1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$

$$= x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$$

Sunt adeo curvæ Hyperbolæ ſuperiorum generum (§.526.)

PROBLEMA CCXXIII.

531. *Diametro ſemicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT, *ducanturque ex centro* C *ſecantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipſis* QR *æquales. Inveſtigare naturam curvæ* AMP, *quæ eſt locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.* Tab.V. Fig.60

Sit AQ$=$PM$=y$, QM$=$QR$=x$, AB$=a$, erit (§. 379 *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Eſt adeo curva AMR Hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§.507).

COROLLARIUM.

532. Habemus adeo facilem Hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata deſcriptionem.

PROBLEMA CCXXIV.

533. *Invenire æquationem Hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductæ & ad axem tranſverſum* AB *normalem relatæ.* Tab. XII. Fig. 124

Sit CQ$=$PM$=x$, CP$=$QM$=y$, CB$=$CA$=a$, erit BP$=a+y$, AP$=y-a$, adeoque BP. PA$=y^2-a^2$. Sit porro parameter $=b$, erit (§.459)

$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$2ax^2 = by^2 - a^2 b$$

$$2ax^2 + a^2 b = by^2$$

$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. XIII. Fig. 124. 534. Quodſi Hyperbola fuerit æquilatera, erit $2a = b$ (§. 506), conſequenter $y^2 = x^2 + a^2$, ſive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. VI. Fig. 61. 535. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipſam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD ſecantes in Q, fiatque $QM = QN = AE = EF$; Curva, in qua ſunt puncta M, dicitur a NICOMEDE inventore *Conchilis* ſeu *Conchois prima*; altera vero, in qua ſunt puncta N, *Conchois ſecunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem inſtrumen-
Fig. 62. tum, quo motu continuo Conchois prima deſcribi poteſt. Nimirum in regula AD excavatus eſt canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri poſſit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fiſſuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodſi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; ſtylus in C Conchoidem primam deſcribet.

COROLLARIUM I.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR = a - x$. Creſcentibus adeo x, decreſcit $a - x$ ſeu MR, adeoque curva continuo ad regulam BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decreſcere debere, adeoque Conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM II.

537. Quoniam tamen inter Conchoidem utramque & rectam BD ſemper interjicitur recta QM, vel QN, ipſi AE æqualis (§. 535); neutra Conchoidum cum recta BD concurrere poteſt, conſequenter BD eſt aſymptotus utriusque Conchoidis. Tab. VI. Fig. 61.

PROBLEMA CCXXV.

538. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$; conſequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$: quæ eſt æquatio naturam Conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$

$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo, ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 417 *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc eſt, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$: quæ eſt æquatio naturam Conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Eſt adeo Conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO XLIX.

540. Aliæ *Conchoidum* ſpecies prodeunt, ſi fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite ſi $CE^m : CQ^m = QM^n : AE^n$.

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 61. 541. Quare ſi $CE = b$, $AE = a$, $CQ = x$, $QM = y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis Conchoidibus $a^n b^m = x^m y^n$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione Hyperbolæ inter aſymptotos* (§. 486); *eadem tamen non eſt, cum in præſente caſu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam poſitione datam, quemadmodum in Hyperbola.*

PROBLEMA CCXXVI.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* $CE : CQ = QM : AE$.

Sit $AE = a$, $CE = b$, $PM = y$, $PE = x$, erit $CP = b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) $CP : CM = CE : CQ = EP : QM$. Quare $CE.\,EP : CQ.\,QM = CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arithm.*), hoc eſt, ob $CQ.\,QM = CE.\,EA$ *per hypoth.*

$$CE.\,EP : CE.\,EA = CP^2 : CM^2$$

hoc eſt (§. 181 *Arith.*),

$$EP : EA = CP^2 : CM^2$$

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2 x + b^2 x + 2bx^2 + x^3$$

quæ eſt æquatio deſiderata.

DEFINITIO L.

Tab. VI. Fig. 63. 544. Diametro AB ſemicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH, fiatque $AM = IH$, vel in altero quadrante $LC = AN$: erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Ciſſoidem* dixit DIOCLES inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) $AP : KB = AM : IH$. Sed $AM = IH$ (§. 544). Ergo $AP = KB$ (§. 149 *Arithm.*), conſequenter $AK = PB$ (§. 88 *Arithm.*), & $PN = IK$. Tab. VI. Fig. 63.

COROLLARIUM II.

546. Eodem modo patet, Ciſſoidem AMO ſemicirculum AOB bifariam dividere. Eſt enim $AO : OF = AG : GB$ (§. 268 *Geom.*). Sed $AO = OF$ (§. 544). Ergo $AG = GB$ (§. 149 *Arithm.*). Eſt itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM III.

547. $AK : KI = KI : KB$ (§. 327 *Geom.*), hoc eſt, $AK : PN = PN : AP$ (§. 545). Porro $AK : (KI)\,PN = AP : PM$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $PN : AP = AP : PM$ (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, ſi fiat $PN = v$, $AP = x$, $PM = y$, $x^2 = vy$. Eodem modo oſtenditur eſſe AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA CCXXVII.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Ciſſoidis* AMOL *declarat.*

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $AK = PB$ (§. 545) $= a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547, 124)

$$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2 y^2 - 2axy^2 + x^2 y^2 = ax^3 - x^4 \quad (a - x \text{ div.}$$

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc eſt, $(a - x)\,y^2 = x^3$

Theorema. In Ciſſoide DIOCLIS cubus abſciſſæ AP æquatur ſolido ex quadrato ſemiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROL-

COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 63. 549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & BC $= y$, conſequenter $y^2 = \frac{a^3}{0}$. Quare $0 : 1 = a^3 : y^2$, hoc eſt, valor ipſius y fit infinitus, adeoque Ciſſois AMOL cum BC nunquam concurrit. Eſt ergo BC Ciſſoidis aſymptotus.

COROLLARIUM II.

550. Ciſſois eſt linea ſecundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Ciſſoide uſi ſunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* PAPPUS.

DEFINITIO LI.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipſique in punctis diviſionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva exiſtunt, quæ *Logiſtica*, itemque *Logarithmica* vocari ſolet.

COROLLARIUM I.

553. Sunt ergo abſciſſæ AP, Ap &c. ſemiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

554. Hinc ſi AP $= x$, A$p = v$, PM $= y$, $pm = z$, & logarithmi ipſorum y & $z = ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$; conſequenter $x : v = ly : lz$, hoc eſt, denominatores rationum AN : PM & AN : pm ſunt inter ſe ut abſciſſæ AP & Ap.

COROLLARIUM III.

555. Quamobrem infinitas alias logiſticas excogitare licet, ſi fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abſciſſarum poteſtates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) ſint ſemiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM IV.

556. Cum ſemiordinatæ pm continuo decreſcant, ratione AN ad pm cum abſciſſis continuo creſcente (§. 552 *Analyſ.* & §. 205 *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodſi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipſius AN in infinitum augetur, conſequenter & abſciſſa AP (§. 554.). Quare logiſtica nonniſi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX eſt ejus aſymptotus. Tab. VI. Fig. 64.

DEFINITIO LII.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p, &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. reſecentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in *Logiſtica ſpirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM I.

558. Sunt ergo arcus AP, Ap &c. logarithmi ordinatarum CM, Cm &c.

COROLLARIUM II.

559. Unde liquet, infinitas logiſticas ſpirales excogitari poſſe (§. 555).

DEFINITIO LIII.

560. Si quadrans BGD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo ſubdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis aſſumtus eodem modo dividatur in partes æquales Ah, hi, ik, kC, tandemque in punctis h, i, k, C applicentur normales eh, ig, kf, Cd ipſis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, e, g, f, d erunt in Linea, a LEIBNITIO inventore *Linea Sinuum* dicta. Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD ſint ſinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*) erunt abſciſſæ Ah, Ai, Ak, AC ut arcus ſeu anguli, ſemiordinatæ eh, ig, kf, Cd, ut ſinus eorundem arcuum ſeu angulorum.

Definitio LIV.

Tab. VI. *Fig.* 66. 562. Iiſdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcipimus, fiant *eh*, *ig*, *kf* &c; tangentibus BL, BM, BN &c. vel ſecantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

Corollarium.

563. In linea tangentium abſciſſæ ſunt ut arcus ſeu anguli, ſemiordinatæ ut eorundem tangentes: in ſecantium vero linea abſciſſæ itidem ſunt ut arcus ſeu anguli, ſemiordinatæ ut eorundem ſecantes.

Definitio LV.

Tab. VI. *Fig.* 67. 564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam biſectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. iſtis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam Dinostrates inventor *Quadratricem* appellavit.

Corollarium.

565. Eſt ergo ANB : AN = AC : AP. Quare ſi fiat ANB = a, AC = b, AN = x, AP = y; erit $ay = bx$.

Definitio LVI.

Tab. VI. *Fig.* 68. 566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur, ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ PM, *pm* &c. ipſi CB; ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipſi AC parallelæ: puncta M, *m*, &c. ſunt in *Quadratrice Tſchirnhuſiana* a D^no^ de Tschirnhausen ad imitationem alterius excogitata (*a*).

(*a*) In *Medicina Mentis* part. II. p. 114.

Corollarium I.

567. Cum etiam hic ANB : AN = AC : AP; Quadratrix quoque *Tſchirnhuſiana* continetur ſub æquatione $ay = bx$. Tab. VI. *Fig.* 68.

Corollarium II.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus arcus AN (§. 2. *Trigon.*). Quare cum ſit AP : Ap = AN : An (§. 566); abſciſſæ Quadratricis hujus ſunt ut arcus & ſemiordinatæ ut ſinus eiſdem reſpondentes, quemadmodum in linea ſinuum (§. 561).

Definitio LVII.

569. Peripheria circuli APpA dividatur in partes quotcunque æquales in punctis, P, p, per continuam biſectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, Cm vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, m, m, &c. in linea curva, quam ab inventore Archimede dicunt *Spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari poteſt, circulo duplo radio deſcripto: immo *ſecunda* continuatur, deſcripto radio circulo triplo & ita porro in infinitum. Tab. VII. *Fig.* 69.

Corollarium I.

570. Eſt ergo AP ad peripheriam ut CM ad radium. Quare ſi peripheria dicatur p, radius AC = r, AP = x, PM = y, erit CM = $r - y$, conſequenter ob $p : r = x : r - y$; habebimus $pr - py = rx$.

Corollarium II.

571. Si CM = y; erit $rx = py$: quam æquationem cum Quadratrice tam Dinostratis, quam Tschirnhusii, communem habet ſpiralis.

Co-

Corollarium III.

572. Quare pro infinitis ſpiralibus & quadratricibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

Definitio LVIII.

Tab. VII. Fig. 70. 573. *Cyclois* vel *Trochois* eſt curva, quam deſcribit punctum *a* in peripheria circuli, ſi circulus ſuper recta AC rotatur.

Corollarium I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD ſemiperipheriæ circuli æqualis eſt, & in quocumque circuli genitoris ſitu A*d* arcui P*d*.

Corollarium II.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui BM circuli genitoris æqualis. Eſt enim P*d* = A*d* & hinc P*b* = *d*D (§. 574). Quare cum NL = D*d* (§. 226 *Geom.*) & ob P*b* = MB etiam PN = ML (§. 12 *Trigon.*); erit etiam PN + NM = PM = ML + NM = NL = D*d*; conſequenter ob D*d* = P*b* = MB, *per demonſtr.* PM = MB. Sumto igitur arcu MB pro abſciſſa, PM pro ſemiordinata, ſi BM $= x$, PM $= y$; erit $x = y$.

Definitio LIX.

576. *Epicyclois* deſcribitur, ſi circulus non ut in præcedente definitione ſuper recta, ſed ſuper peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois ſuperior*, ſi circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, ſi ejus concavitatem emetitur.

Scholion I.

577. *Logarithmica, Logiſtica ſpiralis, Linea ſinuum, Linea tangentium, Linea ſecantium, Quadratrix* Dinostratis, *Quadratrix* Tſchirnhuſiana, *Spiralis* Archimedea, *Cyclois, Epicyclois ſunt lineæ transcendentes; neque enim per æquationes algebraicas explicari poſſunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his aſſumſerimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non ſunt. Suppoſuimus enim ſuperius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per ſolas lineas rectas explicare debere.*

Scholion II.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari poſſunt & actu excogitatæ ſunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime conſultum eſt. Tradenius autem in Analyſi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, ſed etiam aliarum quarumcunque ſymptomata, ſi quando iis opus habemus, erui poſſunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari poſſint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

Problema CCXXVIII.

§. 579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi ſemiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.* Tab. XIII. Fig. 125.

Facile apparet, curvas infinitas, immo infinitas earum ſeries conſtrui poſſe. Æquatio igitur in dato caſu ſpeciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter a. Sit in omni caſu AP $= x$, PN $= y$; erit PM$^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum AP$^2 = x^2$, & AM$^2 =$ AP^2 + PM^2 (§. 417 *Geom.*); erit AM$^2 = ax$, conſequenter æquatio ad curvam genitam AND, $y^2 = ax$. Eſt itaque curva AND Parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC Parabola: erit PM$^2 = ax$ (§. 388); conſequenter AM$^2 =$ PN$^2 = ax + x^2$. Quoniam

itaque

Tab. XIII. *Fig.* 125. itaque æquatio ad curvam AND; $y^2 = ax + x^2$; erit ea Hyperbola æquilatera, cujus axis transverſus $= a$ (§. 507).

Sit curva genetrix AMC Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, conſequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND, $y^2 = ax + 2x^2$, adeoque eadem Hyperbola ſcalena, cujus parameter a, axis transverſus vero $= \frac{1}{2}a$ (§.459).

Sit AMC Parabola ſecundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§. 519), adeoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam ſit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4x^2$, ſeu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2 - x^6 = a^4x^2$.

SCHOLION.

580. *Patet per Problema præſens plurimarum curvarum deſcriptiones facillimo negotio detegi poſſe: quod idem per ſequentia quoque Problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem* AB *applicari poſſe tangentes, ſubtangentes, normales, ſubnormales, & quascunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto ſubinde Theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipſa reſolutione Problematis præſentis continentur,* v. gr. *Quod, ſi Parabola circa diametrum circuli deſcribatur, chordæ circuli* AM *ſint ſemiordinatis Parabolæ* PN *æquales.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. XIII. *Fig.* 126. 581. *Inveſtigare naturas curvarum, quæ gignuntur, ſi ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *ſemiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam ſecans in* N.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam MAN angulus rectus *per hypotheſin*; erit PM : AP = AP : PN (§. 327 *Geom.*); conſequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$; conſequenter ſi $AP = x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipſius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur. Tab. XIII. *Fig.* 126.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax - x^2$, adeoque æquatio ad curvam ANR, $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Eſt igitur curva ANR Ciſſois Dioclis (§. 548).

Sit curva genetrix Parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc eſt, $ay^2 = x^3$. Eſt igitur ANR Parabola ſecundi generis (§.519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex Parabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$ hoc eſt, $ay^m = x^{m+1}$. Eſt igitur ANR Parabola proxime ſuperior genetrice. Unde patet modus deſcribendi omnes Parabolas in infinitum, quæ continentur ſub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, adeoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Eſt igitur ANR curva ſecundi generis affinitatem quandam habens cum Ciſſoide; ſed quæ peculiari nomine deſtituitur.

Sit curva genetrix Ellipſis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc eſt $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHO-

SCHOLION I.

582. *Si Circuli ſuperiorum generum ſumuntur pro genetrice, Ciſſoides ſuperiorum generum erunt genitæ.*

PROBLEMA CCXXX.

Tab. XIII. Fig. 127. 583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AT *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis conſtantis*; *inveſtigare naturam curvæ, in qua eſt punctum* N, *quod determinatur, demiſſa ex* S *perpendiculari* SR *ad ſemiordinatam genetricis* PM *&* *ducta recta* QN *par punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela, rectæ* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ductæ occurrente in* N.

Sit $AS = a$, $AQ = x$, $QN = y$, erit ob parallelas SR & QN (§. 268 *Geom.*)

$$AS : (SR)\ QM = AQ : QN$$ Tab. XIII. Fig. 127.

$$a : QM = x : y$$

adeoque $\frac{QM.\, x}{a} = y$

Sit AMK Parabola *Apolloniana*, erit $QM = x^2 : a$. Eſt igitur

$$y = x^3 : a^2$$

$$a^2 y = x^3$$

quæ eſt æquatio ad Parabolam ſecundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis Parabolis, erit $QM = x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*), adeoque $y = x^{m+1} : a^m$; conſequenter $a^m y = x^{m+1}$. Eſt igitur curva genita Parabola proxime ſuperior genetrice, patetque ſimul modus deſcribendi Parabolas omnes in infinitum, quæ continentur ſub æquatione $a^{m-1} x = y^m$.

CAPUT VII.

De Locis Geometricis.

DEFINITIO XL.

584. Locus Geometricus eſt linea, per quam conſtruitur Problema indeterminatum. In ſpecie *Locus ad rectam* dicitur, ſi linea recta æquationi conſtruendæ ſufficit; *Locus ad circulum*, ſi circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO XLI.

385. Loca ad lineam rectam & circulum Veteres dixere *Loca plana*: quæ vero ſunt ad parabolam, ellipſin aut hyperbolam, *Loca ſolida*. Commodius Loca in ordines diſtinguuntur ſecundum numerum dimenſionum, ad quem aſſurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* eſt, ſi æquatio $x = ay : c$. *Locus ſecundi ſeu quadratici ordinis*, ſi ex. gr. $y^2 = ax$, vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii ſeu cubici ordinis*, ſi ex. gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA CCXXXI.

585. *Conſtruere loca ad rectam.* Tab. VII.

Si $y = ax : b$; $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, vel $y = c - ax : b$; Locus ſemper eſt ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $AI = b$, $IE = a$: ductis Fig. 71.

Tab. VII. Fig. 71. ductis ipſi EI parallelis quibuſcunque PM, *pm* &c. erit $AP = x$, $PM = y$. Eſt enim (§. 268 *Geom.*)

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodſi EI continuetur in G, ita ut ſit $IG = c$, per G agatur DF ipſi AB, & ex A, AD ipſi EI parallela, erit $AP = DQ = x$, $QM = y$. Eſt enim $PM = ax : b$, *per demonſtr.* $PQ = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo $QM = ax : b + c = y$.

Si $LG = b$, $GE = a$ & $LQ = x$: erit $QM = ax : b$, *per demonſtr.* Fiat $IG = c$ & per I ducatur ipſi DF parallela AB, erit $PQ = c$ (§. 257 *Geom.*), conſequenter $PM = ax : b - c$.

Tab. VII. Fig. 72. Denique ſit $AC = c$ & $AD = b$; ducatur per D recta EF ipſi AC parallela fiatque $DE = a$. Ducatur recta AL & per C ipſi AL parallela CB. Quodſi alia parallela MN ad EF agatur: erit $AP = x$, $PM = y$. Eſt enim (§. 268 *Geom.*)

$$AD : DE = AP : PN$$
$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed $MN = AC = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo $PM = c - ax : b$.

PROBLEMA CCXXXII.

587. *Invenire Theoremata generalia conſtruendi omnes æquationes ad Parabolam.*

Duo Theoremata nobis inveſtiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem Parabolæ.

Tab. VII. Fig. 75. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter ſe parallelæ, & LDH angulus quicunque. Sit porro $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257 *Geom.*) $= n$, $DL = ſ$, & parametro t deſcribatur Parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro $DQ = x$, $QM = y$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN\ (= PK)$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo $AP = PK - KA = ſx : q - p$
& $PM = QM - PN - QN = y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum ſit $PM^2 = t. AP$ (§. 388), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tſx}{q} - tp$$

hoc eſt,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tſx}{q} + tp$$

Tab. VII. Fig. 7[illegible]. Sit denuo in caſu altero, ubi IM parallela ipſi DQ & DI ipſi QM, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257 *Geom.*) $= n$, $DI = ſ$, $IM = DQ = y$, $QM = x$. Parabola AM denuo parametro t deſcribatur.
Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = y : \frac{ſy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = ſy : q - p$ & PM
$= QM$

Tab. VII. Fig. 76. $= QM - QN - PN = x - ry : q - n$. Quare cum ſit $PM^2 = t . AP$; erit (§. 388, 419),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tſy}{q} - tp$$

hoc eſt,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 - \frac{tſy}{q} + tp = 0$$

Tab. VII. Fig. 75. Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit $-\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $ſ = q$; porro $n = 0$ & $tſ : q = a$, hoc eſt, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, nec alia re opus eſt, quam ut parametro a Parabola AM deſcribatur: erit enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r : q = 0$, conſequenter H cadit in L, adeoque $ſ = q$. Porro $a = -2n$: ergo $-\frac{1}{2}a = n$. Item $-t = -b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$, hoc eſt, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Cadit adeo punctum K in A. Parametro itaque b deſcribenda Parabola AM & in A erigenda perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a$, $MS = y$ & $BS = x$. Tab. VII. Fig. 74.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $q = ſ$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{n^2 + tp = -cc}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}aa}$$

$$p = (-c^2 - \tfrac{1}{4}a^2) : b$$

Parametro ergo b deſcribenda Parabola AHM, & quia KA, ſive p, eſt quantitas negativa, auferenda eſt ex AP, ita ut origo indeterminatæ x ſtatuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP, erit $NQ = RP = x$, & $QM = y$.

Tab. VII. Fig. 74. Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit, vi Theorematis ſecundi, $r : q = 0$, adeoque $q = ſ$. Porro $n = 0$ &

$$\frac{-t = -a}{t = a} \qquad \frac{tp = bb}{ap = bb}$$

$$p = \frac{bb}{a}$$

Conſtruitur adeo Parabola AHM parametro a, factaque $AK = bb : a$; erit $KP = y$, $PM = x$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$-\frac{2r}{q} = -\frac{a}{b} \qquad 2n = 0 \qquad -\frac{tſ}{q} = -c$$

$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \qquad n = 0 \qquad t = \frac{qc}{ſ} = \frac{2bc}{ſ}$$

$$n^2 + tp = 0$$

$$p = 0$$

Conſtruatur itaque parametro $2bc : ſ$ Parabola AHM, & factis $AO = 2b$, atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipſi OR parallela $= y$, $AT = x$.

Ceterum loca eſſe rite conſtructa patet, ſi aſſumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quæratur æquatio ad curvam, eademque cum propoſita reperiatur. Etenim ſi in exemplo ultimo $AO = 2b$, $RO = a$, parameter $= 2bc : ſ$, $AT = x$, $TM = y$, cum ſit

$$AO : AR = AT : AP$$

$$2b : ſ = x : \frac{ſx}{2b}$$

erit $t . AP = 2bcſx : 2bſ = cx$.

Et quia $AO : OR = AT : TP$

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{2b} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, conſequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita.

PROBLEMA CCXXXIII.

588. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad Ellipſin.*

 Circa

Tab. VII. *Fig.* 78. Circa diametrum AB deſcripta ſit Ellipſis AMB, ſintque KD & LH ſemiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD = PN = n, KC = p, DH = q, LH = r, DL = $ſ$, ſemidiameter AC vel CB = m, parameter = t, DQ = x, QM = y. Erit (§. 257 *Geom.*) KP = DN, & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Quare CP = DN — KC = $ſx : q - q$ & PM = QM — QN — PN = $y - rx : q - n$. Jam ex natura Ellipſis (§. 420),

$$t : 2m = PM^2 : AP.\ PB.$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, AP $= m + \frac{ſx}{q} - p$ & PB $= m - \frac{ſx}{q} + p$, adeoque AP. PB $= m^2 - p^2 + \frac{2pſx}{q} - \frac{ſ^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpſx}{2mq} - \frac{tſ^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{tſ^2x^2}{2mq^2} \quad - \frac{2tpſx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}$$

Sit ex. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x: erunt $r : q = 0$, $q = ſ$, $n = 0$, $p = 0$; hinc $t : 2m = c : b$, hoc eſt, $c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ſubſtituto pro $t : 2m$ valore ipſius ante invento $c : b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc ſemidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m : t = b : c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ conſtruatur Ellipſis AMB; erit CP $= x$, PM $= y$. Tab. VII. *Fig.* 78.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $n = 0$; conſequenter $ſ = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum eſt $= b : c$. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, ſeu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = aa$, ſeu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Eſt itaque ſemidiameter $\surd(aa + \frac{1}{4}dd)$. Quodſi ergo ſemidiametro $\surd(aa + \frac{1}{4}dd)$ & parametro $2c\surd(aa + \frac{1}{4}dd) : b$ deſcribatur Ellipſis, fiatque KC $= \frac{1}{4}d$; erit KP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit $2r : q = d : f$, adeoque $r : q = d : 2f$. Porro $r^2 : q^2 + tſ^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc eſt $d^2 : 4f^2 + tſ^2 : 2m.4f^2 = b : c$, conſequenter $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cſ^2$. Eſt denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, conſequenter $m^2 = a^2cſ^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \surd a^2cſ^2 : \surd(4bf^2 - cd^2)$. Hinc vero porro ad datam rationem $2m : t$ reperitur parameter t. Quare ſi parametro t & diametro $2m$ Ellipſis conſtruatur, fiatque CF $= 2f$, DF $= d$, ducta recta CQ ex C per F ſemiordinatæ PM continuatæ in Q occurrente, erit QM $= y$, CQ $= x$. Tab. VII. *Fig.* 77.

Locum rite eſſe conſtructum, eodem modo quo in Parabola oſtenditur. Etenim

CF

Tab. VII. *Fig.* 77.

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare $PM = y - \frac{dx}{2f}$, conſequenter

$$PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}.$$

Porro $CF : CD = CQ : CP$

$$2f : f = x : \frac{fx}{2f}$$

Quare $AP = \sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{fx}{2f}$ & $PB = \sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)}} - \frac{fx}{2f}$, conſequenter $AP.PB = \frac{aacf^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{f^2x^2}{4f^2}$. Eſt itaque $\frac{t}{2m}. AP.PB = (4bf^2 - cd^2)\, a^2 cf^2 : cf^2 (4bf^2 - cd^2) - (4bf^2 f^2 x^2 - cd^2 f^2 x^2) : 4cf^2 f^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$; conſequenter cum ſit in Ellipſi $\frac{t}{2m}. AP.PB = PM^2$ (§.420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in Ellipſi ſit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§.420); ſi $b = a$, hoc eſt, ſi parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, ſeu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ eſt æquatio ad Circulum (§. 377). Æquatio itaque localis ad Ellipſin degenerat in æquationem localem ad Circulum: ſi ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0.$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2pfx}{q} \qquad \begin{matrix} -m^2 \\ +p^2 \end{matrix}$$

Ceterum cum ex comparatione formulæ propoſitæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro conſtruendis locis ad Ellipſin atque ad Circulum ſufficit.

Ponamus ex. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deeſt, erit $r : q = 0$, conſequenter $f = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc eſt, $t = 2m$. Locus adeo planus eſt ad Circulum. Porro

$$-2n = -b \qquad -2tp : 2m = -c$$
$$n = \tfrac{1}{2}b \qquad 2p = c, \text{ ob } t = 2m.$$
$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

h. e. $\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = m^2$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$$

Quare ducta linea recta AB & in ea aſſumta $CN = GD = \tfrac{1}{2}c$, ſi porro fiat $GN = CD$, & ad AB perpendicularis $= \tfrac{1}{2}b$, atque ex centro C radio CG deſcribatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$. Tab. VII. *Fig.* 73.

Cum enim ſit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§.417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$. Porro, ob $PR = GN$ (§.257 *Geom.*) $= \tfrac{1}{2}b$, eſt $PM = y - \tfrac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$. Similiter $CP = PN - NC = x - \tfrac{1}{2}c$, adeoque $CP^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}cc$. Quare cum ſit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§.417 *Geom.*); erit $y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 + x^2 - cx + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$: quæ eſt æquatio localis ad conſtruendum propoſita.

PROBLEMA CCXXXIV.

590. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ad Hyperbolam circa diametrum deſcriptam.* Tab. VIII. *Fig.* 80.

Diametro tranſverſa $AB = 2m$ & parametro t deſcripta ſit Hyperbola AM, cujus centrum in C, ductiſque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis; fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Tab. VIII. *Fig.* 80.

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{ſx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459)

$$t : 2m = PM^2 : AP.\ PB$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP.\ PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 499) $= \frac{ſ^2x^2}{q^2} - \frac{2pſx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur $\frac{tſ^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$.

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tſ^2x^2}{2mq^2} \qquad + \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, Hyperbola eſt æquilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, ſi Hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, niſi quod $tm^2 : 2m$ ſigno — afficiatur.

Sit ex. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $ſ = q$; conſequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = aa$. Diameter adeo Hyperbolæ $2a$: unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri diameter poteſt. Quare ſi datis diametro & parametro Hyperbola AML conſtruatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Eſt enim $AC = CB = a$, adeoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, conſequenter $AP.\ PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Eſt itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$. Tab. VIII. *Fig.* 79.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in æquatione deſiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = 0$, $n = 0$ & quia (ob $r = 0$), DL coincidit cum DH, $ſ = q$. Quamobrem $-t : 2m = -c : b$, hoc eſt, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc eſt, (ob $t : 2m = c : b$,) $2p = a$ ſeu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ ſeu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$. *Fig.* 80.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; conſtructa Hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$: quod oſtenditur ut ante. *Fig.* 79.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy deſideratur; erit $r : q = 0$, conſequenter $ſ = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc eſt, $t = 2m$. Eſt itaque locus ad Hyperbolam æquilateram (§. 505). Porro

$$-2n = +b \qquad 2tp : 2m = -a$$
$$n = -\tfrac{1}{2}b \qquad 2p = -a, \text{ ob } t = 2m$$
$$p = -\tfrac{1}{2}a.$$
$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$
$$n^2 + m^2 = p^2$$
$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc eſt, $m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ conſtruatur Hyperbola æquilatera AML, fiatque CR =

Tab. VIII. *Fig.*79. CR $= \frac{1}{2}a$, KR $=$ GP $= \frac{1}{2}b$; erit KG $=$ RP $= x$, GM $= y$. Eſt enim PB $=$ CB $+$ CR $+$ RP $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & AP $=$ AR $+$ RP $=$ CR $-$ CA $+$ RP $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, adeoque AP. PB $= ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro PM $=$ GM $+$ GP $= y + \frac{1}{2}b$: adeoque PM^2 $= y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit PM^2 $=$ AP. PB (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, conſequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy deſideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = ſ$. Quare $t : 2m = 1$, ſeu $t = 2m$. Eſt itaque locus ad Hyperbolam æquilateram. Porro

$$-2n = -b \qquad 2p = a \qquad n^2 + m^2 - p^2 = 0$$
$$n = \frac{1}{2}b \qquad p = \frac{1}{2}a \qquad m^2 = p^2 - n^2$$
$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$
$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ conſtruatur Hyperbola æquilatera AML, factaque CF ex centro C $= \frac{1}{4}a$ & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipſi FP & NM ipſi FH parallelis; erit HN $= x$, NM $= y$. Eſt enim BP $=$ FP $-$ BF $= x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, AP $=$ FP $-$ FA $= x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque AP. PB $= x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro PM $=$ MN $-$ PN $= y - \frac{1}{2}b$, adeoque PM^2 $= y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit PM^2 $=$ AP. PB (§. 507), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA CCXXXV.

Tab. VIII. *Fig.*81. 591. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad Hyperbolam intra aſymptotos.*

Sint SA & AR aſymptoti Hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri aſymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo KD $=$ PN $= n$, KA $= p$, DH $= q$, LH $= r$, DL $= ſ$, DQ $= x$, QM $= y$, RI $= m$, AR $=$ DL $= ſ$: erit (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. *Fig.*81.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Ergo AP $=$ DN $-$ AK $= \frac{ſx}{q} - p$ &
PM $=$ QM $-$ PN $-$ NQ $= y - n - rx : q$.
Quare ob AR. RI $=$ AP. PM (§. 502).

$$mſ = \frac{ſyx}{q} - \frac{ſrx^2}{q^2} - py - \frac{ſnx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$mſq = ſyx - \frac{ſrx^2}{q} - pqy - ſnx + prx + pnq$$

$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{ſ} - nx + \frac{prx}{ſ} + \frac{pnq}{ſ}$$

$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{ſ} + \frac{prx}{ſ} + \frac{pnq}{ſ} = 0.$$
$$- nx - mq$$

Invenitur adhuc regula alia pro locis ad Hyperbolam intra aſymptotos, ſi valor ipſius x ponatur eſſe QM. Tab. VIII. *Fig.*82.

Sit nimirum IM Hyperbola, cujus aſymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QM cum aſymptoto AS, DL vero cum altera KR, & TM ipſi DH utcunque ducta parallela. Sit ut ante AK $= p$, KD $=$ PN $= n$, DH $= q$, DL $=$ AR $= ſ$, HL $= r$, RI $= m$, QM $= x$, DQ $=$ TM $= y$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = y : \frac{ſy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Er-

Tab. VIII. Fig. 82. Ergo AP $=$ DN $-$ AK $= ſy : q - p$ & PM $=$ QM $-$ QN $-$ NP $= x - ry : q - n$. Quare ob AR.RI $=$ AP.PM (§. 502)

$$mſ = \frac{ſxy}{q} - \frac{rſy^2}{q^2} - \frac{ſny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante uſi ſumus, reperitur.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{ſ} + \frac{pry}{ſ} + \frac{pnq}{ſ} = 0.$$
$$- ny - mq$$

Sit ex. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$: erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & hinc $q = ſ$, quia L cadit in H, $- pq : ſ = + fd : c$, hoc eſt, Fig. 81. ob $q = ſ$, $p = - fd : c$. Porro $+ pr : ſ - n = 0$, quia x in æquatione præſente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : ſ - mq = - abd : c$. Sed $pnq : ſ = 0$; ergo $mq = mſ = abd : c$. Quare ſi $ſ = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur AR $= ab : c$, & IR $= d$, atque conſtructa Hyperbola intra aſymptotos, porro OA $= fd : c$; erit OP $= x$, PM $= y$. Nam AP $= x + fd : c$ adeoque AP. PM $= xy + fdy : c$. Quare cum ſit AR. RI $= abd : c$, erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

adeoque $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$.

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc eſt, $r = b$, $q = a$. Porro $- pq : ſ = - c$. Ergo $p = ſc : a$. Cum x in æquatione deſit; $pr : ſ - n = 0$, ſeu $pr : ſ = n$, hoc eſt, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : ſ - mq = 0$, ſeu $pnq : ſ = mq$, vel $pn : ſ = m$, hoc eſt, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; conſtructio loci manifeſta eſt. Eſt enim AK $= ſc : a$, KD $= bc : a$, DH $= a$, HL $= b$, DL $=$ AR $= ſ$, RI $= bc^2 : a^2$, DQ $= x$, QM $= y$: His enim poſitis, erit AR. RI $= ſbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 *Geom.*).

Tab. VIII. Fig. 81.

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$a : ſ = x : \frac{ſx}{a}$$

Quare cum ſit KA $= ſc : a$, erit AP $= (ſx - ſc) a$. Eſt vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum ſit KD $=$ PN $= bc : a$, & QM $= y$, erit PM $= y - bx : a - bc : a$. Habemus adeo AP. PM $= \frac{ſxy}{a} - \frac{ſcy}{a} - \frac{bſx^2}{a^2} + \frac{bſc^2}{a^2}$.

Quoniam itaque AR. RI $=$ AP. PM, erit $\frac{ſxy}{a} - \frac{ſcy}{a} - \frac{bſx^2}{a^2} + \frac{bſc^2}{a^2} = \frac{bſc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut uſus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot Problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda ſunt criteria, unde judicium fieri poſſit, cum quanam formularum antecedentium comparanda ſit æquatio ad conſtruendum propoſita. Nimirum duo occurrere poſſunt caſus: aut enim in æquatione propoſita habetur* xy, *aut minus. Si in priori caſu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel ſaltem alterutrum, locus eſt Hyperbola intra aſymptotos; ſi quadrata indeterminatarum* x^2 *&* y^2 *diverſis ſignis afficiuntur, locus eſt Hyperbola circa diametrum deſcripta; ſi eadem quadrata eodem ſigno afficiuntur, ſitque coëfficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus eſt Parabola; ſi minor, Hyperbola; ſi major, Ellipſis. In caſu poſteriori, ſi unum tantum quadratorum indeterminatorum adſit, locus eſt Parabola; ſi utrumque eodem ſigno afficiatur, Ellipſis vel Circulus; ſi ſignis diverſis gaudeant, Hyperbola. Nempe in caſu ultimo Hyperbola eſt æquilatera, in penultimo Circulus, ſi terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifeſta ſunt ex accurata formularum generalium inter ſe collatarum contemplatione.*

Quod

Quod ſi quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas iſta ex parte oppoſita ſumenda eſt, quemadmodum in exemplis propoſitis a nobis factum.

PROBLEMA CCXXXVI.

593. *Conſtruere Rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus ſit æquale quadrato dato.*

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2, ſint latera rhomboidis x & y: erit per conditionem Problematis $xy = a^2$. Conſtruenda itaque eſt Hyperbola intra aſymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 488).

PROBLEMA CCXXXVII.

594. *Quadratum conſtruere, quod ſit æquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui eſt locus ad Hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 507).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = ſ$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Eſt vero $- tſ^2 : 2mq^2 = -1$, hoc eſt, ob $q^2 = ſ$. $t : 2m = 1$ ſeu $t = 2m$. Unde apparet, locum eſſe ad Hyperbolam æquilateram. Eſt præterea $2tpſ : 2mq = -b$, hoc eſt, ob $t = 2m$ & $ſ = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc eſt, $m^2 - p^2 = 0$, ſeu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Conſtructio ex conſtructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transverſa AB $= 2m$, pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia ſemidiametro in hoc caſu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, conſequenter in noſtro caſu in A cadit. Porro, ob HL $= 0$, puncta H & L adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, conſequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y eſt in P. Tab. VIII. Fig. 80.

Eſt enim BP $= b + x$, adeoque AP. PB $= bx + x^2$. Quare cum PM$^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA CCXXXVIII.

595. *Super data recta* AB *triangulum conſtruere, ita ut quadrata laterum* AC *& CB ſint in ratione data.* Tab. VIII. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB $= x$
AB $= a$ DC $= y$
erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 417 *Geom*) AC$^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, & CB$^2 = x^2 + y^2$; erit, per conditionem Problematis,

$$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$

$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$

$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Hæc æquatio comparanda eſt cum æquatione generali locorum ad Ellipſin, quia deeſt xy, & y^2 atque x^2 eodem ſigno afficiuntur (§. 592). Reperitur adeo (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = 0 \qquad r^2 : q^2 + tſ^2 : 2mq^2 = 1$$

hinc: $\qquad t : 2m = 1$

$$r = 0 \;\&\; q = ſ \qquad 2nr : q = 0 \qquad \text{h. e. } t = 2m$$

Tab. VIII. Fig. 83. Cum diameter $2m$ parametro æqualis ſit; locus ad conſtruendum propoſitus eſt Circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpſ}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$\text{h. e. } 2p = -\frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$p = -\frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\text{h. e. } \frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Eſt ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodſi igitur AL $= ac : (b-c)$, & radio CL $= a\sqrt{bc} : (b-c)$ deſcribatur circulus ECF; erit AD $= x$, DC $= y$. Nam ponatur brevitatis gratia AL $= p$, LF $= m$; erit DL $= p - x$, ED $= m - p + x$ & DF $= m + p - x$, conſequenter, ob ED. DF $=$ DC², $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$.

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad - m^2$$

hoc eſt, ſubſtitutis valoribus p & $p^2 - m^2$ erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA CCXXXIX.

Tab. VIII. Fig. 84. 596. *Duas rectas* AB *&* CD *ita ſecare in* E *&* F, *ut* AE. EB $=$ CF. FD.

Tab. VIII. Fig. 84.

Sit AB $= a$, AE $= x$
CD $= b$, CF $= y$
erit EB $= a - x$
FD $= b - y$

Quare $ax - xx = by - yy$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro Hyperbola. Eſt nempe

$$\frac{2r}{q} = 0 \ \& \text{ hinc } \frac{q = ſ}{q^2 = ſ^2} \quad \frac{r^2}{q^2} = 0 \quad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$-\frac{tſ^2}{2mq^2} = -1 \qquad \frac{-2n = -b}{n = \tfrac{1}{2}b} \qquad \frac{2tpſ}{2mq} = a$$

$$t : 2m = 1 \qquad\qquad 2p = a$$

$$t = 2m \qquad\qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc eſt, parameter diametro æqualis, Hyperbola eſt æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$ conſtruenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut ſit FH $=$ PN $= \tfrac{1}{2}b$ & CF $= \tfrac{1}{2}a$, erit HN $= x$ & MN $= y$. Eſt enim CP $= x - \tfrac{1}{2}a$; PM $= y - \tfrac{1}{2}b$, & AC $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$. Quare, ob AP.PB $=$ CP² $-$ AC² $=$ PM², Tab. VIII. Fig. 79.

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

PRO-

PROBLEMA CCXL.

Tab. VIII. Fig. 85. 597. *Super recta* AB *deſcriptus ſit ſemicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo ſunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.*

Sit AB $= a$, ED $= d$, AP $= x$, PM $= y$: erit PB $= a - x$, PN $= \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), PC $= \frac{1}{2}a - x$, NR $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 *Geom.*)

$$NC : NP = NR : NM$$

$$\tfrac{1}{2}a : v = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$$

Quare $PM = v - \frac{av - dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$; conſequenter $PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, ſubſtituto nimirum valore ipſius v^2, quæ æquatio in ſequentem reſolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h. e. $PM^2 : PA.\ PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M eſſe Ellipſin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLION.

598. *Apparet adeò curvam, quam fornicibus conſtruendis aptam prædicat* SERLIUS (k) *eſſe Ellipſin.*

COROLLARIUM.

599. Quoniam PN $= v$, PM $= \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$, erit $PN : PM = v : \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$ hoc eſt (§. 124) $= \frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = CG : CF$

(k) *Architect.* lib. I. c. I. f. m. 9. b.

PROBLEMA CCXLI.

600. *Super recta* HI *deſcribatur ſemicirculus* HGI. *Sit recta quæcunque* AB *bifariam diviſa in* C *& ex* C *erecta perpendicularis* CD $=$ GF. *Erecta perpendicularis* LN *fiat* DC : AC $=$ HL : AP, *& in* P *erigatur perpendicularis* PM $=$ NL. *Determinare locum, in quo ſunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.* Tab. VIII. Fig. 86.

Sit HF $=$ GF $=$ DC $= d$, AC $= a$, AP $= x$, PM $= y$: erit, ex hypotheſi,

$$AC : DC = AP : HL$$

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare $LI = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddxx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque, ex hypotheſi,

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Eſt igitur locus quæſitus Ellipſis, cujus ſemiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens adeo eſt, curvam, quam* Albertus DURERUS *& cum ipſo* Daniel HARTMANNUS (l) *fornicibus conſtruendis aptam prædicant, eſſe Ellipſin* Apollonianam.

PROBLEMA CCXLII.

602. *Rectam* DB *ita ſecare in* P *ſimulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *ſit æquale rectangulo ex ſegmentis partium* DP *&* PB. Tab. VIII. Fig. 87.

Sit DB $= a$, AC $= b$, DP $= x$, erit PB $= a - x$, conſequenter, per conditionem Problematis,

(l) *In der Bürgerlichen Bau-Kunſt*, f. 7. & ſeqq.

Tab. VIII. *Fig.* 87.

$$ax - xx = by$$
$$x^2 - ax + by = 0.$$

Eſt itaque locus ad Parabolam (§. 592).

Quodſi cum æquatione locali ad Parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = -a \qquad -tſ : q = b$$
$$\text{hinc } q = ſ \qquad n = \tfrac{1}{2}a \qquad t = -b$$
$$nn + tp = 0$$
$$\tfrac{1}{4}aa - bp = 0$$
$$\tfrac{1}{4}aa = bp$$
$$\tfrac{1}{4}aa : b = p$$

Eſt adeo parameter $= -b$. Quare parametro b deſcribenda eſt Parabola deorſum tendens AMB, cujus pars altera AD; ſeu quod perinde eſt, deſcribitur Parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit AK $= \frac{1}{4}aa : b$, erit KB $= \frac{1}{2}a$ (§ 388) $= \frac{1}{2}$DB, adeoque DB linea ad ſecandum propoſita. Ducta igitur PM ipſi AK parallela, erit PB $= x$, PM $= y$. Nam KP $=$ RM $= \frac{1}{2}a - x$ & AR $= \frac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - by$, conſequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA CCXLIII.

Tab. VIII. *Fig.* 88. 603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales ſecare.*

Sit MN $= a$, pars prima $= x$, ſecunda $= y$, erit tertia $= yy : x$ &, per conditionem Problematis,

$$x + y + yy : x = a$$
$$xx + xy + yy = ax$$
$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus ſit ad Circulum (§. 592); æquatio comparanda eſt, cum formula generali ad Circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc eſt, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{ſ^2}{q^2} = 1 \qquad 2n = 0.$$
$$\frac{1}{4} + \frac{ſ^2}{4} = 1 \qquad \text{hinc } \frac{2nr}{q} = 0$$
$$1 + ſ^2 = 4 \qquad n^2 = 0$$
$$ſ^2 = 3 \qquad -\frac{2pſ}{q} = -a$$
$$ſ = \sqrt{3} \qquad \frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$$
$$p = \frac{a}{\sqrt{3}}$$
$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$
$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Deſcribatur ergo radio AC $= a : \sqrt{3}$ ſemicirculus, fiat (ob valorem negativum ipſius r) HL : AL $= 1 : \sqrt{3}$, ob valorem ſcilicet ipſius r negativum triangulum ALH contraria ratione conſtruendum, ita ut angulus rectus ſit in L, qui in formula generali ſupponitur in H: ita enim prodit $ſ = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per Theorema *Pythagoricum*. Ducatur porro recta AHR. Quodſi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit AQ $= x$, QM $= y$. Nam (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. *Fig.* 88.

$$\text{AH : HL} = \text{AQ : QP}$$
$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde PM $= y + \frac{1}{2}x$ & PM$^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

Porro AH : AL $=$ AQ : AP

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde

Tab. VIII. *Fig.* 88.

Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ & $AP . PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo (§. 377),

$$y^2 + xy + \tfrac{1}{4}xx = ax - \tfrac{3}{4}x^2$$

$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

Scholion.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri poſſunt pro Curvis ſuperiorum generum, ad conſtruenda loca hyperſolida. Primus formulas generales computavit* Joannes Craigius *(a), earumque uſum deinde uberius expoſuit* Hospitalius *(b).*

CAPUT VIII.

De Conſtructione Æquationum ſuperiorum.

Problema CCXLIV.

605. *Æquationem quamcunque geometrice conſtruere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diverſas curvas transformetur, in quibus nempe ſint duæ indeterminatæ.
3. Conſtruantur duæ æquationes locales. Communis enim interſectio radices determinabit.

Scholion.

606. *Genuinum hoc æquationes conſtruendi artificium primus aperuit* Renatus Franciſcus Slusius, *Canonicus* Leodienſis *(c): quem poſtea ſecuti ſunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus, eam exemplis cubicarum imprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illuſtrabimus; quoniam ad has conſtruendas ſufficiunt, quæ de locis planis & ſolidis in capite præcedente tradidimus.*

(a) In *Tractatu de Figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis* p. 62. & ſeqq.

(b) *Traité analytique des Sect. coniq.* lib. 3. p. 206. & ſeqq.

(c) *Meſolabo* Part. 2. integra.

Problema CCXLV.

607. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio propoſita $y(y^2 + ab) = aac$ in hanc reſolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diverſas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§. 167 *Arithm.*)
hoc eſt, $= ax + ab : ac$
ſeu (§. 124.) $= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

IV. $x^2 + ax + bx = y^2 + cy$

$$x^2 + bx = cy$$
$$x^2 + \frac{by_2}{a} = cy$$

$$\text{V. } y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$$
$$y^3 + aby = aac$$

$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$
$$\text{VI. } xy + by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales:

$$\text{I. } y^2 - ax = 0$$
$$\text{II. } x^2 + bx - cy = 0$$
$$\text{III. } y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$
$$\text{IV. } y^2 - x^2 + cy - ax - bx = 0$$
$$\text{V. } y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$
$$\text{VI. } xy + by - ac = 0$$

Locus primus & ſecundus ſunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Ellipſin; ſextus ad Hyperbolam intra aſymptotos.

Equidem conſtructio æquationis abſolvi poteſt, duobus quibuſcunque locis combinatis; præſtat tamen nonniſi Circulum cum una ex Sectionibus conicis combinari, non tam quod Circulus ſit locus planus (ut vulgo cum CARTESIO ſentiunt;) ſed quia facilius deſcribitur Sectionibus coni.

Agedum itaque, conſtruamus æquationem propoſitam primum ope æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Locus prior conſtruitur, ſi parametro a Parabola deſcribatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP $= x$, PM $= y$ (§. 587). Tab. IX. Fig. 89.

Pro Circulo erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad 2n = c \qquad -2p = b - a$$

& hinc $q = ſ$ $\quad n = \frac{1}{2}c \quad -p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$

$(r^2 + ſ^2) : q^2 = 1$

ſeu $ſ = q$

$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$
$$\surd(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb) = m$$

Quodſi ergo radio AL $= m$ ſemicirculus AMB deſcribatur, ſumaturque LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ deorſum, quia valor ipſius p negativus, & KD $= \frac{1}{2}c$, atque DQ ipſi AB, QM vero inter K & A, ob valorem ipſius p negativum, ſi $b > a$, ipſi KD parallela ducatur: erit (§. 588, 589) origo indeterminatæ x in D, nempe DQ $= x$ & QM $= y$. Tab. IX. Fig. 90.

Si jam Circulus cum Parabola combinandus, quo eadem ſit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ ſuper AP cadere debet. Quare ſi fiat perpendicularis AK $= \frac{1}{2}c$ & altera KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum Circuli L & radius LA. Quodſi is deſcribatur, ſecabit Parabolam in unico puncto M. Dico, ſemiordinatam Parabolæ PM eſſe radicem veram æquationis, radices duas reliquas nonniſi imaginarias. Fig. 90. & 89.

Eſt nimirum AK $=$ PR $= \frac{1}{2}c$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque LA $= \surd(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$ qui eſt radius circuli per ſuperius demonſtrata, &, ſi PM $= y$, MR $= y - \frac{1}{2}c$. Porro AP $=$ KR $= yy : a$ (§. 391), conſequenter LR $= y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM^2 ſeu LA^2 $=$ LR^2

Tab. IX. Fig. 89. & 90.

$= LR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$,

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Quodſi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, conſequenter cum valor ipſius p ſit poſitivus, punctum K cadet ultra centrum L verſus B, & $KL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $KD = \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Conſtruamus porro eandem æquationem combinato Circulo cum Ellipſi. Quoniam locus ad Ellipſin eſt $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \qquad 2n = \frac{ac}{b}$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \frac{ac}{2b}$$

$$\& \; q = ſ$$

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpſ}{2mq} = 0 \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$-\frac{2tp}{2m} = 0 \qquad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$$

$$p = 0 \qquad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} = m^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$$

Eſt itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b. Ellipſis diametro $AB = \sqrt{(ac^2 : b)}$ & parametro t deſcribenda & in centro C erecta perpendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ ipſi AC & QM ipſi CF parallelis, erit $FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum Ellipſi, ut punctum D in F & DK ſuper FC cadat, hoc eſt, $FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat $FK = \frac{1}{2}c$ (eſt enim $b > a$, hinc $bc > ac$, conſequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius Circuli, qui deſcriptus Ellipſin in M ſecabit. Dico QM eſſe radicem æquationis. Tab. IX. Fig. 91.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac : 2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac : 2b$, $AP = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, $PB = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, $PM^2 = y^2 - acy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & $AP \cdot PB = ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura Ellipſis (§. 420),

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = QR = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y - \frac{1}{2}c$, $RL = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, conſequenter (§. 417 *Geom.*) $LF^2 = KL^2 + KF^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = ML^2 = MR^2 + RL^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$.

Unde

Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc eſt, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + cy - \frac{by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

ſeu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$

$a - b$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{aa} = x^2$$

$$\frac{y^4}{aa} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$y^4 = aacy - aby^2$$

$$y^3 = aac - aby$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Conſtruamus denique eandem æquationem, combinatis loco ad Hyperbolam intra aſymptotos $xy + by - ac = 0$ & loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Poſterioris conſtructionem jam tradidimus: alterius conſtructio elicitur comparatione æquationis propoſitæ cum formula generali pro locis ad Hyperbolam intra aſymptotos inſtituta. Eſt nempe (§. 591),

$\frac{r}{q} = 0 \quad p = 0 \quad -n = b \quad -mq = -ac$

$q = ſ \quad \frac{pr}{ſ} = 0 \quad n = -b \quad m = c \quad q = a$

Jungantur ipſi AR $= a$ recta RI $= c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt aſymptoti Hyperbolæ æquilateræ per punctum I deſcribendæ (§ 489). Fiat AD $= b$, quia valor ipſius b negativus: erit DT $= x =$ NM, IM $= y$ (§. *cit.*) Quod ſi jam Circulus cum Hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ ſuper DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur DK $= \frac{1}{2}c$ & ex K in L, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Radio DL deſcribatur Circulus & ex puncto interſectionis Circuli atque Hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc eſſe radicem æquationis. Tab. IX. Fig. 9… Tab. IX. Fig. 9… & 9…

Quoniam enim AR $= a$, RI $= c$, AD $=$ PN $= b$, NM $=$ DT $= x$, TM $=$ AP $= y$; erit AT $=$ PM $= b + x$ & ob AR. RI $=$ AP. PM (§. 501) $by + xy = ac$, conſequenter $x = \frac{ac}{y} - b$. Porro Kr $=$ NM $= x$, LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, DK $=$ Tr $= \frac{1}{2}c$. Ergo Lr $= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, rM $= y - \frac{1}{2}c$, & ob LM$^2 =$ Lr$^2 +$ rM^2 (§ 417 *Geom.*) $x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

ſeu $= (a - x - b)x$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc eſt,

$$y^2 - cy = \frac{aac}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y}$$

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$y - c)$

$$y^3 = a^2c - aby$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

Scho-

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui Tyrones ſunt in altioribus, quod tam operoſe conſtruxerimus æquationem, quæ per regulam* CARTESII *ope Circuli & Parabolæ admodum facile conſtruitur. Sed notent velim, geometricas æquationum conſtructiones nullius fere in praxi eſſe uſus, cum eidem ſatisfaciat methodus extrahendi radices per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi conſtructiones iſtiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA CCXLVI.

609. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 - aby = aac$.

Æquatio propoſita in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diverſæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro: $y : x = yy - ab : ac$

hoc eſt, $= ax - ab : ac$

ſeu (§. 124) $= x - b : c$

$$\text{II. } x^2 - bx = cy$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 - bx = cy$$

$$\text{III. } ax - x^2 + bx = y^2 - cy$$

$$ax = y^2$$

$$cy = x^2 - bx$$

$$\text{IV. } ax - cy = y^2 - x^2 + bx$$

$$x^2 - bx = cy$$

$$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$$

$a : b$ mult.

$$\text{V. } \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$$

$$y^3 - aby = aac$$

$$\frac{y^3}{a} - by = ac$$

$$\text{VI. } xy - by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy + bx - ax = 0$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy^2}{b} = 0.$

VI. $xy - by - ac = 0$

Locus primus & ſecundus ſunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Hyperbolam ſcalenam; ſextus ad Hyperbolam intra aſymptotos.

Cum æquationes locales nonniſi ſignis differant ab iis, in quas æquationem Problematis præcedentis reſolvimus; æquatio præſentis eodem fere modo conſtruitur, quo præcedentem conſtruximus: id quod in unico caſu, quo Circulus cum Parabola combinatur, oſtendiſſe ſuffecerit.

Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ conſtruitur ut in Problemate præcedente,

Tab. IX. Fig.93. ſi parametro a Parabola deſcribatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP $= x$, PM $= y$.

Pro loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589), $2r = 0$ & hinc $q = ſ$

$$2n = c \qquad 2p = b + a$$

$$n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quia ergo in Circulo origo indeterminatæ x diſtat a centro quantitate $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\frac{1}{2}c$, fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$ atque radio AH deſcribatur per verticem Parabolæ A Circulus, erit PM radix vera æquationis; QN & qn erunt falſæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$ (§. 417 *Geom.*), AP $= yy : a$ (§. 391), PD $=$ HR $= \frac{yy}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, MR $= y - \frac{1}{2}c$, conſequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA CCXLVII.

610. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 - aby = - aac$.

Æquatio propoſita $y^3 - aby = - aac$, hoc eſt, $aac = aby - y^3$ in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac.$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc eſt, $= ab - ax : ac$

ſeu (§. 124) $= b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2$$
$$bx - xx = cy$$

III. $ax - bx + xx = yy - cy$

$$ax = yy$$
$$cy = bx - xx$$

IV. $ax - cy = yy - bx + xx$

$$bx - xx = cy$$
$$\frac{by^2}{a} - xx = cy$$

$a : b$ mult.

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$aac = aby - y^3$$
$$ac = by - \frac{y^3}{a}$$

VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx = 0$
$ - ax$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx = 0$
$ - ax$

V. y^2

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & ſecundus ſunt ad Parabolam, tertius ad Hyperbolam æquilateram, quartus ad Circulum, quintus ad Hyperbolam ſcalenam, ſextus ad Hyperbolam intra aſymptotos.

Æquationes locales denuo nonniſi ſignis differunt ab iis, quas in Problemate 245, (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis ſuffecerit conſtructionem ope Parabolæ & Circuli oſtendiſſe.

Tab. IX. Fig. 94. Quoniam locus ad Parabolam $y^2 = ax$; Parabola denuo conſtruitur parametro a, & origo indeterminatæ x eſt in vertice axis A.

Pro Circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b - a$$

hinc

$$q = \int \qquad n = -\tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 95. Deſcribatur ergo, radio AC $= m$, ſemicirculus, ductaque FLS intervallo CL $= \frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit SQ $= x$, QM $= y$.

Tab. IX. Fig. 94. Quamobrem ſi Circulus cum Parabola combinatur, punctum S ſuper A & SL ſuper AD cadet. Quare ſi fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$; erit AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$ radius Circuli per verticem deſcribendi & PM radix vera æquationis. Tab. IX. Fig. 94.

Nam AP $= yy : a$ (§. 391), hinc DP $=$ HR $= yy : a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Porro MR $= y + \frac{1}{2}c$. Quare ob HM^2 $=$ MR^2 $+$ HR^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0 \quad \cdot aa$$

$$y^4 - abyy + aacy = 0 \quad : y$$

$$y^3 - aby + aac = 0$$

COROLLARIUM.

612. Si Circulus Parabolam tangit; duæ interſectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec ſecat; radices omnes ſunt impoſſibiles.

SCHOLION.

613. *Conſtructiones per Circulum & Parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis quas habet* CARTESIUS (*a*), *etſi alio modo erutæ.*

PROBLEMA CCXLVIII.

614. *Conſtruere æquationem cubicam* $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$. Subſtituatur ax pro y^2 in æquatione data.

erit $axy + aax - aby = aac$

II. $xy + ax - by = ac \quad \cdot y - a$

$$xy^2 + axy - by^2 - axy - a^2x + aby = acy - a^2c$$

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$

$$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$$

 III.

(*a*) *Geomet.* lib. III. p. 85. & ſeqq.

III. $x^2 - bx - ax = cy - by - ac$
$ax - y^2$

IV. $2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$
$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$
$ax = y^2$

V. $x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$
$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$

VI. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $xy + ax - by - ac = 0$

III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
$- ax + by$

IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
$+ by - bx$

V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
$- by$

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
$- ay$

Locus primus & tertius ſunt ad Parabolam; ſecundus ad Hyperbolam intra aſymptotos; quartus ad Circulum; quintus ad Hyperbolam æquilateram; ſextus ad Hyperbolam ſcalenam.

Tab. IX. *Fig.96.* Conſtruamus æquationem combinando Circulum cum Parabola. Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ conſtruitur, ſi parametro a Parabola deſcribitur; cujus vertex A origo ipſius x.

Pro Circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$\frac{2r}{q} = 0$ $\quad -2n = -c + b$ $\quad -2p = -2a - b$

hinc

$q = ſ$ $\quad n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$ $\quad p = a + \frac{1}{2}b$

$n^2 + p^2 - m^2 = ac$

$n^2 + p^2 - ac = m^2$

$\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)^2)} = m$

Jungatur ipſi IL $= a$ ad angulos rectos LR ipſi æqualis & reſecetur LH $=$ PN $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$: erit CR $= m$, adeoque radius Circuli, quo deſcripto habebitur IP $= x$ & PM $= y$. Tab. X. *Fig.97.*

Eſt enim NM $=$ PM $-$ PN $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque NM$^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP $=$ IP $-$ ID $= x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque DP$^2 =$ CN$^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit NM^2 + CN^2 (§. 417 *Geom.*) $=$ CM$^2 =$ CR$^2 =$ CH^2 + HR$^2 = \frac{1}{4}bb + aa + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita. Circulus itaque rite conſtructus.

Si jam Circulus cum Parabola combinatur, punctum I in verticem Parabolæ A & IP ſuper AP cadit. Quare fiat AL $= a$; erit LR$^2 = aa$ (§. 388), hoc eſt, LR $= a$. Fiat porro LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR radius Circuli per punctum Parabolæ R ex centro C deſcribendi, & ſemiordinata PM radix æquationis. Tab. IX. *Fig.96.* & Tab. X. *Fig.97.*

Nam PN $=$ LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura Parabolæ $y^2 : a =$ AP: unde DP $=$ CN $= \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum ſit (§ 417 *Geom.*) CM^2 ($=$CR^2) $=$ CN^2 + NM^2 erit $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a}$

+

$+ab+\frac{1}{4}bb+y^2+by+\frac{1}{4}bb-cy-\frac{1}{2}bc$
$+\frac{1}{4}cc$,

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}-y^2-\frac{by^2}{a}+by-cy+ac=0$$

$$y^4-a^2y^2-aby^2+a^2by-a^2cy+a^3c=0 \quad (y-a$$

$$y^3+ay^2-aby-a^2c=0$$

S C H O L I O N.

615. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum caſus reliqui conſtrui debeant, ut adeo plura addere ſupervacaneum judicemus.*

P R O B L E M A CCXLIX.

616. *Æquationem biquadraticam* $y^4+aby^2+a^2cy=a^3d$ *conſtruere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit I. $ax=y^2$. Hinc $x=y^2:a$

Hoc valore in æquatione data ſubſtituto prodibit

$$a^2x^2+aby^2+a^2cy=a^3d \quad (ab$$

$$\text{II.}\quad y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}=\frac{a^2d}{b}$$

Item $a^2x^2+a^2bx+a^2cy=a^3d \quad (a^2$

$$x^2+bx+cy=ad$$

$$\text{III.}\quad x^2+bx=ad-cy$$
$$ax=y^2$$

$$\text{IV.}\quad x^2+bx+ax=y^2+ad-cy$$
$$ax=y^2$$
$$x^2+bx=ad-cy$$

$$\text{V.}\quad ax-x^2-bx=y^2-ad+cy$$

Habemus adeo æquationes locales;

I. $y^2-ax=0$

II. $y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}-\frac{a^2d}{b}=0$

III. $x^2+bx+cy-ad=0$

IV. $y^2-x^2-cy-bx+ad=0$
$\qquad\qquad -ax$

V. $y^2+x^2+cy+bx-ad=0$
$\qquad\qquad -ax$

Locus primus & tertius eſt Parabola, ſecundus Ellipſis, quartus Hyperbola æquilatera, quintus denique Circulus.

Conſtruamus primum æquationem, Circulo cum Parabola $ax=y^2$ combinato. Conſtruatur Parabola MDN parametro a, erit DQ$=x$, QM$=y$. Tab.X. *Fig.*98.

Pro Circulo $y^2+x^2+cy+bx-ax-ad=0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q}=0 \quad \frac{f^2}{q^2}=1 \quad -2n=c \quad -2p=b-a$$
$$f=q \quad n=-\tfrac{1}{2}c \quad p=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b$$
$$n^2+p^2-m^2=-ad$$
$$n^2+p^2+ad=m^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+ad=m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+ad)}=m$$

Erecta in D perpendiculari DK$=$QP$=\frac{1}{2}c$ ob valorem ipſius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque KC$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ erit (§ 417 *Geom.*). DC$=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro DI$=a$ & continuata DC in H, donec HD$=d$, quæratur media proportionalis DL (§. 327 *Geom.*), quæ erit $\sqrt{ad}$: conſequenter LC$=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)}$ (§. 417 *Geom.*) eſt radius Circuli ex centro C per L deſcribendi, qui cum Parabolam ſecet in M & N; erit QM radix æquationis vera, RN falſa.

Tab.X. Fig.98. Eſt enim $PM = y + \frac{1}{2}c$; $DQ = KP = y^2 : a$ (§.388), $CP = KP - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§.417 *Geom.*) ob CL^2 ſeu $MC^2 = PM^2 + PC^2$, $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad \qquad aa$$

$$y^4 + aby^2 + aacy = a^3d.$$

Combinemus eundem Circulum cum Ellipſi, quam definit æquatio ſuperius reperta $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a^2d}{b} = 0$ Erit, vi Theorematis generalis (§.588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\frac{ac}{2b}$$

$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{ac^2}{4b} + ad)} = m$$

Conſtruatur locus ad Circulum, ut ante; nempe ut ſit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a$
Tab.X. Fig.99. $- \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*); conſequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§.417 *Geom.*).

Jam cum origo indeterminatæ x ſit in D, & valor ipſius n in Ellipſi etiam negativus, & $p = 0$; ex DK reſecetur $DG = ac : 2b$, & per G ducatur AB ipſis DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem deſcribatur Ellipſis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM eſſe radicem æquationis veram. Eſt enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura Ellipſis (§ 431) Tab.X. Fig.99.

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 (= BR.RA)$$

$$= y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§.417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc eſt,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2 \qquad b - a$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc

hoc eſt, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi ſuperiorum

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} a^2$$

$$y^4 = a^3 d - aby^2 - a^2 cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2 cy = a^3 d$$

PROBLEMA CCL.

617. *Conſtruere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipſius y^2 in æquatione propoſita ſubſtituatur : prodibit

$$a^2 x^2 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} ab$$

$$\text{II. } \frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2 d}{b}$$

Item $a^2x^2 + a^2bx = a^2cy - a^3d$

$$\text{III. } x^2 + bx = cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

$$\text{V. } ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2 d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx - cy + ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$
$\qquad\qquad - ax$

V. $y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$
$\qquad\qquad - ax$

Locus primus & tertius ſunt Parabolæ; ſecundus eſt Ellipſis; quartus Hyperbola æquilatera; quintus denique Circulus.

Dabimus conſtructionem per Circulum & Parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$. Eſt ergo parameter $= a$, $AP = x$, $PM = y$. Tab. X. *Fig.* 100.

Pro circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0. \quad -2n = -c \quad -2p = -a + b$$

hinc

$$q = ſ \qquad n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + p - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & ſumatur C pro centro Circuli. Erigatur $CK = \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat $AI = d$, $AH = a$; quæraturque media proportionalis $AL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*). Porro ſuper AC deſcribatur ſemicirculus, & in eo applicetur $GA = AL = \sqrt{ad}$; erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad)}$ (§. 417 *Geom.*) adeoque radius Circuli.

Quoniam in Parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$, origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a deſcribatur Parabola: dico PM eſſe radicem æquationis veram.

Eſt

Tab.X. *Fig.* 100. Eſt enim $MR = PM - PR = PM - CK = y - \frac{1}{2}c$; $AP = y^2 : a$ & $CR = KP = AP - AK = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, conſequenter ob $CG^2 = CM^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3 d$$

Cum loco ad Circulum deſcripto eodem modo, quo in Problemate præcedente, combinatur locus ad Ellipſin. Lubet vero adhuc conſtructionem dare per Circulum & Hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Eſt autem, vi Theorematis generalis (§. 590),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad -\frac{t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a-b$$

$$t = 2m \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad}$$

Tab.X. *Fig.* 101. Conſtructo nempe Circulo ut ante, ita ut ſit $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $CK = \frac{1}{2}c$, adeoque $CA = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$, $AH = a$, $AI = d$, adeoque $AL = AG = \sqrt{ad}$, conſequenter $GC = MC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad)}$; quia origo indeterminatæ y in Hyperbola ob valorem ipſius n negativum ab axe verſus ſiniſtram diſtat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat $KT = \frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipſi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis. Tab.X. *Fig.* 101.

Quoniam porro, ob valorem ipſius p negativum, indeterminatæ x origo a centro diſtat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat $FO = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $OQ = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$; erit O centrum & Q vertex Hyperbolæ æquilateræ; quæ ſi circa axem QS deſcribatur, Circulum in M ſecabit. Dico PM eſſe radicem æquationis veram.

Eſt enim $CR = KP = AP - AK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP - CK = y - \frac{1}{2}c$, conſequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT = y + \frac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO = x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, conſequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

ſeu ſubſtituto valore ipſius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ ſeu } ax = y^2$$

$$x^2 = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

His valoribus ipſorum x^2 & x in æquatione

x^2 +

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

ſubſtitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3 d$$

ſeu $y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$.

PROBLEMA CCLI.

618. *Conſtruere æquationum biquadraticam* $y^4 + 2by^3 + a^2 cy = a^3 d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3 d - a^2 cy$; æquatio data in hanc reſolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, conſequenter

$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Subſtituatur in hac æquatione ulterius valor ipſius y^2; prodibit

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

h. e. $a^3 d - a^2 cy - b^3 y = a^2 x^2 - ab^2 x$

III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2 x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$$

$$y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad = 0$
$\quad + \frac{b^3 y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad + cy$

Conſtruamus æquationem per Circulum & Parabolam. Pro Circulo cum ſit $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2 x}{a} - ax - ad = 0$; erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$r = 0 \quad \frac{ſ^2}{q^2} = 1 \quad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c.$

$ſ = q \quad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

$$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorſus modo conſtruitur, quo in Problemate 249, (§.

Tab.X. Fig. 102. (§. 616). Fit nempe DC $=p=b^2:2a+\frac{1}{2}a$, DO $=n=b^3:2a^2+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, HO $=a$, OL $=d$, erit OC $\sqrt{(n^2+p^2)}$, OL $=\sqrt{ad}$, & hinc LC $=\sqrt{(n^2+p^2+ad)}$. Ducatur OQ ipſi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatæ x in O.

Porro pro Parabola, ad quam $y^2+by-ax=0$, erit, vi theorematis generalis (§. 587),

$$\frac{r}{q}=0 \qquad -2n=b \qquad -\frac{tf}{q}=-a$$

$$\text{hinc } r=0 \qquad n=-\tfrac{1}{2}b \qquad t=a$$

$$q=f$$

$$n^2+tp=0$$
$$\tfrac{1}{4}bb+ap=0$$
$$ap=-\tfrac{1}{4}bb$$
$$p=-\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipſius n negativum fiat OK $=\frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipſi OQ parallela; ob valorem ipſius p negativum, fiat KA $=bb:4a$; erit in A Parabolæ vertex parametro a circa axem AR deſcribendæ, quæ Circulum ſecabit in M. Dico QM eſſe radicem æquationis veram.

Sit enim QM $=y$: erit MR $=y+\frac{1}{2}b$, adeoque RA $=\dfrac{yy+by+\frac{1}{4}bb}{a}$ (§. 391), conſequenter KR $=$ AR $-$ AK $=\dfrac{yy+by}{a}$. Hinc PC $=$ OQ ſive KR $-$ CD $=\dfrac{yy+by}{a}-p$ & PM $=$ QM $+$ QP $=$ QM $+$ DO $=y+n$. Quare cum ſit LC$^2=$ MC$^2=$ PM$^2+$ PC^2 (§. 417 *Geom.*); habebitur tandem

$$n^2+p^2+ad=\frac{y^4}{aa}+\frac{2by^3}{aa}+\frac{b^2y^2}{aa}-\frac{2py^2}{a}-\frac{2pby}{a}+p^2+y^2+2ny+n^2,$$

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}+\frac{2by^3}{aa}+\frac{b^2y^2}{aa}-\frac{2py^2}{a}-\frac{2pby}{a}\ y^2+2ny=ad.$$

Subſtituantur valores p & n ex æquatione ad Circulum: Quoniam $p=\frac{1}{2}a+b^2:2a$ & $n=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+b^3:2a^2$; prodibit

$$\frac{y^4}{aa}+\frac{2by^3}{aa}+\frac{b^2y^2}{aa}-y^2-\frac{b^2y^2}{aa}-by-\frac{b^3y}{aa}+y^2+by+cy+\frac{b^3y}{aa}=ad,$$

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}+\frac{2by^3}{aa}+cy=ad$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad aa}$$
$$y^4+2by^3+a^2cy=a^3d$$

SCHOLION.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes conſtruendas reſolvimus, ſunt ad curvam aliquam determinatam; ſed plurimum amplificatur methodus, ſi exemplo* SLUSII *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius Ellipſis vel Hyperbola unica, ſed infinitæ conſtructioni inſerviunt. Poteſt etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, ſicque Problema per Sectionem conicam datam conſtrui. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præſtetur.*

PROBLEMA CCLII.

620. *Æquationem datam reſolvere in æquationes locales, quæ ſint ad curvas indeterminatas.*

α) Subſtituatur pro y radice æquationis $az:v$, ubi pro v recta quælibet aſſumi poteſt, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut ſupra reſolvatur: id quod exemplo unico oſtendiſſe ſufficit.

Sit

Sit ex.gr. $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az:v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$; conſequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in ſequentem reſolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc eſt, $= vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

ſeu (§. 124) $= x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$vx = z^2$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$vx = z^2$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

hoc eſt, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$

v

$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas Sectiones conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$
II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$
} ad infinitas Parabolas.

III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitas Hyperbolas æquilateras.

IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitos Circulos.

V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$ ad infinitas Ellipſes.

VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$ ad infinitas Hyperbolas intra aſymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2x}{v}$ foret ad infinitas Parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: ſed cum locus ad Circulum degeneret in locum ad Ellipſin, ſimplicitati conſtructionis minime conſuleretur. Loca tamen ad Hyperbolam & Ellipſin determinatam ita reduci poſſunt ad Hyperbolas & Ellipſes infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

Ex.gr. Pro æquatione propoſita conſtruenda elicuimus ſupra (§. 607)

I. $y^2 + ax = 0$
II. $x^2 + bx - cy = 0$
} loca ad Parabolam.

III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ locum ad Circulum.

Quoniam $y^2 = ax$

erit $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

& ob $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

$$cy = x^2 + bx$$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas Ellipſes $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + \frac{vbx}{a} - ax = 0$ & locum ad infinitas Hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ conſtrui poteſt.

PROBLEMA CCLIII.

621. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem ſpeciei, quæ ſit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus eſt valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde eſt, ratio earundem.
2. Hi valores cum ſint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda: æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data ſubſtituendi, ut in quæſitam degeneret.

Ex. gr. Æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda eſt in aliam, quæ ſit ad Parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter Parabolæ, ad quam æquatio data exiſtit; erit $r = a$, conſequenter æquatio quæſita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda ſit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad Circulum, cujus radius r. Quoniam radius Circuli, ad quam eſt æquatio data (§. 589) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc)}$

erit $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$

$$(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = f$$
$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = g$$
$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione propoſita ſubſtitutis; prodit æquatio ad Circulum deſideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA CCLIV.

622. *Invenire regulam generalem conſtruendi omnes æquationes, tam cubicas quam biquadraticas.*

Sit deſcripta Parabola, & ex centro H radio AH Circulus ſecans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$ parameter Parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 404) Tab. X. Fig. 103.

$$a : \text{OM} + \text{AQ} = \text{PM} : \text{AP}$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque

$$\text{HR}^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb, \text{ \& RM}^2 = x^2 + 2dx + dd.$$

Habe-

Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}-\frac{4bcx}{a}+bb$$
$$+x^2+2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}+2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3+4cx^2+4c^2x-4abc=0$$
$$-2abx+2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, ſi habetur terminus ſecundus poſitivus, radices veras cadere verſus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda

$x^3+px^2 \pm qx \pm r=0$; erit

$4c=p \qquad 4c^2-2ab+a^2=q$

$c=\frac{1}{4}p \qquad 4c^2+a^2-q=2ab$

$$\frac{4}{16}p^2+a^2-q=2ab$$

$$\frac{p_2}{8a}+\frac{1}{2}a-\frac{q}{2a}=b$$

vel

$$a^2+4c^2-2ab=-q$$
$$a^2+\frac{4}{16}p^2+q=2ab$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{p_2}{8a}+\frac{q}{2a}=b$$

Porro

$$2a^2d-4abc=r$$
$$2a^2d=r+4abc$$
$$d=\frac{r}{2a^2}+\frac{2bc}{a}$$

hoc eſt $d=\frac{r}{2a^2}+\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}\mp\frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2aad-4abc=-r$$
$$2aad=4abc-r$$
$$d=\frac{2bc}{a}-\frac{r}{2a^2}$$

hoc eſt $d=\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}-\frac{r}{2a^2}$

Sit jam $pN=x$; reliqua ſint ut ante: erit $Nr=pN-rp=pN-DH=x-d$, $No=x-c$, $pm=x-2c$. Quoniam (§. 404) Tab. X. Fig. 103.

$$a : oN+AQ=pm : Ap$$
$$a : x=x-2c : \frac{xx-2cx}{a}$$

erit $Dp=Hr=\frac{x^2-2cx}{a}-b$. Habemus adeo $NH^2=Hr^2+Nr^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}+\frac{4bcx}{a}+b^2$$
$$+x^2-2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}+\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}-2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3-4cx^2+4c^2x+4abc=0$$
$$-2abx-2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, ſi terminus ſecundus ſit negativus, radicem æquationis veram eſſe verſus ſiniſtram. Sit adeo æquatio cum ea comparenda $x^3-px^2 \mp qx \mp r=0$; erit

$$-p=-4c$$
$$\frac{1}{4}p=c$$
$$4c^2-2ab+a^2=q$$
$$a^2+4c^2-q=2ab$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{2c^2}{a}-\frac{q}{2a}=b$$

 hoc

hoc eſt $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab$$
$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

hoc eſt $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$
$$4abc - r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc eſt $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$
$$4abc + r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc eſt $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Tab.X. *Fig.* 103. Eſt ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula, q ſeu coëfficiens termini tertii ſemper afficitur ſigno contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, ſi p & r diverſis ſignis afficiuntur: alias ſemper eſt $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evaneſcunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens eſt ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique ſi quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare ſi biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 + rx \mp ſ = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, ſed Tab.X. *Fig.* 103.

$$ſ = a^3 f$$
$$ſ : a^3 = f$$

Unde radius Circuli invenitur ut in Problemate 250 (§. 617), ſi fuerit $+ſ$, vel ut in Problemate 251 (§. 618), ſi fuerit $-ſ$. His obſervatis, regula eadem conſtructioni æquationum biquadraticarum ſatisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc eſt regula, quam* Thomas Bakerus (a) *centralem vocat & ad omnes caſus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ ſuperius tradidimus. Reſtat, ut uſum hujus doctrinæ aliquot exemplis illuſtremus.*

PROBLEMA CCLV.

624. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Si datarum	quæſitarum
major $= b$	minor $= y$,
minor $= a$	major $= x$

erit, per conditionem Problematis,

$$a : y = y : x$$
I. $$ax = yy$$
$$y : x = x : b$$
II. $$xx = by$$

III.

(a) In *Clave Geometrica catholica* p. 6.

$$a : y = x : b$$

III. $$ab = xy$$
$$x^2 = by$$
$$ax \quad y^2$$

IV. $$x^2 - ax = by - y^2$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 = by$$

V. $$x^2 + ax = y^2 + by$$
$$x^2 = by$$
$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$
$$ax = y^2$$

VI. $$\frac{ax^2}{v} + ax = \frac{aby}{v} + y^2$$
$$ax = y^2$$
$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$

VII. $$ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ } ad Parabolam.
II. $x^2 - by = 0$ }

III. $xy - ab = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Hyperbolas ſcalenas.

VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Ellipſes.

Quodſi in æquatione ad Hyperbolam intra aſymptotos $xy = ab$ ſubſtituatur valor ex æquatione ad Parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2 b = 0$.

Conſtructio itaque multis modis fieri poteſt, nimirum per Circulum & Hyperbolam intra aſymptotos, per Circulum & Hyperbolam æquilateram, per Circulum & infinitas Hyperbolas, per Circulum & infinitas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem BAKERI.

Pro Circulo, ad quem eſt $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad 2n = b \qquad 2p = a$$
$$\frac{ſ^2}{q^2} = 1 \qquad n = \tfrac{1}{2} b \qquad p = \tfrac{1}{2} a$$
$$ſ = q$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} bb + \tfrac{1}{4} aa)} = m$$

Quoniam in Parabola parametro a deſcripta, ad quam $ax = y^2$, origo ipſius x in vertice A exiſtit; Circulus per ejus verticem deſcribendus radio $= \sqrt{(\tfrac{1}{4} bb + \tfrac{1}{4} aa)}$. Fiat itaque AD $= \tfrac{1}{2} a$, DH $= \tfrac{1}{2} b$; erit centrum Circuli in H & PM $= y$, PA $= x$: id quod facile oſtenditur eodem, quo ſuperius, modo. Tab. IX. Fig. 93.

Pro Ellipſi, ad quam eſt $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{v} \qquad 2n = \frac{ab}{v}$$

hinc

$$ſ = q \qquad n = \frac{ab}{2v}$$
$$\frac{2tp}{2m} = a = \frac{2ap}{v} \qquad n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$2ap = av \qquad n^2 + \frac{ap^2}{v} = \frac{am^2}{v}$$
$$p = \tfrac{1}{2} v \qquad vn^2$$

$$\frac{vn^2}{a}+p^2=m^2$$

$$\frac{ab^2}{4v}+\frac{1}{4}v^2=m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab^2}{v}+v^2\right)}=m$$

Tab.X. Fig. 104. Conſtructio itaque Problematis per Circulum & Ellipſin hæc eſt: Jungantur $DF=b$ & $DE=a$ ad angulos rectos. Fiat $DK=\frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari $KC=\frac{1}{2}a$; erit $DC=\sqrt{(\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}aa)}$. Ex centro itaque C radio DC deſcribatur Circulus: ita locus prior erit conſtructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro Ellipſi fiat $DH=ab:2v$ & per H ducatur ipſi DE parallela IN. Fiat $HL=\frac{1}{2}v$ & $LI=LN=\frac{1}{2}\sqrt{(ab^2:v+v^2)}$; erit L centrum, IN axis Ellipſis: quæ ſi deſcribatur, ſecabit Circulum in M. Dico eſſe $DQ=x$, $QM=y$, conſequenter DE, QM, DQ, DF quatuor continue proportionales.

Eſt enim $CP=x-\frac{1}{2}a$ & $PM=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob $DC^2=CM^2=CP^2+PM^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, hoc eſt, $yy+xx-by-ax=0$: qui eſt locus ad Circulum. Porro $OM=y-ab:2v$, $LO=x-\frac{1}{2}v$ adeoque ob

$$v:a=IL^2-LO^2:OM^2 \quad (\text{§. } 431)$$

$$1:\frac{a}{v}=\frac{ab^2}{4v}-x^2+vx:y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2}-\frac{ax^2}{v}+ax=y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2+\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}-ax=0$$

ſed $y^2+x^2-by-ax=0$

Ergo $\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}+by-x^2=0$

$$x^2-by=0$$

$$x^2=by$$

Subſtituatur hic valor in æquatione $y^2+x^2-by-ax=0$; prodibit

$$y^2+by-by-ax=0$$

$$y^2=ax$$

Quare $a:y=y:x$ & (ob $x^2=by$) $y:x=x:b$. Sunt adeo $a, y, x,$ & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo Problema conſtruitur per Circulum & infinitas Hyperbolas ſcalenas.

Conſtructionem per Circulum & Hyperbolam intra aſymptotos adhuc apponimus. Jungantur nempe $RI=a$ & $AR=b$ ad angulos rectos, & per I deſcribatur Hyperbola intra aſymptotos RA, AT. Fiat $RD=\frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis $DC=\frac{1}{2}a$, tandemque ex centro C radio CA deſcribatur Circulus ſecans Hyperbolam in M: erit $TM=y$ & $AT=x$. Tab. XI. Fig. 105.

Nam ex natura Hyperbolæ (ob AR. RI=AT. TM) $ab=xy$ & $CK=x-\frac{1}{2}a$, $KM=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob $CM^2=CK^2+KM^2$, $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, conſequenter $yy+xx-ax-by=0$, ſeu $xx-ax=by-yy$. Eſt ergo, vi æquationis prioris,

$$a:x=y:b$$

Quare $x-a:a=b-y:y$ (§. 124)
Porro, vi æquationis poſterioris

$$x-a:b-y=y:x$$

Ergo (§. 124) $a:y=y:x$
Eſt vero etiam $a:y=x:b$ (§. *cit.*)
Ergo $a:y=y:x=x:b$ (§. 167 *Arith.*)

Quod-

Tab. XIII. *Fig.* 122. Quodſi AR & AS jungantur ad angulos rectos, & circa axem AR parametro a deſcribatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b Parabola altera AMI ſecans priorem in M; erit $AP = x$, $PM = y$: quem modum invenit MENECHMUS; ex conditione Problematis, abſque calculo analytico facile eruendum: & nos ideo apponimus, quia inde enata eſt methodus conſtruendi æquationes per duorum locorum combinationem. Eſt enim vi Parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi ſecundæ $x^2 = by$, adeoque $a : y = y : x$ & $y : x = x : b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, ſeu ponendo $2a = b$, $aab = y^3$. Quærendæ igitur ſunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi eſt $ma^3 = y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ ſunt duæ mediæ.

SCHOLION.

626. *Coincidit adeo Problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra peſtem quærentibus Oraculum propoſuiſſe fertur, cum Problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus obſervavit* HIPPOCRATES Chius): *unde & ipſum* Problema Deliacum *appellari ſolet. Celebre hoc Problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* PLATO, HERON Alexandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPPUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES & NICOMEDES *modis diverſis ab* EUTOCIO (*a*) *conſervatis ſolverunt.*

(*a*) In *Commentariis* in lib. 2 ARCHIMEDIS *de Sphera & Cylindro.*

PROBLEMA CCLVI.

627. *Rectam* AB *utcunque diviſam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut ſit* $CD : DB = AC^2 : CD^2$. Tab. XI. *Fig.* 106.

Sit $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$, erit $DB = b - y$; conſequenter, per conditionem Problematis,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ Problema ſolidum eſſe facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, & hinc

$$y : b - y = a^2 : ax$$
$$= a : x \quad (\S.\ 124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b - y = a : x$

$$y^2 : by - y^2 = a : x \quad (\S.124)$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x \quad (\S.\ cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I)

& $x^2 = by - y^2$ (III) ſubt.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad Circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad Parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad Ellipſin.

Nos

Nos duas dabimus conſtructiones, alteram per Parabolam & Circulum; alteram per Circulum & Ellipſin.

Quoniam æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus eſt, quam ut parametro a Parabola deſcribatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro Circulo, ad quem eſt $y^2 + x^2 - by = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \qquad \frac{2n = b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{n^2 = m^2}{m = n = \frac{1}{2}b}$$
$$p = 0$$

Tab. XI. *Fig.* 107. In vertice adeo Parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D, radio $AD = \frac{1}{2}b$, deſcribatur circulus; erit $PM = y$.

Demiſſa enim perpendiculari DR, erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, conſequenter ob $DA^2 = DM^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Pro Ellipſi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \quad \frac{2n = \frac{1}{2}b}{n = \frac{1}{4}b} \quad \frac{\frac{2tp}{2m} = \frac{1}{2}a}{p = \frac{1}{2}a}$$

hinc

$$q = ſ$$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$
$$\frac{1}{16}bb + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}bb + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$

Deſcribatur ergo Ellipſis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ & parameter $= \sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x. Tab. XI. *Fig.* 108.

Quare Circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL deſcribatur Circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Eſt enim $PC = QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Eſt porro $AC^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, conſequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : 2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{16}bb : \tfrac{1}{8}bb - x^2 + ax$$
$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}bb = \tfrac{1}{8}bb + ax - xx$$
$$2y^2 - by = ax - xx.$$

Porro $RM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, conſequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb + xx$$
$$y^2 - by = -xx$$

Quo valore ipſius $y^2 - by$ in æquatione ſuperiore ſubſtituto, prodit

$$y^2 - xx = ax - xx$$
$$y^2 = ax$$
$$y^2 : a = x$$
$$y^4 : aa = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Quod Ellipſis tranſeat per puncta D & L, ita oſtenditur. Eſt $KL = DK = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)}$ & KC = DH = $\frac{1}{2}a$, adeoque AK = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)}-\frac{1}{2}a$ & KB = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)}+\frac{1}{2}a$, conſequenter AK. KB = $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{8}b^2$. Sed 2KL² = $\frac{2}{16}b^2=\frac{1}{8}b^2$. Eſt itaque 2KL² = AK. KB, conſequenter punctum L, adeoque & punctum D in Ellipſi (§.420).

PROBLEMA CCLVII.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem conſtruere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi ſit y; erit (*§. 536 Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc eſt, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$

Porro $a : y = y : x$

$a : y = ax : bc$

adeoque $y : x = ax : bc$ (§.167 *Arithm.*)

$ax^2 = bcy$

III. $x^2 = bcy : a$

$ax = y^2$ ſubt.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$

& $2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad Parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Ellipſin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Hyperbolam ſcalenam.

Pro loco ad Circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (*§.589*),

$2n = bc : a$ $\quad$ $2p = a$

$n = bc : 2a$ $\quad$ $p = \frac{1}{2}a$

$n^2 + p^2 = m^2$

$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}aa)} = m$

Cum in Parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a deſcripta, origo indeterminatæ x ſit in vertice A, fiat AD = $\frac{1}{2}a$, DH = n = $bc : 2a$; erit H centrum Circuli radio HA deſcribendi: qui ſi deſcribatur, ſecabit Parabolam in M, eritque MP = y. Tab. IX. *Fig.93.*

Eſt enim AH² = AD² + DH² = $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2$, PA = $yy : a$ (§.391), & hinc DP = HR = $yy : a - \frac{1}{2}a$, MR = $y - bc : 2a$. Quare ob AH² = HM² = HR² + MR² = $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$ hoc eſt, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$

$y : aa$

$y^3 - abc = 0$

Tab. XI. *Fig.* 105. Jungantur RI $= b$ & RA $= c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipſi RI parallela & intra aſymptotos RA & AS per I deſcribatur Hyperbola; erit origo indeterminatæ x in A. Porro ut Circulus cum ea combinetur, fiat AD $= n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC deſcribatur Circulus Hyperbolam in M interſecans, erit TM ipſi AR parallela $= y$.

Eſt enim ob AR. RI $=$ AT. TM (§. 502) $bc = xy$. Præterea $CM^2 = AC^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa$, CK $=$ LT $=$ AT $-$ AL $= x - \frac{1}{2}a$ & MK $=$ TM $-$ TK $=$ TM $-$ AD $= y - bc : 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$.

hoc eſt, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

ſeu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Subſtituatur pro bc valor ipſius xy; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$ay^2 - xy^2 = aax - axx \quad a - x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro Ellipſi, ad quam eſt $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \qquad -\frac{2tp}{2m} = -a$$

hinc

$$q = ſ \qquad 2n = \frac{bc}{2a} \qquad \frac{2p}{2} = a$$

$$n = \frac{bc}{4a} \qquad p = a$$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa\right)} = m$$

Deſcribatur ergo Ellipſis, cujus axis AB $= 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, quia eſt ad axem in ratione ſubdupla. Ex centro C excitetur perpendicularis CH $= \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipſi AB parallela. Fiat DH $= a$: erit D origo indeterminatæ x. Ut Circulus cum eadem combinetur, fiat DI $= bc : 2a$ & IL $= \frac{1}{2}a$, & radio LD ex centro L deſcribatur Circulus, qui Ellipſin ſecabit in M. Dico QM eſſe $= y$ & DQ $= x$. Tab. XI. *Fig.* 109.

Eſt enim CP $=$ HQ $=$ DQ $-$ DH $= x - a$ & PM $=$ QM $-$ PQ $=$ QM $-$ DK $= y - bc : 4a$. Ex natura Ellipſis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$2 : 1 = \frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

Tab. XI. *Fig.* 109.

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro MR=QM—RQ=QM-DI =$y - bc : 2a$, LR=DQ—IL=$x - \frac{1}{2}a$. Quare ob DL²=LM²=LR² + RM²

$\frac{1}{2}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc eſt,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

ſeu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Subſtituto valore ipſius $ax - xx$ in æquatione ſuperiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipſorum x & x^2 denuo in æquatione ſuperiore ſubſtitutis prodit

$$y^2 - y^4 : a^2 = y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a}$$

$$y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non abſimili modo fit conſtructio per Circulum & Hyperbolam.

PROBLEMA CCLVIII.

629. *Datum angulum* ACB *triſecare.*

Tab. XI. *Fig.* 110. Concipiamus angulum ACB eſſe trifariam ſectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium ſubtenſæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales ſunt (§. 289 *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $= y$, EG $= x$.

Jam anguli EAB menſura eſt arcus DB (§. 314 *Geom.*). Anguli vero ACE menſura cum ſit arcus AE (§. 57 *Geom.*) ipſi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales ſunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*)

AC:AE=AE:EG AC:EC=AE:AG

$b : y = y : x$ ſed AC=EC

I. $yy = bx$ ergo AE = AG

Ducatur EF ipſi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*) = EDC (§. 312 & 233 *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 156 *Geom.*) = CED (§. 312 & 233 *Geom.*). Eſt igitur (§. 267 *Geom.*).

EC : ED = EG : GF

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, *per demonſtr.* ED = FH (§. 257 *Geom.*): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG, hoc eſt, 3AE = AB + FG, conſequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ ſeu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc reſolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a \quad (\text{§. 167 } Arith.)$$

III. $ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ add.

IV. $ay + yy = 4bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ ſubtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ add.

VI. $2yy + ay = 5bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ ſubtr.

VII. $ay - 2yy = bx - xx$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - 3by + ab = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.

III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad Parabolam.

IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad Circulum.

V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad Ellipſin.

VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad Hyperbolam ſcalenam.

Pro Circulo, ad quem eſt $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$-2n = a \qquad -2b = -4b$$

$$n = -\tfrac{1}{2}a \qquad p = 2b$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Tab. IX. *Fig.* 93. Quare Parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b deſcripta, fiat $AD = 2b$, $DH = \frac{1}{2}a$, & ex centro H radio DH deſcribatur Circulus; erit $QN = y$, $AQ = x$.

Eſt enim his poſitis $bx = y^2$ (§. 388), conſequenter $x = y^2 : b$, atque hinc $DQ = KH = 2b - y^2 : b$. Porro $KN = QN + QK = QN + DH = y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = KH^2 + KN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc eſt

$$\frac{y^4}{bb} - 3y^2 + ay = 0$$

$$y^3 - 3bby + abb = 0 \qquad y : bb$$

Eadem vero æquatio prodit, ſi in ſuperius inventa ſecunda æquatione $3y = a + xy : b$ ſubſtituitur valor ipſius $x = y^2 : b$ ex prima. Eſt nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc eſt, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Conſtructio per Circulum & Hyperbolam intra aſymptotos ita abſolvitur. Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $CK = \sqrt{(4bb + \frac{1}{4}aa)}$ radius Circuli ex centro C per K deſcribendi. Producatur CL in I, donec $LI = a$ & KL in T, donec $LT = b$, ſeu $KT = 3b$. Intra aſymptotos KTS per I deſcribatur Hyperbola. Dico QM eſſe radicem veram quæſitam ſeu ſubtenſam trientis arcus, qui metitur angulum triſecandum, radio b deſcripti: ſeu $QM = y$ & $KQ = x$. Tab. XI. *Fig.* III.

Eſt enim $QT = KT - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL.LT = QT.QM$ (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc eſt, $y^2 + ay = 4bx - x^2$.

Æquatio prior ad Hyperbolam in hanc reſolvitur analogiam;

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§. 124)

$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio poſterior ad Circulum hanc ſuppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 *Arithm.*)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Subſtitutis his valoribus in æquatione ad Circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$

$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2$$

$$y : b^2$$

$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

ſeu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.

Notan-

Tab. XI. *Fig.* 110. 111. Notandum vero eſt, cum eadem æquatio prodeat ſi ponatur $qm = y$, eſſe *qm* trientis complementi ad circulum ſubtenſam AI.

Conſtructiones reliquas facile proprio marte addent, qui ſuperiora rite perceperunt.

PROBLEMA CCLIX.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc eſt, a pro unitate aſſumta

$$a^{m-1} x = y^m$$

quæ eſt æquatio ad infinita Parabolarum genera (§. 519). Quare ſi parametro a Parabola primi generis ſit deſcripta & abſciſſa ſit ad parametrum ut numerus ſub ſigno radicali. ex. gr. ut 3 ad 1, ſi $\sqrt{3}$ deſideretur, vel ut 3 ad 2, ſi quæratur $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ejus ſemiordinata exprimet numerum quæſitum.

Eſt enim in caſu primo, ſi $a = 1$, $x = 3$, $y^2 = 3$, adeoque $y = \sqrt{3}$. Et ſi fuerit $a = 1$, $a : x = 3 : 2$, erit $3x = 2a = 2$, conſequenter $x = \frac{2}{3}$. Hinc $y^2 = \frac{2}{3}$, adeoque $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, deſcribendam eſſe Parabolam ſecundi generis ſeu cubici ordinis, ſi radices cubicæ dentur; Parabolam vero tertii generis ſeu biquadratici ordinis, ſi radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed poſſunt etiam Parabolæ inferiores ſatisfacere radicibus ſuperioribus. Sit enim ex. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem Problematis erit

$$1 : \sqrt[3]{5} = a : y$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Conſtruetur adeo Problema per Parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a : y = y : x$

erit I. $y^2 = ax$

Æquatio propoſita $5a^3 = y^3$ reſolvitur in hanc analogiam:

$$a : y = y^2 : 5a^2$$
$$= ax : 5a^2$$
$$= x : 5a$$

unde $y : x = x : 5a$

$$x^2 = 5ay$$

$y^2 = ax$ vi num. I.

II. $y^2 + x^2 = 5ay + ax$

Æquatio prima eſt ad Parabolam & ſecunda ad Circulum. Unde æquatio $y^3 = 5a^3$ conſtruitur ut ſupra.

PROBLEMA CCLX.

631. *Invenire puncta quotcunque, quæ ſint in curva datæ æquationis.*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ deſcribendæ aſſumatur, pro arbitrio determinentur abſciſſæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad ſingulas abſciſſas.
3. Quoniam abſciſſa determinata eſt, æquatio data pro determinata recte habetur. Conſtruatur itaque per methodum ſupra expoſitam: ita enim invenietur ſemiordinata abſciſſæ reſpondens.

Ex. gr. Sit conſtruenda Parabola ſecundi generis ſeu cubici ordinis $aav = y^3$. Aſſumta igitur pro abſciſſa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$\text{I.} \quad ax = y^2$$

Æquatio propoſita in hanc reſolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$

hoc eſt $\quad ax : av$

ſeu $\quad x : v$ (§. 124)

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 *Arithm.*)

$$x^2 = vy$$

addatur $y^2 = ax$

erit II. $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

Ope igitur æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos Circulos (quia v infinitis modis determinari poteſt & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in Paraboloide cubicali inveniuntur. Eſt enim pro Circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = v \qquad 2p = a$$

$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Tab. XI. Fig. 112. Quare Parabola parametro a deſcripta, fiat portio axis AK $= \tfrac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A deſcribatur Circulus, erit QM ſemiordinata reſpondens abſciſſæ in Paraboloide cubicali, quæ eſt ipſius KC dupla. Ut igitur plures ſemiordinatæ determinentur, ut quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem Parabolæ ducendi ſunt Circuli alii in punctis adhuc aliis Parabolam interſecantes.

Nam ſi KC $= \tfrac{1}{2}v$ & QM $= y$; erit AQ $= yy : a$, KQ $=$ CP $=$ AQ $-$ AK $= yy : a - \tfrac{1}{2}a$, PM $= y - \tfrac{1}{2}v$. Quamobrem ob AC^2 $=$ AK^2 $+$ KC^2 $=$ CM^2 $=$ CP^2 $+$ PM^2 (§. 417 *Geom.*) $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}vv = y^4 : aa - y^2 + \tfrac{1}{4}aa + y^2 - vy + \tfrac{1}{4}vv$, hoc eſt,

$$y^4 : aa = vy$$

$$y : aa$$

$$y^3 = aav$$

Eſt ergo 2KC abſciſſa & QM ipſi reſpondens ſemiordinata in Paraboloide cubicali.

Sit conſtruendus Circulus ſecundi generis, ad quem eſt $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in conſtructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$

erit I. $vx = yy$

Porro $v : y = vx : av - v^2$

hoc eſt $y : x = x : a - v$ (§. 124)

Itaque $ay - yv = xx$

Addatur $\quad vx = yy$

erit II. $yy + xx + vy - ay - vx = 0$.

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas Parabolas & poſterioris ad infinitos Circulos determinantur quotcunque ſemiordinatæ ad abſciſſas quotcunque in Circulo ſecundi generis aſſumptas.

Parametro nimirum v deſcribitur Parabola, in qua abſciſſa x, ſemiordinata y. Pro Circulo vero eſt, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = v - a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}v$$

$$q = ſ$$

$$-\frac{2pſ}{q} = -v \qquad m^2 = n^2 + p^2$$

$$-2p = -v \qquad = \tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2$$

$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2)}$$

Fiat itaque AD $= \tfrac{1}{2}v$, DH $= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}v$ & radio AH $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - av + \tfrac{1}{2}v^2)}$ deſcribatur Circulus ex centro H tranſiens per verticem Parabolæ A, erit AP $= x$ & PM $= y$. Tab. X. *Fig.* 93.

Ipſa tamen conſtructio moleſtior eſt antecedente, quia continuo nova Parabola deſcribenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyſeos finitorum.

ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA, ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADENS.

SECTIO PRIMA, DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT PRIMUM.

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.

1. CALCULUS *differentialis* eſt Methodus quantitates differentiandi, hoc eſt, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities ſumta datam adæquat.

DEFINITIO II.

2. *Infiniteſima*, ſeu *quantitas infinite parva*, eſt particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis exiſtat, ſeu quæ omni aſſignabili minor.

COROLLARIUM I.

3. Infiniteſima itaque reſpectu ejus quantitatis, cui incomparabilis exiſtit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni aſſignabili minor, hoc eſt, nullus.

COROLLARIUM II.

4. Hinc duæ quantitates infiniteſima differentes æquales ſunt. Cum enim infiniteſima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (*§. 3*); una alteri ſubſtitui poteſt. Sunt igitur æquales (*§.15 Arithm.*).

Scholion.

5. *Ut natura infiniteſimarum rite intelligatur, ad ſequentia animum advertiſſe juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulviſculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulviſculi cenſetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, ſive pulviſculum illud vertici adhæreat, ſive abigatur; quantitas ejus diametri in præſente negotio pro nihilo habenda, hoc eſt, infinite parva exiſtit. Similiter in Aſtronomia diameter Telluris reſpectu Fixarum habetur pro puncto ſeu infiniteſima: idem enim obſervaretur motus primus, ſi Tellus eſſet punctum individuum. Eodem etiam modo in Eclipſibus lunaribus computandis Terra pro ſphæra perfecta, conſequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infiniteſimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris ſuper diſco Lunæ, ſi Terra ſphæra perfecta eſſet. Idem vero in abſtractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere Veteres & inter eos demonſtratores rigidiſſimi,* Euclides *(a) atque* Archimedes *(b). Ex. gr. ſi a linea data auferatur ipſius dimidium, ut habet* Euclides, *ſeu, quod perinde eſt, pars alia quantacunque, & a reſiduo rurſus ipſius dimidium aut pars alia ſimilis primum ablatæ, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc eſt, ad infiniteſimam. Apparet adeo hinc, nomen infiniteſimæ eſſe reſpectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus reſpectu infiniteſima dicitur. Ex. gr. diameter Telluris in Eclipſibus lunaribus eſt infinite magna reſpectu altitudinis montium; ſed eadem tamen eſt infinite parva reſpectu diſtantiæ Fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod diſtincta continui ac infiniti notione deſtituti neſcio quæ phantaſmata ſibi fingunt, infiniteſimas & infiniteſimarum infiniteſimas pro entibus realibus habeas: a quo ipſe Calculi infiniteſimalis inventor, illuſtris* Leibnitius, *alienus. (c)*

(a) *Element.* Lib. 10. prop. 1.

(b) In præfatione ad *Quadraturam Parabolæ*, & in ſcriptis ejus omnibus.

Definitio III.

6. Infiniteſimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, ſi ſpectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir ſummus Newtonus (quem Angli ſequuntur) infiniteſimas *Fluxiones* vocat, quia eas conſiderat veluti momentanea quantitatum incrementa, ex. gr. lineæ fluxu puncti, aut ſuperficiei fluxu lineæ, aut ſolidi fluxu ſuperficiei genita.

Corollarium.

7. Cum itaque ſolæ quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, conſtantibus vero nihil accedat, (§. 375 *Analyſ. finit.*); differentiale quantitatis conſtantis nullum eſt, ſed variabiles tantum aliquod admittunt.

Hypothesis.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa tamen littera* d. Ex. gr. differentiale ipſius x dicatur dx; differentiale ipſius y dicatur dy. *Eſt autem* dx *quantitas poſitiva, ſi* x *continuo creſcit; negativa, ſi decreſcit.*

Scholion.

9. *Angli cum* Newtono *pro* dx *ſcribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *ſed commodior eſt* Leibnitiana

(c) Vide *Acta Eruditorum* A. 1712. p. 167.

nitiana *differentialium deſignatio, qua omnes reliqui utuntur, quia ſi differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confuſio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

COROLLARIUM I.

10. Quoniam quantitates conſtantes primis alphabeti litteris indigitamus (§. 376 *Analyſ. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (§. 7).

COROLLARIUM II.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis adeo eſt differentiatio quantitatum per additionem aut ſubtractionem compoſitarum.

PROBLEMA I.

12. *Differentiare quantitates ſe mutuo multiplicantes.*

RESOLUTIO.

I. Si quantitates duæ ſe mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; ſumma duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$, erit differentiale quæſitum, hoc eſt, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.

Tab.I. Fig. 1. xy repræſentat rectangulum ABDC, cujus latus unum AC $= x$, alterum DC $= y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in CL $= x + dx$ & CD in CE $= y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipſius xy eſt differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodſi, in rectangulo ALHB $= ydx$, AL $= dx$ ſumatur pro conſtante; erit HGFB $= dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, eſſe idem rectangulum BHGF differentiale ipſius DBFE. Quamobrem HBFG ſeu $dxdy$ reſpectu rectangulorum ALHB & DBFE, ſeu ydx & xdy, habetur pro nullo, conſequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, ſeu differentiale ipſius xy eſt $ydx + xdy$. *Q. e. d.* Tab.I. Fig. 1.

II. Si plures quantitates ſe mutuo multiplicent, ex. gr. ſi fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, conſequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per caſ.* 1. Sed $dt = vdx + xdv$, *per caſ.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ ſubſtitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum eſſe in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus ſit, ſi plures quantitates ſe mutuo multiplicent. Sit enim ex. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, conſequenter $d(tz) = zdt + tdz$, *per caſ.* 1. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, *per caſ.* 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + zxydv + vxydz$.

IV. Quodſi creſcente una variabili altera y decreſceret; evidens eſt, fore $ydx - xdy$ differentiale ipſius xy.

COROLLARIUM I.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM II.

14. Cum 1, 2, 3, 4 &c. exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4, &c. ſint earundem logarithmi, poſito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 *Arithm.*); logarithmi vero dignitatum decreſcentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. ſint $-1, -2, -3, -4$ &c. (§. 351 *Arithm.*) erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, conſequenter $d(1:x^m) = d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum ſit $1 = x^0$ (§. 55 *part.* 1.), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part.* 1.), adeoque $d(1:x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM III.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analyſ. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit. & præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = \frac{n}{m} dx \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1:\sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1} dx = -\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHOLION.

16. *Quodſi cuipiam non ſatis manifeſtum videatur, quomodo Corollaria duo poſteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo inveſtigare poteſt: quem in ſequente Problemate exponimus, inprimis cum ejuſdem methodi uſus eſſe poſſit, quoties in formulis compoſitis differentiandis aqua hæret.*

PROBLEMA II.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ *&* $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$-\frac{mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42, 54 *part.* 1.)

h.e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§. 54 *part.* 1.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13)

hoc eſt, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 *part.* 1.)

$: my^m : y$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

ſeu $\frac{nx^{n:m}\, x^{n-1}}{mx^n} dx = dy$

$\frac{nx^{n:m}}{m} x^{-1} dx = dy$ (§. 54, *part.* 1.)

hoc eſt, $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} zdx + x^{n:m} dz$ (§. 12.)

$-nx$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{m}zdx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}}dx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{2n:m}}dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

$$-\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

h. e. $-\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus caſibus eaſdem formulas, quas ſuperius elicuimus (§. 14, 15.)

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum eſſe arbitror, formulas in Problemate repertas ſubire vicem regularum, juxta quas in caſibus ſimilibus inſtituitur differentiatio.*

PROBLEMA III.

19. *Differentiare quantitates ſe mutuo dividentes $x:y$.*

RESOLUTIO.

I. Sit $x:y = v$

erit $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \text{ (§. 12)}$$

$$dx - vdy = ydv$$

hoc eſt $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$$

ſeu $(ydx - xdy):y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale diviſoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in diviſorem. 2. Factum prius ex poſteriore auferatur. 3. Reſiduum per quadratum diviſoris dividatur. Quotus eſt differentiale quantitatum ſe mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy:vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy:vz = t:w$. Sed $d(t:w) = (wdt - tdw):w^2$, *per caſ.* 1. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t:w) = d(xy:vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv):v^2z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque caſui ſatisfacere.

CAPUT II.

De uſu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA IV.

20. *Invenire ſubtangentem in curva algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua, erit P*p* differentiale abſciſſæ, & demiſſa perpendiculari MR = P*p* (§. 226 *Geom.*), R*m* differentiale ſemiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Tab. I. *Fig.* 2.

 M*m*

Tab. I. *Fig.* 2. Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteriſticum* appellari ſolet, quia lineæ curvæ per illud a ſe invicem diſtinguuntur. Ob paralleliſmum rectarum PM & *pm* (§. 370 *part.* 1), angulus $MmR = TMP$ (§. 233 *Geom.*). Quare $\triangle MmR \backsim \triangle TMP$ (§. 267 *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodſi, ex æquatione curvæ cujuſcunque data, in expreſſione ſubtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipſius dx ſubſtituatur: quantitates differentiales evaneſcunt, proditque valor ſubtangentis in quantitatibus communibus.

Tab. I. *Fig.* 4. Idem valor eruitur, ſi convexitas curvæ refertur ad axem AT.

COROLLARIUM I.

21. Pro Parabola *Apolloniana* eſt:

$$ax = y^2 \quad (\S. 388\ part.\ 1)$$

Hinc $$adx = 2ydx \quad (\S. 12)$$

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$: prorſus ut ſupra (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

22. Pro infinitis Parabolis (§. 519 *part.* 1.)

$$a^{m-1} x = y^m$$

$$a^{m-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\S. 12)$$

$$dx = my^{m-1} dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1} x : a^{m-1} = mx$.

Ex. gr. Cum in Paraboloide cubicali $m = 3$; erit ſubtangens $= 3x$: cum in ſurdeſolidali $m = 5$; erit ſubtangens $= 5x$.

COROLLARIUM III.

23. Pro Circulo eſt (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a - 2x) dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2xx) : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc eſt, PC : PB = AP : PT, conſequenter $PC. PT = AP. PB$ (§. 378 *Geom.*) $= PM^2$ (§. 377 *part.* 1.) Tab. I. *Fig.* 3.

Ergo $AT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ hoc eſt, PC : PA = CA : AT.

COROLLARIUM IV.

24. Pro infinitis Circulis eſt (§. 524 *part.* 1.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$$

$$dx = \frac{(m+1)y^m dy}{max^{m-1} - (m+1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$, & $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$. Cum itaque in Circulo ſecundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$, & $PT = (2ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM V.

25. Pro Ellipſi *Apolloniana* eſt (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc

Tab. I. Fig. 3. Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$2aydy : (ab - 2bx) = dx$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = 2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorſus ut ſupra (*§.* 440 *part.* 1).

Corollarium VI.

26. Pro infinitis Ellipſibus eſt (§. 522 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1} dx$$

$$dx = \frac{(m+n) ay^{m+n-1} dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}}$$

$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n) ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}}$ $= (m+n) bx^m (a-x)^n : (mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1})$ = [diviſione per $bx^{m-1}(a-x)^{n-1}$ facta] $(m+n)(ax-x^2) : (ma - mx - nx)$, & hinc

$AT = (max - mxx + nax - nxx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m+n)x)$.

Cum adeo in Elliptoide cubicali ſit $m=2$, $n=1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

Corollarium VII.

27. Pro Hyperbola *Apolloniana* eſt (*§.* 459 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ prorſus ut ſupra (§. 491 *part.* 1.)

Corollarium VIII.

28. Pro infinitis Hyperbolis, cum ſit $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$ (*§.* 525 *part.* 1.): reperietur, ut ante pro infinitis Ellipſibus, $PT = (m+n)(ax + x^2) : (ma + (m+n)x)$ & $AT = nax : (ma + (m+n)x)$.

Corollarium IX.

29. Pro Hyperbola intra aſymptotos eſt (*§.* 502 *part.* 1.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = - xdy$$

$$PT = ydx : dy = - xdy : dy = - x$$

Quoniam valor ſubtangentis eſt negativus, id indicio eſt, ſubtangentem PT eſſe ſumendam in oppoſitum originis abſciſſæ AP. Differentiale enim ipſius xy eſſe debebat $ydx - xdy$, quia y decreſcit (*§.* 12). Tab. I. *Fig.* 4.

Corollarium X.

30. Pro infinitis Hyperbolis intra aſymptotos, eſt

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$- mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$

$$- mxdy : ny = dx$$

$$PT = ydx : dy = - mxydy : nydy = - \frac{mx}{n}.$$

Corollarium XI.

31. Pro Ciſſoide Dioclis eſt (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (a - x^3)$$

$$2ydy = (3ax^2dx - 3x^3dx + x^3dx) : (a-x)^2$$

$$2y(a - x)^2 dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2y^2(a - x)^2 : (3ax^2 - 2x^3) = 2x^3(a-x) : (3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - xx) : (3a - 2x)$.

Habemus itaque:

$3a - 2x : a - x = 2x : PT$

ſive $\frac{3}{2}a - x : a - x = x : PT$

h. e. $PB + GB : PB = AP : PT$. Tab. VI. *Algeb. Fig.* 63.

CoROL-

Corollarium XII.

Tab. I. *Fig.* 2. 32. Denique pro omnibus curvis algebraicis eſt (§. 385 *part.* 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$

$$a = 1 \quad m = 2 \qquad b = -a \quad n = 1$$

$$cy^r x^s = 0 \qquad f = 0.$$

$$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

His valoribus in formula ſubtangentis generaliſſima ſubſtitutis, prodit ſubtangens Parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0 x^0) : (1.-ax^{1-1} + 0.\ 0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut ſupra (§. 21).

Similiter fit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$

$$a = 1 \quad m = 2 \qquad b = -a \quad n = 1$$

$$bx^n = x^2 \qquad cy^r x^s = 0$$

$$b = 1 \quad n = 2 \qquad c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut ſupra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$ay^m = y^3 \qquad bx^n = -x^3$$

$$a = 1 \quad m = 3 \qquad b = -1 \quad n = 3$$

$$cy^r x^s = -axy \qquad f = 0$$

$$c = -a \quad r = 1 \quad s = 1$$

His valoribus in formula ſubtangentis generali ſubſtitutis, prodit ſubtangens curvæ, ad quam eſt æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1x^2 + 1.-ayx^0) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$; conſequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, [ſubſtituto nempe ex æquatione ad curvam ipſius $y^3 - x^3$ valore axy] hoc eſt, $axy : (3x^2 + ay)$. Tab. *Fig.*

Scholion.

33. *In applicatione formulæ generalis, bx^n & $cy^r x^s$ totidem terminis ſigillatim comparantur, quot in dato caſu ſpeciali eiſdem reſpondent, ſingulique valores ſimul in formula ſubtangentis ſubſtituuntur, propterea quod bx^n repræſentat omnes terminos, in quibus ſola indeterminata x occurrit, & $cy^r x^s$ omnes terminos, in quibus utraque indeterminata x & y locum habet* (§. 385 part. 1.)

Corollarium XIII.

34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

Problema V.

35. *Determinare ſubnormalem* PH *in linea algebraica quacunque.*

Resolutio.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $TP : PM = PM : PH$ (§. 409 *part.* 1.)

hoc eſt, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodſi, ut in Problemate præcedente, in expreſſione ſubnormalis PH generali valor ipſius dy ſubſtituatur, differentiales quantitates evaneſcunt, & valor ſubnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

Co-

COROLLARIUM I.

Tab. I. *Fig.* 2. 36. In Parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo PH $= ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut ſupra reperimus (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

37. In infinitis Parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque PH $= ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54 *part.* 1.) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519 *part.* 1.) $= y^2 : mx$, ut adeo ſit $mx : y = y$: PH.

COROLLARIUM III.

Tab. I. *Fig.* 3. 38. In Circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc eſt, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx =$ PC. Apparet adeo, in Circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere; conſequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos inſiſtere.

COROLLARIUM IV.

39. In infinitis Circulis $(max^{m-1} dx - (m+1)x^m dx : (m+1)y^m = dy$. Unde ſubnormalis PH $[ydy : dx] = (max^{m-1}y - (m+1)x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1}) = (may^2 - (m+1)xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$. Eſt itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1} a - x$: PH.

COROLLARIUM V.

Tab. I. *Fig.* 2. 40. In infinitis Ellipſibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx) : (m+n) ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde PH $= ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m(a-x)^{n-1}y) : (m+n)ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2 - nbx^m(a-x)^{n-1}y^2) : (m+n)ay^{m+n}$ ſive $: (m+n)bx^m(a-x)^n = (my^2(a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Eſt itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n} a - x$: PH.

COROLLARIUM VI.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis Hyperbolis reperitur PH $= (my^2(a+x) + nxy^2) : (m+n)(ax + x^2)$. Eſt itaque $ax + xx : yy = \frac{m}{m+n} a + x$: PH.

COROLLARIUM VII.

42. Pro Hyperbola intra aſymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde PH $= ydy : dx = -y^2 : x$ Tab. I. *Fig.* 4. Valor negativus indicio eſt, ſubnormalem PH cadere verſus ſiniſtram. Quia $xy = a^2$, adeoque $y = a^2 : x$, & $y^2 = a^4 : x^2$, erit PH $= a^2 y : x^2$, vel $a^4 : x^3$, conſequenter $x^2 : a^2 = y$: PH & $x^3 : a^3 = a$: PH, hoc eſt, ſemiordinata habet ad ſubnormalem rationem duplicatam, & ad latus potentiæ Hyperbolæ rationem triplicatam abſciſſæ ad latus potentiæ Hyperbolæ.

COROLLARIUM VIII.

43. In Ciſſoide DIOCLIS, $2ydy = (3ax^2dx - 2x^3dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur ſubnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Eſt adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x$: PH.

COROLLARIUM IX.

44. Quia PH $= ydy : dx$ (§. 35), & PM $= y$; erit MH $= \surd(y^2dy^2 : dx^2 + y^2) = y\surd(dy^2 + dx^2) : dx$. Tab. I. *Fig.* 2.

SCHOLION.

45. *Equidem data per Problema præcedens ſubtangente, ſubnormalis reperitur facillime abſque calculo differentiali* (§. 409) : *quoniam tamen ſubinde ſubnormalis inveniri debet, data tantummodo æquatione ad curvam; ideo in Problemate præſente docendum erat, quomodo independenter a ſubtangente ex æquatione eruenda.*

PROBLEMA VI.

46. *Determinare curvarum algebraicarum aſymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam aſymptotus CD cum curva non concurrit, niſi intervallo infinito emenſo; haberi poteſt pro tangente in puncto, cui abſciſſa infinita reſpondet. Quantitates ergo conſtantes reſpectu variabilium x & y ſunt infinite parvæ (§. 2). Quamobrem ſi ex valore Tab. I. *Fig.* 2.

Tab. I. *Fig.* 2. ipſius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipſius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo aſymptotus CD ducitur.

2. Quodſi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipſius AE: eſt enim in illo caſu △ MRm ∽ △ CAE. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abſciſſam AP eſſe infinitam, adeoque TM aſymptotum; evidens eſt △ MRm ∽ △ TPM (§. 20). Sed △ TPM ∽ △ TAG (§. 268 *Geom.*). Ergo △ TAG ∽ △ MRm, conſequenter MR : Rm = TA : AG (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum △ TAG alterum CAE; erit MR : Rm = CA : AE, hoc eſt, $dx : dy$ = CA : AE.

COROLLARIUM I.

47. In Hyperbola *Apolloniana*, AT $= ax : (a + 2x)$ (§. 491 *part.* 1). Ergo in caſu aſymptotico degenerat in $ax : 2x = \frac{1}{2}a =$ AC, prorſus ut ſupra habetur (§. 474 *part.* 1). Porro ad Hyperbolam *Apollonianam*

$$ay^2 = bx\ (a + x)$$

hoc eſt, in noſtro caſu, ob a infiniteſimam,

$$ay^2 = bxx$$

conſequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx : dy =$ CA : AE (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

Unde habetur AE $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, denuo ut ſupra (§. 474 *part.* 1.).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In caſu infiniti, ſeu aſymptotico, TP = CP $= \frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro, ob ſimilitudinem △△ TPM & CAE, eſt Tab. I. *Fig.* 2.

$$\text{TP} : \text{PM} = \text{CA} : \text{AE}$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$\text{AE} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM II.

48. Pro infinitis Hyperbolis, eſt AT $= nax : (ma + mx + nx)$ (§. 28) adeoque in caſu aſymptotico, in quo $x = \infty$, AC $= nax : (mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quoniam porro (§. 525 *part.* 1.).

$$ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46),

hoc eſt, ſi fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$a^{1:r}y = b^{1:r}x$$

$$a^{1:r}dy = b^{1:r}dx$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = \text{CA} : \text{AE}$$

Unde ob CA $= na : r$, reperitur AE

$$\frac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}} = \frac{n}{r}\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

PROBLEMA VII.

49. *Determinare ſubtangentem & ſubnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois eſt curva algebraica (§. 377, 538 *part.* 1); ſubtangens ejus inveniri poteſt *per Probl.* 4, & ſubnormalis *per Probl.* 5 (§. 20 & 35). Enim vero quia, ob æquationem ejus admodum prolixam, expreſſio utraque non ſatis concinna prodit; ideo conſultius judicamus alia methodo utramque inveſtigari, qua & in caſibus aliis ſimilibus commode utendum.

Sit

Tab. I. *Fig.* 5. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur pm ipſi PM infinite propinqua: erit $Pp = MR = dx$, & $Rm = dy$, unde $PT = ydx : dy$, ut ſupra (§. 20). Sit porro $AB = QM$ (§. 535 *part.* I.) $= a$, $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Ut valor ipſius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - z = t$$

$$\text{erit } -dx = dv \qquad -dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$

$$at = zv$$
$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc eſt,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy$$

Subſtituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipſorum differentialium dt & dv in duabus poſterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$
$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{x}$$
$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{ydy - tdx}{z}$$

$$z^2dx - azdx = vydy - vtdx$$
$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$
$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$, ob $y^2 = z^2 - t^2$, & ſubnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$. Tab. I. *Fig.* 5.

Aliter.

Tab. IV. *Fig.* 43. Sit TC ſecans regulam in I perpendicularis ad MC & mc ipſi CM infinite propinqua: TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ deſcribatur arcus Qt & radio CM arcus Mr. Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QtS$ angulus t rectus eſt (§. 38), & QCI itidem rectus (§. 78 *Geom.*), & ob angulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3), angulus $IQC = QSt$ (§. 239 *Geom.*), erit $\triangle QtS \backsim \triangle QIC$, (§. 267 *Geom.*), adeoque

$$CQ : CI = tS : Qt$$
$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Qt & Mr ſunt arcus concentrici intra crura ejuſdem anguli deſcripti, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$
$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo ſupra, modo oſtendatur, eſſe $\triangle Mrm \backsim \triangle MCT$, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$
$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 *part.* I)

$$y = x + a$$

adeoque $\quad dy = dx$

Ergo $\quad CT = \dfrac{by^2dx}{x^2dy} = \dfrac{by^2}{x^2}$

 Duca-

Tab. IV. *Fig.* 43. Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268 *Geom.*).

$$CQ : CM = CI : CG$$
$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare ſi porro TM ducatur parallela ipſi GQ; erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$
$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT ſubtangens, conſequenter TM tangens quæſita.

PROBLEMA VIII.

Tab. I. *Fig.* 6. 50. *Determinare ſubtangentem in Spirali* Archimedea, *& infinitis Spiralibus aliis.*

Sit ſemidiameter circuli $AB = a$, peripheria $= b$, arcus $BD = x$, $AG = y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit $CD = dx$, & $EF = dy$ & (§. 138, 412 *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$
$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AG normalis; quæ eſt ſubtangens Spiralis: erit EG parallela ipſi AH (§. 256 *Geom.*), adeoque cum ſit FA=AE, ſive AG, ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*),

$$FE : EG = FA : AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam pro Spirali *Archimedea* (§. 571 *part.* I)

$$\frac{ax = by}{adx = bdy}$$

Hinc ſubtangens $AH = \frac{y^2dx}{ady} = by^2 : a^2 = zy : a$. Tab. I. *Fig.* 6.

Pendet adeo determinatio ſubtangentis a quadratura Circuli, cum pro arcu x aſſumenda ſit recta.

Pro infinitis Spiralibus eſt (§. 572 *part.* I.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$
$$na^m x^{n-1}dx = mb^n y^{m-1}dy$$
$$dx = mb^n y^{m-1}dy : na^m x^{n-1}$$

$AH = y^2\, dx : ady = mb^n\, y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

COROLLARIUM.

51. Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad FC ut eſt abſciſſa curvæ algebraicæ ad ſemiordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, & (ducto radio AF arculo FI) $GI = FE = dy$, atque (§. 138, 412. *Geom.*) ob $AG = AF$ (§. 4).

$$AC : CD = AG : EG$$
$$a : dx = a-y : \frac{adx-ydx}{a}$$
$$dy : \frac{adx-ydx}{a} = a-y : \frac{(a-y)^2dx}{ady}$$

Quodſi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, ſubſtituatur in expreſſione ſubtangentis AH valor ipſius dx, prodibit ſubtangens quæſita. Sit ex. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$

erit $bdx = 2ydy$

unde $AH = (a-y)^2\, dx : ady = 2y\,(a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA IX.

52: *Determinare ſubtangentem* PT *in Cycloide.* Tab. I. *Fig.* 7.

Sit

Tab.I. *Fig.*7. Sit APB circulus genitor Cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ Cycloidem in M tangat; erit TP ſubtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M tranſeunti intelligatur ipſa qm parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipſi PT parallela. Erit MS=PO (§.226 *Geom.*) & MR=Pp, quia arculus Pp, infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT, (§.257 *Geom*). Sit jam AP $=x$, PM$=y$; erit Pp=MR$=dx$, mR$=dy$. Ob parallelas MP & mR, *per conſtruct.* angulus MmR = TMP, & ob parallelas MR & TP, *itidem per conſtr.* mRM=mpT=MPT (§. 233 *Geom.*); conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : RM = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Eſt vero in Cycloide $y=x$ (§. 575 *part.* I); conſequenter $dy=dx$, & hinc $ydx : dy$ ſeu PT$=y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ Cycloidem in puncto reſpondente M tangit.

COROLLARIUM.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP ſint abſciſſæ tranſcendentis AMC, eodem modo determinatur ſubtangens; cum in omni caſu reperiatur PT $= ydx : dy$. Ponamus ex. gr.

$$bx = ay$$

erit

$$bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA X.

54. *Determinare ſubtangentem* PT *in in Logiſtica.*

Sit AP$=x$, PM$=y$, pm ipſi PM parallela; erit MR$=$P$p=dx$ & Rm $=dy$, & vi eorum, quæ in Problemate 4 (§. 20) demonſtrata ſunt, Tab.I. *Fig.*8.

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abſciſſa alia ipſa AP major vel minor$=v$, & ſemiordinata eidem reſpondens$=z$; erit ſubtangens $=zdv : dz$. Quoniam, ex natura Logiſticæ, abſciſſæ in progreſſione arithmetica progrediuntur (§.552 *part.* I.) erit $dx=dv$. Quoniam vero ſemiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y+dy = z : z+dz$$

$$y : dy = z : dz \text{ (§. 193 *Arithm.*)}$$

$$dx = dv$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logiſtica omnes ſubtangentes ſunt inter ſe æquales, ſeu ſubtangens PT eſt conſtans.

PROBLEMA XI.

55. *Determinare ſubtangentem* MH *in Quadratrice* DINOSTRATIS. Tab.I. *Fig.*9.

Per punctum datum M ducatur radius CN, ſitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipſi CN, & pm ipſi PM infinite propinqua; AP$=y$, AN$=x$, CM$=p$, ANB $=a$, AC$=b$; erit MI$=b-y$, Pp $=$MR$=dy$, N$n=dx$. Quoniam arcus infinite parvus, radio CM deſcriptus, coincidit cum recta MH, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$

$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

 Porro

Tab.I. Fig. 9. Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§. 38) ſint ad MK perpendiculares; erit mH ipſi KT parallela (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

conſequenter (§. 167 *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Eſt vero, ex natura Quadratricis (§. 565 *part.* 1.)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Subſtitutis ergo, in valore ipſius MK, pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap - px) : b$ $= (a - x)p : b =$ NB. MC : AC.

Eſt vero NB arcus radio NC deſcriptus; adeoque conſtructio a rectificatione arcus illius, ſeu a quadratura circuli pendet.

Problema XII.

Tab.I. Fig. 2. 56. *Intra angulum* QTH *deſcribere curvam deſideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

Resolutio.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP ſubtangens, PM ſemiordinata curvæ quæſitæ. Sit TP $= v$, PM $= y$, erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Tab.I. Fig. 2. Quare ſi ex æquatione curvæ determinatur valor ipſius dx vel dy, & in æquatione modo inventa ſubſtituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abſciſſa x ſemiordinatæ PM datæ reſpondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodſi vero contingat, aliquas ex his determinari non poſſe, id quidem indicio eſt, eam variis modis aſſumi poſſe, adeoque plures curvas ejuſdem ſpeciei ſatisfacere propoſito.

Corollarium I.

57. Si curva AMO Parabola primi generis eſſe debet; erit (§. 388 *part.* 1.)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Quodſi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx ſubſtituatur; habebimus

$$vdy = 2y^2 dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ ſeu } a = 2y^2 : v.$$

Porro ex æquatione ad Parabolam $a = y^2 : x$ Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x$$

$$y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \tfrac{1}{2}v$$

Diviſa nempe TP bifariam in A, habetur vertex Parabolæ A, ut jam ex ſuperioribus (§. 21) conſtat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH Parabola deſcribenda (§. 401 *part.* 1.)

Corollarium II.

58. Si curva AMO Hyperbola æquilatera: erit (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quod-

Tab. I. Fig. 2. Quodſi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx ſubſtituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2\,dy : (a + 2x)$$

$$av + 2vx = 2y^2$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc eſt, ſi fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro, ex æquatione ad Hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = yy : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$

$$yy = 2mx - xx$$

ſeu $xx - 2mx = -yy$

$$m^2 \qquad m^2$$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy$$

$$\left.\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipſius x, datur vertex Hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$; conſequenter Hyperbola deſcribi poteſt (§. 472 *part.* 1.)

COROLLARIUM III.

59. Quoniam pro Circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ ſeu, ſi fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM IV.

60. Si curva AMO Ellipſis primi generis; erit (§. 421 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 2.

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodſi in æquatione $vdy = ydx$ ſubſtituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ eſt

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\dfrac{2ay^2}{av - 2vx} = \dfrac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$

$$-\tfrac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \frac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = \left\{\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right.$$

$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipſius a, ſeu axis transverſi nullus valor erui poteſt; pro arbitrio aſſumi debet. Quodſi minor fuerit quam v; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)}$.

CAP. III.

CAPUT III.

De uſu Calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis.

DEFINITIO IV.

61. SI ſemiordinatæ alicujus curvæ uſque ad certum terminum continuo creſcunt vel decreſcunt, quem prætergreſſæ denuo decreſcunt vel creſcunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis.*

SCHOLION.

62. *Poteſt vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum creſcunt vel decreſcunt, adhiberi. Sed repræſentandæ ſunt per curvarum ſemiordinatas, ut Exempla inferius adducenda loquuntur.*

PROBLEMA XIII.

Tab. I. Fig. 10. 11. 63. *Determinare maximam vel minimam aplicatam in curva algebraica.*

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit, in caſu maximi vel minimi, ſubtangens TP infinita atque ſubnormalis PH nihilo æqualis. Eſt vero PH$=ydy:dx$. Quodſi ergo ponatur $ydy:dx=0$; reperietur $dy=0$ &, ob PT$=ydx:dy=\infty$, (quæ eſt nota infinitatis) $dx=\infty$.

Fieri poteſt, ut tangens HG in directum jaceat ſemiordinatæ GC: quo in caſu ſubtangens PT nihilo æquatur & ſubnormalis PH fit infinita. Eſt vero PT $=ydx:dy=0$ (§. 20), quare ſi ponatur $ydx:dy=0$, habebimus $dx=0$. Vel, ob PH$=ydy:dx=\infty$, reperitur $dy=\infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y, intuitu dy infiniteſimæ. Tab. I. Fig. 12.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus eſt valor ipſius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abſciſſæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM I.

64. Quoniam in Circulo (§. 377 *part.* 1.)

$$ax-xx=y^2$$

erit

$$adx-2xdx=2ydy$$

$$(adx-2xdx):2y=dy=0$$

$$a-2x=0$$

$$a=2x$$

$$\tfrac{1}{2}a=x$$

Nempe maxima ſemiordinata in Circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis conſtat (§. 299 *Geom.*).

Quodſi porro valor ipſius x in æquatione $ax-xx=y^2$ ſubſtituatur; prodibit $\tfrac{1}{2}aa-\tfrac{1}{4}aa=yy$, hoc eſt, $\tfrac{1}{4}aa=yy$. Unde $\tfrac{1}{2}a=y$: id quod denuo ex Elementis manifeſtum eſt.

Quodſi ponamus $2ydy:(a-2x)=dx=\infty$: erit $a-2x$ reſpectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a-2x=0$, ut ante.

COROL-

COROLLARIUM II.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$(m+1)x^{m-1}$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Ex. gr. Sit $m = 3$, ſeu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \frac{3}{4}a$; conſequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{1}{4}a \sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM III.

66. Pro Ellipſibus infinitis (§. 26)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit ex. gr. Ellipſis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (*§.421 part. 1.*), $y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM IV.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit $3x^2 dx + 3y^2 dy = axdy + aydx$

$$3x^2 dx - aydx = axdy - 3y^2 dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3 x^3$$

$$x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y = 3x^2 : a = \frac{2}{9}a\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM V.

68. Sit $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a - x)^{1:3}$

Quodſi hic valor ipſius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipſius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit, ob denominatorem reſpectu numeratoris infinite parvum (*§. 3*),

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3} = a^{1:3}. \, 0 = 0$ adeoque $y - a = 0$

$$y = a.$$

COROLLARIUM VI.

69. Sit $y^5 = a^2x^3 - x^5 + b^2c^2x$

erit $5y^4 dy = 3a^2x^2 dx - 5x^4 dx + b^2c^2 dx = 0$

$$3a^2x^2 - 5x^4 + b^2c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2x^2 = b^2c^2$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 = \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\frac{9}{100}a^4 \qquad \frac{9}{100}a^4$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 + \frac{9}{100}a^4 = \frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x^2 = \frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}\right)}$$

Fiat $x = m$

erit $y^5 = a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m)}$$

Corollarium VII.

70. Sit $b^2x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3y$

erit $2b^2xdx = 2cxydy + cy^2dx + 3x^2ydx + x^3dy$

$$2b^2xdx - cy^2dx - 3x^2ydx = 2cxydy + x^3dy = 0$$

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x = cy^2 + 3x^2y$$

$$2b^2x^2 = cxy^2 + 3x^3y$$

$$b^2x^2 = cxy^2 + x^3y - a^4$$

$$b^2x^2 = 2x^3y + a^4$$

$$b^2x^2 - a^4 = 2x^3y$$

$$\frac{b^2x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4x^4 - 2a^4b^2x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2y$$

adeoque ob

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} - \frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 0$$

h. e. $\frac{1}{2}b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

$$2b^2x^7 + 6a^4x^5 - b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4x^5}{b^2} - \frac{1}{2}b^2cx^4 + a^4cx^2 - \frac{a^8c}{2b^2} = 0$$

quæ eſt æquatio exprimens valorem ipſius x, ſeu abſciſſæ ſemiordinatæ maximæ reſpondentis.

Problema XIV.

71. *Ex dato puncto* R *in axe* AX *curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam* MR, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* R *ducendarum.* Tab. Fig.

Resolutio.

Sit AP $= x$, PM $= y$, AR $= c$, erit PR $= c - x$, & ob PM^2 + PR^2 = MR^2 (§. 417 *Geom.*), MR$^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata ſit MR (§. 62), erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0$$

Quodſi, ex æquatione ad curvam algebraicam data, pro ydy ſubſtituatur valor ejus; valorem ipſius x eruere licet.

Corollarium I.

72. In Parabola (§. 21)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\frac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \;\&\; \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \frac{1}{2}aa = y^2$, & $(c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}aa + ac - \frac{1}{2}aa = ac - \frac{1}{4}aa = z^2$. Unde MR $= z = \sqrt{(ac - \frac{1}{4}aa)}$. Eſt adeo MR^2 : PM^2 $= ac - \frac{1}{4}aa : ac - \frac{1}{2}aa = c - \frac{1}{4}a : c - \frac{1}{2}a$.

Quia PR $= c - x = \frac{1}{2}a$, evidens eſt PR eſſe ſubnormalem (§. 36), conſequenter MR normalem, unde patet

Theorema. Perpendicularis ad Parabolam eſt minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteſt.

Co-

COROLLARIUM II.

Tab.I. *Fig.*13.

73. In Hyperbola æquilatera (§. 507 *part.* I.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§.7)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

ſive $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam ſubnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35), $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$ eſt denuo ſubnormalis, conſequenter &

Theorema. In Hyperbola æquilatera normalis eſt breviſſima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poſſunt.

COROLLARIUM III.

74. In Ellipſi primi generis eſt (§. 420 *part.* I.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare $\tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a - b)$$

$$c - x = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum ſubnormalis reperiatur $\tfrac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit $PR = c - x = \tfrac{1}{2}b - (bc - \tfrac{1}{2}bb) : (a - b) = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut adeo PR denuo ſit ſubnormalis; conſequenter &

Theorema. In Ellipſi normalis ſit linea recta breviſſima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteſt.

COROLLARIUM IV.

Tab.I. *Fig.*13.

75. Eodem modo in Hyperbola ſcalena reperitur $x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) ; (a + b)$.

COROLLARIUM V.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$ydy = cdx - xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Eſt adeo PR ſubnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis eſt linea recta breviſſima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci poteſt.

PROBLEMA XV.

Tab.I. *Fig.*14.

77. *A puncto* C *extra curvam algebraicam dato ducere rectam* CM, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.*

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum, datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$, & $CH = CD - PM = q - y$; conſequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 ſit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc eſt, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

ſeu $(y - q)dy + (x - p)dx = 0$.

Reliqua peragenda ſunt ut in Problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curva AMO fuerit Parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

 Unde

Unde $y - q + (x - p)\, 2y : a = 0$

$ay - aq + 2xy - 2py = 0$

$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$

$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}\, aaq = 0$
$\quad - apy$

Tab.I. *Fig.*14. Quodſi hæc æquatio ope Parabolæ datæ atque circuli conſtruatur (§. 622 *part.* 1.); una eademque opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi* §. *cit.*) fieri debet AL $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & IL $= \frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem Parabolæ A deſcribendus eſt circulus, qui eam in puncto deſiderato M ſecabit. Erit autem AL $= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; ſi ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam ſecetur in L. Nam AD $= p$, adeoque DG $= \frac{1}{2}a - p$. Ergo DL $= \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter AL $= \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis AP $= x$, PM $= y$. Etenim ex natura Parabolæ AP $= y^2 : a$, adeoque LP $=$ IR $= y^2 : a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter IR$^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro MR $= y - \frac{1}{4}q$, adeoque MR$^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) MI^2 = IR^2 + MR$^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Eſt vero MI^2 = AI^2 = IL^2 + LA$^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\, qy = 0$$
$$- \frac{py^2}{a}$$

$$y^4 + \frac{1}{2}a^2 y^2 - \frac{1}{2}a^2\, qy = 0$$
$$- apy^2$$

$$y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}a^2\, q = 0$$
$$- apy$$

quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita.

COROLLARIUM II.

Tab.I. *Fig.*14.

79. Quoniam (§. 77)
$(y - q)\, dy + (x - p)\, dx = 0$

erit $(x - p)\, dx = (q - y)\, dy$

$$\frac{(x - p)y}{q - y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)
CH : MH = CD : Dr
$q - y : x - p = q :$ Dr

adeoque D$r = \frac{qx - pq}{q - y}$; conſequenter ob DP $= x - p$, P$r = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) = (x - p)\, y : (q - y)$. Eſt adeo P$r = ydy : dx$ ſubnormalis (§. 35). Patet adeo denuo generale *Theorema*. In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis eſt breviſſima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci poſſunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, ſi Problema non fuerit planum, conſultius eſſe ut in expreſſione generali valor potius ipſius* dx, *quam* dy *ſubſtituatur. Nec abſimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ: quemadmodum ex ſequente Problemate patet.*

PROBLEMA XVI.

81. *A puncto* C *intra curvam algebraicam dato ducere rectam* CM, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.* Tab. IV. *Fig.*44.

Sit AD $= p$, CD $= q$, AP $= x$, PM $= y$, erit HC = PD $= p - x$ & MH $= y - q$, conſequenter MC^2 = MH^2 + HC^2 (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 ſit minimum quoddam, ex hypotheſi: erit ejus differentiale nihilo æqua-

Tab. IV. Fig. 44. æquale (§. 63), hoc eſt, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$ ſeu $(y - q)\,dy - (p - x)\,dx = 0$. Reliqua peragenda ſunt ut in Problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM I.

82. Quoniam $(y - q)\,dy = (p - x)\,dx$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{p - x}{y - q}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p - x)\,y}{y - q} = \frac{HC.\,PM}{MH}$$

Quare cum ſit MH : HC = PM : PR (§. 268 *Geom.*); erit PR ſubnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis eſt breviſſima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci poteſt.

COROLLARIUM II.

83. Linea itaque ad curvam normalis eſt breviſſima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci poteſt (§. 76, 79, 82).

PROBLEMA XVII.

Tab. II. Fig. 15. 84. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut rectangulum ex* AD *&* DB *ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt.*

Sit AB = a, AD = x, erit DB = $a - x$, conſequenter AD. DB = $ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe eſſe ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

$$\text{Quare } adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB eſt ſecanda in duas partes æquales, eſtque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & baſes junctim ſumtæ inter ſe æquantur.

PROBLEMA XVIII.

85. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut* $AD^m.\,DB^n$ *ſit maximum factorum ſimili modo formatorum.* Tab. II. Fig. 15.

Sit denuo AB = a, AD = x, erit DB = $a - x$, conſequenter $AD^m.DB^n = x^m (a - x)^n$. Erit igitur x abſciſſa reſpondens ſemiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m (a - x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 *part.* 1), & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m (a-x)^{n-1} dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a - x)^n = nx^m (a - x)^{n-1}$$

$$m(a - x) = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m + n) = x$$

Sit ex. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \tfrac{2}{3}a$, hoc eſt, ſi recta AD = $\tfrac{2}{3}a$ & BD = $\tfrac{1}{3}a$, atque BD ſumatur pro altitudine priſmatis, AD pro latere quadrati, quod eſt baſis ejuſdem; erit priſma omnium maximum eorum, quæ ex diviſione rectæ AB in duas partes formari poſſunt.

PROBLEMA XIX.

86. *Super recta* AB *tanquam hypothenuſa triangulum rectangulum maximum conſtruere.* Tab. II. Fig. 16.

Sit AB = a, AC = x, erit (§. 417 *Geom.*) BC = $\sqrt{(aa - xx)}$, area (§. 392 *Geom.*) = $\tfrac{1}{2}$AC. CB = $\tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)}$. Habemus adeo æquationem ad curvam tertii generis

$$x\sqrt{(aa - xx)} = 2y^2$$

$$\text{ſeu } aaxx - x^4 = 4y^4$$

Tab.II. *Fig.*16. Unde $2a^2 xdx - 4x^3 dx = 16y^3 dy = 0$

$$2a^2 x = 4x^3$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x$$

Patet adeo triangulum maximum eſſe æquicrurum. Nam ſi $AB^2 = aa$ & $AC^2 = \frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2 = \frac{1}{2}aa$; conſequenter $AC = CB$.

PROBLEMA XX.

Tab.II. *Fig.*17. 87. *Inter omnes conos æquales determinare eum, qui minimam habet ſuperficiem.*

Sit ſoliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius coni $AC = x$; erit $r:p = x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria baſis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat baſin coni $px^2:2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam ſi dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}DC = 2a^3r:px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde $DC = 6a^3r:px^2$, &

$$DC^2 = 36a^6r^2:p^2x^4$$
$$AC^2 = x^2$$

$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2:p^2x^4$ (§. 417 *Geom.*)

$$AD = \sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:px^2$$

$\frac{1}{2}$ peripheria baſ. $px:2r$

Superf. coni $\sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:2rx$ (§. 548 *Geom.*)

Habemus itaque, vi methodi de maximis & minimis (§. 63),

$$(p^2x^6 + 36a^6r^2):4r^2x^2 = y^2$$

h. e. $p^2x^4:4r^2 + 9a^6:x^2 = y^2$

$$4p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2ydy = 0$$

$$p^2x^3dx:r^2 - 18a^6dx:x^3 = 0$$

$$p^2x^3:r^2 = 18a^6:x^3$$

Tab.II. *Fig.*17.

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$$

$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Quoniam $px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$, erit $x^3:a^3 = 3r\sqrt{2}:p$, conſequenter evidens eſt

Theorema. Cubus radii coni inter æquales minimam ſuperficiem habentis eſt ad ipſum conum in ratione compoſita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA XXI.

88. *Sit* ADB *ſemicirculus & curva* AMD *ejus naturæ, ut ſit* $BP:PN = AP:PM$; *determinare punctum* M, *in quo* MN *eſt maxima linea earum, quæ ſimili modo determinantur.* Tab. IV. Fig.45.

Sit diameter ſemicirculi $AB = a$, $AP = x$; erit $PB = a - x$, & $PN = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§.327, 377 *Geom.*). Eſt vero, *per hypoth.*

$$BP : PN = AP : PM$$
$$a-x:\sqrt{(ax-x^2)} = x:PM$$

adeoque $PM = \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$, conſequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3}:\sqrt{(a-x)}$, & hinc $MN^2 = (a^2x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)}):(a-x) = [\text{ob} \sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3]$, $\frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a-x}$. Quare cum NM^2 ſit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a-x)^2} = 0$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. e.

Tab. IV. *Fig.* 45.

h. e.
$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ \quad - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ \quad + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array}\right\} = 0$$

$$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0 \qquad a-2x$$

$$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 6ax = -a^2 \qquad 4$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}a^2$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax + \tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{5}{16}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a - x = \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

$$x = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit CE $= \frac{1}{4}a$, adeoque, ob CD $= \frac{1}{2}a$, DE $= \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat EP = ED; erit PB $= \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$; conſequenter AP = AB — PB $= \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA XXII.

Tab. IV. *Fig.* 46. 89. *Determinare maximam applicatam* QN *in curva* AMND *ejus naturæ, ut ducta recta* FM *per punctum* D, *rectæ* AE *quæ lineam* CB *poſitione datam in* E *ad angulos rectos ſecat, ſit eidem* AE *conſtanter æqualis.*

Sit FM = AE $= a$, DE $= b$, EP = MG $= x$, erit DP $= x - b$ & FG $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G ſint recti, *per conſtruct.* & ob parallelas AE & MG (§. 256 *Geom.*) PDM = DMG (§. 233 *Geom.*), erit △ FGM ∽ △PDM, & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$
$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$$

adeoque $PM = \frac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = (1 - \frac{b}{x})(\sqrt{a^2 - x^2})$

Hinc $PM^2 = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2})(a^2 - x^2)$

$$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$$

Habemus adeo (§. 63)

$$\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$$ Tab. IV. *Fig.* 46.

$$\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0 \qquad x^3$$

$$a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0 \qquad x-b$$

$$a^2b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Parametro a circa axem EB deſcribatur Parabola EIR (§. 400 *part.* 1) fiatque (§. 622 *part.* 1) EO $= \frac{1}{2}a$, & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K, radio KE, deſcribatur circulus EIT ſecans Parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis (= EQ) $= x$, adeoque QN perpendicularis ad AE tranſiens per I maxima applicata.

Eſt enim IS = IL — SL $= x - \frac{1}{2}b$, & cum EL $= x^2 : a$ (§. 391 *part.* 1) LO = SK $= \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare $SI^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, & $SK^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$; conſequenter $EK^2 = IK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob $EK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA XXIII.

90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *ſit axi* AE *& rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis.* Tab. IV. *Fig.* 47.

Sit MN = AB = AE $= a$, AM $= x$, PM $= y$, erit AN $= a - x$. Jam cum AB & PM ſint ad AE perpendiculares, *per hypoth.* erunt eædem inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*) adeoque AMP = NAB (§. 233 *Geom.*). Quare cum porro angulus ad

Tab. IV. Fig. 47. ad P rectus ſit (*§.78 Geom.*) & ANB, qui eſt in ſemicirculo, ſit itidem rectus (*§.317 Geom.*); erit △ AMP ∽ △ ANB (§. 267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$
$$y : x = a - x : a$$
$$ay = ax - x^2$$
$$ady = adx - 2xdx = 0$$
$$a - 2x = 0$$
$$a = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Tab. IV. Fig. 47. Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$

Eſt igitur in caſu applicatæ maximæ $AM = \frac{1}{2}a$: unde reperitur $AP = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§.417 *Geom.*)

SECTIO SECUNDA.

DE CALCULO INTEGRALI, SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

De natura Calculi integralis.

DEFINITIO V.

91. *Calculus Integralis* ſeu *Summatorius* eſt Methodus quantitates differentiales ſummandi, hoc eſt, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus differentiatione reſultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque ſeu ſummationis rite peractæ indicium eſt, ſi quantitas inventa juxta regulas Cap. 1, Sect. I, traditas differentiata eam producit, quæ ad ſummandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam* Angli *differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§. 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & qui a differentiis ad ſummas, ſeu, ut cum* Anglis *loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes* (*ita nimirum variabiles dicunt*) *aſcendit*, Methodum fluxionum inverſam *appellant.*

HYPOTHESIS.

94. *Signum ſummæ aut quantitatis integralis ſit* ſ, *ita ut* ſydx *denotet ſummam ſeu integrale differentialis* ydx.

PROBLEMA XXIV.

95. *Quantitatem differentialem integrare ſeu ſummare.*

RESOLUTIO.

Ex ſuperioribus manifeſtum eſt, quod ſit

I. $\int dx = x$ (§.8).

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§.11.).

III. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§.12).

IV. $\int mx^{m-1}\, dx = x^m$ (§.13)

V. $\int (n{:}m)\, x^{(n-m):m}\, dx = x^{n:m}$ (§.17).

VI. $\int (ydx - xdy) : y^2 = x : y$ (§.19).

Ex his caſus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis ſummatur, ſi exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis, ex. gr. in caſu quarto per $(m - 1 + 1)\, dx$, hoc eſt, per mdx.

Quodſi quantitas differentialis ad ſummandum

mandum propoſita nulli illarum formularum ſimilis; aut reducenda eſt ad ſummabilem finitam, aut ad ſeriem infinitam cujus ſinguli termini ſummari poſſunt, vel etiam ad Quadraturas & Rectificationes curvarum ſimpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum poſſunt, veluti ad Quadraturam circuli, vel Rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauſeam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, ſi variabilibus conſtantes quantitates adjiciantur, quam ſi eædem abfuerint (§. 11); itaque fieri poteſt, ut $\int dx$ ſit $x+a$ vel $x-a$, $\int(xdy+ydx) = xy \mp a^2$, vel $xy \pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum ſit, docebitur paulo poſt.

S C H O L I O N.

96. *Quemadmodum in Analyſi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, ſed non vice verſa ex qualibet radix extrahi poteſt deſiderata; ita ſimiliter in Analyſi infiniteſimali quantitas qualibet variabilis, aut ex variabilibus & conſtantibus quomodocunque compoſita, haud difficulter differentiatur, ſed non vice verſa quodlibet differentiale integrari poteſt. Quemadmodum autem porro in Analyſi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi Methodus hactenus inventa, neque enim ætas noſtra tranſcendit limites ultra ſeculum & quod excurrit Algebræ jam aſſignatos: ita ſimiliter in Analyſi infinitorum Calculus integralis ſuam perfectionem nondum eſt aſſecutus. Sicuti autem in Analyſi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita ſimiliter in Analyſi infinitorum ad ſeries infinitas confugimus, ubi perfectam ſummationem dare non valemus.*

C A P U T II.

De uſu Calculi integralis in Quadraturis curvarum.

D E F I N I T I O VI.

Tab.I. Fig.2. 97. *Differentiale* ſeu *Elementum areæ* dicitur rectangulum PMRP *ex* ſemiordinata PM in differentiale abſciſſæ P*p*.

C O R O L L A R I U M I.

98. Si ergo ſemiordinata PM = *y*, abſciſſa AP = *x*, erit P*p* = MR = *dx*, conſequenter Elementum areæ PM. MR = *ydx*.

C O R O L L A R I U M II.

99. Quoniam *m*R = *dy* & MR = *dx*; erit △MR*m* = $\frac{1}{2}dxdy$ (§. 392 *Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ eſt ipſius *ydx* infiniteſima (§. 12), conſequenter trapezium PM*mp* æquale eſt rectangulo PMR*p*, in præſente nimirum caſu, ubi *pm* ipſi PM infinite propinqua intelligitur (§. 4). Quare cum area AMP in infinita iſtiusmodi trapezia reſolvi poſſit; erit ea $\int ydx$ (§. 91, 94). Tab.I. Fig.2.

C O R O L L A R I U M III.

100. Quodſi itaque ex æquatione ad curvam datam ſubſtituatur valor ipſius *y*, & *ydx* integrabile evadat; integratione peracta habetur Quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare, idem eſt ac ſummare *ydx*.

P R O B L E M A XXV.

101. *Invenire aream Trianguli.* Tab.II.

Sit CP = *x*, MN = *y*, CD = *a*, AB = *b*; Fig.18. erit, ob MN ipſi AB parallelam, (§. 268, 396 *Geom.*)

$$CP : MN = CD : AB$$

$$\frac{x : y = a : b}{y = bx : a}$$

Ergo

Tab.II. Fig.18. Ergo elementum $MNnm = ydx$ (§. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§.95): quæ eſt area indefinita CMN (§.99). Quodſi pro CP, ſeu x, ſubſtituatur CD, ſeu a; prodibit area totius trianguli $ACB = ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB.CD$, prorſus ut in Elementis Geometriæ (§.392) demonſtratum.

SCHOLION.

102. *Hoc Exemplum ideo attulimus, ut Tyrones, quibus principia Calculi ſummatorii ſub initium duriora videntur, intelligant; per eum non alia reperiri, niſi quæ demonſtrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perſpiciant.*

PROBLEMA XXVI.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro Parabola *Apolloniana* (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \tfrac{2}{3}xy,$$

ſubſtituto valore ipſius $a^{1:2}x^{1:2}$.

COROLLARIUM.

104. Eſt ergo ſpatium parabolicum ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc eſt, ut 2 ad 3 (§.124 *part.* 1).

PROBLEMA XXVII.

105. *Infinitas Parabolas quadrare.*

Pro infinitis Parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part.* 1)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r} x^{m:r} = y$$
$$ydx = a^{n:r} x^{m:r} dx$$
$$\int ydx = \frac{r}{m+r} a^{n:r} x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r} xy,$$

ob $a^{n:r} x^{m:r} = y$.

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque eſt ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam, ut $rxy : (m+r)$ ad xy, hoc eſt, ut r ad $m + r$ (§.124 *part.* 1).

PROBLEMA XXVIII.

107. *Quadrare ſegmentum ſpatii parabolici* PMNQ *inter duas ſemiordinatas* PM *&* QN *interceptum.* Tab.II. Fig.19.

I. Quoniam AP conſtans eſt, & origo abſciſſæ indeterminatæ in P: ſit $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$, erit $AQ = b + x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§.388 *part.* 1)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab + ax)}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\sqrt{(ab + ax)} = v$$

erit

$$ab + ax = v^2$$
$$adx = 2vdv$$
$$dx = 2vdv : a$$
$$ydx = 2v^2dv : a$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{(ab + ax)} : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)}.$$

Quoniam in P, $x = 0$, & ſpatium quoque QNMP evaneſcit; ſi in integrali inventa ponatur $x = 0$, quod relinquitur, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, oſtendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut ſpatium QNMP nihilum evadat in P, conſequenter ut integrale fiat quadratura ipſius QNMP. Habemus nempe in noſtro caſu ſubtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: unde

Tab. II. unde ipſius QNMP area $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

Fig. 19. II. Sit AQ conſtans, & $=b$, origo ipſius x in Q, erit QP $=x$, PM $=y$, AP $=b-x$ & (§. 388 *part.* 1)

$$ab-ax=y^2$$

$$\sqrt{(ab-ax)}=y$$

$$ydx=dx\sqrt{(ab-ax)}$$

Fiat ut ante $ab-ax=v^2$

erit $-adx=2vdv$

$$dx=-2vdv:a$$

$$ydx=-2v^2dv:a$$

$$\int ydx=-\tfrac{2}{3}v^3:a=-\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Ut intelligatur quid integrali ſit adjiciendum, quo ſpatii PMNQ menſuram conſtituat; ponatur ut ante $x=0$, relinquetur $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifeſtum eſt, ſi illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, haberi ſpatium PMNQ $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

SCHOLION.

108. *Spatium* PMNQ *eſſe in caſu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in poſteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ *etiam ex Problemate* 26 (§. 103) *manifeſtum eſt. Nimirum* PMNQ = ANQ — AMP. *Sed in caſu priore* ANQ = $\frac{2}{3}$ AQ. QN $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, & AMP $=\frac{2}{3}$AP. PM $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* PMNQ $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In poſteriore* ANQ $=\frac{2}{3}$AQ. QN $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ & AMP $=\frac{2}{3}$ AP. PM $=\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* QNMP $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quodſi adeo curva non ſupponatur deſcripta, ſed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non conſtet, ubi origo ipſius x ſit ſtatuenda; evidens eſt, ex reſolutione Problematis præſentis, quod in integrali poni debeat $x=0$, &, deletis iis quæ per x multiplicantur, reſiduum, ſi quod fuerit, ſub ſigno contrario ipſi ſit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæſita.

PROBLEMA XXIX.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3=a^4$.

Quoniam

$$y=a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx=a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx=\tfrac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3}=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}=\tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

PROBLEMA XXX.

111. *Quadrare curvam* CARTESII (d), *ad quam* $b^2:x^2=b-x:y$.

Quoniam $b^2y=bx^2-x^3$

erit $y=(bx^2-x^3):b^2$

$$ydx=(bx^2dx-x^3dx):b^2$$

$$\int ydx=x^3:3b-x^4:4b^2$$

PROBLEMA XXX.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^5=a^4y$.

Quoniam $y=x^5:a^4+x^4:a^3+x^3:a^2+x^2:a+a$

erit $ydx=\left(\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2}{a}+a\right)dx$

$$\int ydx=\frac{x^6}{6a^4}+\frac{x^5}{5a^3}+\frac{x^4}{4a^2}+\frac{x^3}{3a}+ax$$

PROBLEMA XXXI.

113. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^4+a^2x^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x^2+a^2)}$

erit $ydx=xdx\sqrt{(x^2+a^2)}$

(d) *Epiſt.* Tom. III. pag. 219.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)}=v$$

erit $x^2+a^2=v^2$

$$2xdx=2vdv$$

$$xdx=vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)}=v^2dv$$

$\int ydx=\frac{1}{3}v^3=\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$. Ponatur $x=0$, erit reſiduum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ ſive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}-\frac{1}{3}a^3$ (§. 109).

PROBLEMA XXXII.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^3+ax^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx\sqrt{(x+a)}$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x+a)}=v$$

erit $x+a=v^2$ & $x=v^2-a$

$$dx=2vdv$$

$$ydx=2v^4dv-2av^2dv$$

$\int ydx=\frac{2}{5}v^5-\frac{2}{3}av^3=\frac{2}{5}(x+a)^2\sqrt{(x+a)}-\frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{(x+a)}=(\frac{6}{15}(x^2+2ax+aa)-\frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15$. Ponatur $x=0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x+a)}(6x^2+2ax-4aa)+\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$ (§. 109).

PROBLEMA XXXIII.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^2:(x+a)$.

Quoniam $y=x:\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx:\sqrt{(a+x)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)}=v$

erit $x+a=v^2$

$$x=v^2-a$$

$$dx=2vdv$$

$$xdx:\sqrt{(x+a)}=(2v^3dv-2avdv):v$$
$$=2v^2dv-2adv$$

$\int ydx=\frac{2}{3}v^3-2av=\frac{2}{3}(x+a)\sqrt{(x+a)}-2a\sqrt{(x+a)}=(2x+2a-6a)\sqrt{(x+a)}:3=(2x-4a)\sqrt{(x+a)}:3=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}$. Reductio ad mere ſurdam neceſſaria, ut appareat, ſi fiat $x=0$, & termini quidam nulleſcant, quale reſidui eſſe debeat ſignum, propterea quod $x-2a$ ſignis afficitur diverſis.

Ponatur $x=0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 109) $=\frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{(x+a)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$.

PROBLEMA XXXIV.

116. *Quadrare omnes curvas, quæ comprehenduntur ſub æquatione generali* $y=\sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y=(x+a)^{1:m}$

erit $ydx=dx(x+a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$(x+a)^{1:m}=v$$

erit $x+a=v^m$

$$dx=mv^{m-1}dv$$

$$ydx=mv^m dv$$

$$\int ydx=\frac{mv^{m+1}}{m+1}=\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}.$$

Fiat $x=0$: erit reſiduum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}-\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 109).

PROBLEMA XXXV.

117. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \surd(b + cx^{m+1})$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \surd(b + cx^{m+1})$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\surd(b + cx^{m+1}) = v$$

$$\text{erit } b + cx^{m+1} = v^2$$

$$(m+1)cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1)c$$

$$= 2a\surd(b + cx^{m+1}) : (m+1)c.$$

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\surd b : (m+1)c$

Eſt igitur area $\dfrac{2a\surd(b + cx^{m+1}) - 2a\surd b}{(m+1)c}$

PROBLEMA XXXVI.

118. *Quadrare innumeras Hyperbolas intra aſymptotos.*

Pro infinitis Hyperbolis intra aſymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m} dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n} xy$$

Tab. I. *Fig.* 4. Si $m > n$; ſpatii interminati $\int$MPAS quadratura ſemper habetur: ſi $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura ſpatii IMPK: ſi vero $m = n$, ſpatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^2$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit Tab. I. *Fig.* 4. $m = 4$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= \frac{4}{3}xy$. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ ſeu xy pro ſpatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$, adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc eſt $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed ſi $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: eſt adeo numerator reſpectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

119. Johannes WALLISIUS (e) *ſpatium* $\int$APMS, *eo in caſu, ubi valor negativus, vocavit* pluſquam infinitum: *oſtendit vero Celeberrimus* VARIGNONIUS (f), *Virum ceteroquin magno ſuo merito celebrem aliquid humani paſſum eſſe, conſentiente ſummo* LEIBNITIO (g).

PROBLEMA XXXVII.

120. *Hyperbolam* Apollonianam *intra aſymptotos quadrare.*

Quoniam ad Hyperbolam intra aſymptotos (§. 490 *part.* I.) $a^2 = by + xy$, ſeu ſi fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio ſit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

$$\text{erit } 1 : (1 + x) = y$$

hoc eſt diviſione actu facta, (§. 45 *part.* I)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^6 dx : \text{\&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

(e) In *Arithmet. infinit.* Schol. Prop. 101. f. 407. & Prop. 104. fol. 409.

(f) *Memoires de l'Academie Royale des Sciences*, A. 1706. p. m. 15.

(g) In *Actis Eruditorum*, A. 1712. p. 267. & ſeqq.

Scholion.

121. *Hanc quadraturam Hyperbolæ primus dedit Serierum infinitarum inventor* Nicolaus Mercator (h). *Cum autem ſeriem quæſiviſſet per diviſionem; celeberrimi Geometræ* Leibnitius *atque* Newtonus (i) *methodum hanc ſerierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex ſerie quadam præſuppoſita. Utriuſque exempla in ſequentibus occurrunt.*

Problema XXXVIII.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2 y + y = 1$.

Quoniam $x^2 y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

vel $$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$ydx = dx : (x^2 + 1)$$

vel $$= dx : (1 + x^2)$$

Reſolvatur $1 : (x^2 + 1)$ per diviſionem in ſeriem infinitam (§. 45 *part.* 1), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \text{ \&c.}$$
$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \text{ \&c.}$$

Quare

$$ydx = x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx \text{ \&c.}$$

adeoque

$$\int ydx = -x^{-1} + \tfrac{1}{3}x^{-3} - \tfrac{1}{5}x^{-5} + \tfrac{1}{7}x^{-7} \text{ \&c.}$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \text{ \&c.}$$

Reſolvatur ſimiliter $1 : (1 + x^2)$ in ſeriem (§. *cit.*), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \text{ \&c.}$$

adeoque

$$ydx = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \text{ \&c.}$$

Quare $\int ydx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9$ &c.

Quoniam ſeries exprimit aream, quia convergit, hoc eſt, termini continuo fiunt minores, ut in caſu ſingulari tandem deveniatur ad particulam inaſſignabilem, etiamſi terminorum numerus ſit finitus, ſeries autem prior citius convergit poſteriore; ideo utendum eſt ſerie prima, ſi x fuerit ſatis magna, ſecunda vero, ſi ſatis parva.

(h) In *Logarithmotechnia*, prop. 17. p. 31. & ſeqq.
(i) Vid. *Epiſtolæ* ipſorum apud Wallisium vol. III. *Operum Mathematic.*

Problema XXXIX.

123. *Quadrare Hyperbolam* AMP. Tab. I. Fig. 2.

Quoniam in Hyperbola $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 459 *part.* 1.); $y = \sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, adeoque $ydx = dx\sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$; conſequenter $\int ydx = \sqrt{(b : a)} \int dx \sqrt{(ax + x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax + x^2)}$ eſt area Hyperbolæ æquilateræ (§. 507 *part.* 1) hac data datur etiam area Hyperbolæ ſcalenæ. Quare ut elementum areæ Hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, ſolvatur $\sqrt{(ax + x^2)}$ in ſeriem infinitam (§. 98 *part.* 1), erit in theoremate generali

$$m = 1,\ n = 2,\ P = ax$$
$$Q = x : a = a^{-1}x$$
$$P^{m:n} = a^{1:2}x^{1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{1:2} . a^{-1}x$$
$$= \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} . a^{-1}x$$
$$= -\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6} . -\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} . a^{-1}x$$
$$= +\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} . \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} . a^{-1}x$$
$$= -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\tfrac{7}{10} . -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}a^{-1}x$$
$$= +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}a^{-9:2}x^{11:2} \text{ \&c.}$$

Eſt itaque

$y = a^{1:2}x^{1:2} + \frac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} - \frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}$
$+ \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}$
$+$ &c. in infinit.

$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx + \frac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}dx$
$- \frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}dx$
$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}dx$ &c. in infinit.

adeoque

$\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} + \frac{1}{5}a^{-1:2}x^{5:2}$
$- \frac{1}{4.7}a^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.6.9}a^{-5:2}x^{9:2}$
$- \frac{1.3.5}{4.6.8.11}a^{-7:2}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}a^{-9:2}x^{13:2}$

&c.

Quoniam $a^{1:2}x^{1:2} = \sqrt{ax}$, erit

$$\int ydx = \sqrt{ax}\left(\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5} \text{ \&c. in infin.}\right)$$

Problema XL.

124. *Circulum quadrare.*

Tab. I. *Fig.* 2. Sit $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; erit (§. 377 *part.* 1.)

$$y = \sqrt{(x - xx)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(x - xx)} = dx(x - xx)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x - xx$ extrahatur radix per Theorema generale (§. 98 *part.* 1), in quo erit

$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx : x = -x$

$P^{m:n} = x^{1:2} = A$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}x^{1:2}. -x = -\frac{1}{2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}. -\frac{1}{2}x^{3:2}. -x = -\frac{1}{2.4}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}. -\frac{1}{2.4}x^{5:2}. -x = -\frac{1.3.x^{7:2}}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}. -\frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}. -x = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10}. -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}x^{9:2}. -x = -\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2} \text{ \&c. in infin.}$$

Habemus adeo $ydx = x^{1:2}dx - \frac{1}{2}x^{3:2}dx - \frac{1}{2.4}x^{5:2}dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}dx$ &c. in infin.

Hinc $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2} - \frac{1}{5}x^{5:2} - \frac{1}{4.7}x^{7:2} - \frac{1.3}{4.6.9}x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^{11:2}$ &c. in infin. $= \sqrt{x}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4.7}x^3 - \frac{1.3}{4.6.9}x^4 - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^7\right.$ &c. in infinit. $\left.\right) = \sqrt{x}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 - \frac{7}{1664}x^2\right.$ &c. in infin. $\left.\right)$

Hæc nempe ſeries exhibet quadraturam indeterminatam ſegmenti AMP.

Aliter.

Quoniam ſi radius Circuli $= 1$, CP $= x$, PM $= y$ (§. 377 *part.* 1.) $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $\sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 98 *part.* 1.) Tab. I. *Fig.* 3.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{8}x^4dx - \frac{1}{16}x^6dx - \frac{5}{128}x^8dx - \frac{7}{256}x^{10}dx -$ & in infin.

$\int ydx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \frac{7}{2816}x^{11}$ &c. in infinit.

Quando x radio CA æqualis evadit, ſpatium DCPM degenerat in quadrantem. Subſtituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinit., quæ eadem ſeries integram Circuli aream metitur, ſi diameter fuerit 1.

Quod ſi

Quodſi progreſſum in infinitum perſpicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1-x^2)}$ in ſeriem reſolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$ &c. in infinit.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$ &c.

$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$ &c. in infin.

Dicatur terminus primus A, ſecundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit

$A = x$

$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$

$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$

$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 = -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$

$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$

&c. *Aliter.*

Tab.II. Fig.20. Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri ſeu dupli $KB = 2x : (1 - xx)$ (§. 327 *part.* 1) & (§. 269 *Geom.*)

$BG : BC = KG : KC$

$x : 1 = \frac{x + x^3}{1 - xx} : \frac{1 + x^2}{1 - xx}$

Eſt enim $KG = 2x : (1 - xx) - x = (2x - x + x^3) : (1 - xx) = (x + x^3) : (1 - xx)$ Tab.II. Fig.20.

Porro (§. 268 *Geom.*)

$KC : KB = MC : PM$

$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : \frac{2x}{1 - x^2} = 1 : \frac{2x}{1 + x^2}$

$KC : BC = MC : PC$

$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : 1 = 1 : \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Unde $PB = 1 - (1 - x^2) : (1 + x^2) = (1 + x^2 - 1 + x^2) : (1 + x^2) = 2x^2 : (1 + x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx) : (1 + x^2)^2 = 4xdx : (1 + x^2)^2$, & $mR = (2dx + 2x^2dx - 4x^2dx) : (1 + x^2)^2 = (2dx - 2x^2dx) : (1 + x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2 : (1 + x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2) : (1 + x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2) : (1 + x^2)^4$, & $Mm = (2dx + 2x^2dx) : (1 + x^2)^2 = 2dx : (1 + x^2)$. Denique $Mm . \frac{1}{2}MC = dx : (1 + x^2)$. Ut ſector hic infinite parvus MCm, ſeu elementum ſectoris BCM, cujus dimidii tangens x, ſummetur; reſolvi debet $1 : (1 + x^2)$ in ſeriem (§. 45 *part.* 1): quo facto reperitur $dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ ſeries exprimit ſectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens $GB = x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32 *Trig.*). Si ergo pro x ſubſtituatur 1, ſeries $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem Circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, ſi 1 denotet diametrum Circuli.

Brevius.

Brevius.

Tab.II. Fig.20. Sit tangens KB $= x$, BC $= 1$ & ſecans CA alteri CK infinite propinqua, ductuſque arculus KL radio CK; erit AK $= dx$, KC $= \surd(1 + x^2)$ (§.417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L ſint recti (§.38); & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC = KAC (§. 239 *Geom.* & §. 3 *Analyſ. infinit.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$

$$\surd(1 + x^2) : 1 = dx : \frac{dx}{\surd(1 + x^2)}$$

Porro (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$

$$\surd(1 + x^2) : \frac{dx}{\surd(1 + x^2)} = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}$$

Sector igitur CM*m* $= \frac{1}{2}dx : (1 + x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c.). Unde per ſummationem eruitur ſector BCM, cujus tangens KB $= x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque ſi BM octans Circuli, ſeu arcus 45°, ſector erit (§.32 *Trigon.*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. in infinit. Hujus adeo ſeriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum eſt quadrans Circuli, immo integra area ſi diameter $= 1$.

SCHOLION.

125. *Seriem primam invenit* NEWTONUS, *alteram* Jacobus GREGORIUS, *& in eandem incidit* LEIBNITIUS *ignorans, dubio procul, prodituram ſeriem* Gregorianam, *cum ex tangente quæreret aream. Neque enim putandum eſt, quod inventum ſeriei, quam* GREGORIO *repertam non ignorabat, etſi publice non conſtaret, ſibi attribuerit abſque ulla ratione Vir probati alias candoris. Sed nullum eſt dubium quin ingenioſiſſimus* LEIBNITIUS *methodo ab iis diverſa, quas ego propoſui, ad ſuam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde conſtet, (quod* LEIBNITIUS *in* Actis Eruditorum *aſſeruerat*) ∫(dx : (1 + x²)) *dependere a quadratura circuli, & quomodo inde eruatur ſeries* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *reſponſurus, judicio* LEIBNITII *ſubmiſiſſem, eam equidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius abſolvi poſſe: unde etiam factum eſt, ut poſtea de breviori cogitarem.*

PROBLEMA XL.

126. *Ellipſin* Apollonianam *quadrare.* Tab.I. Fig.10.

Sit AC $= a$, GC $= c$, PC $= x$; erit (§.432 *part.* 1)

$$y^2 = c^2(a^2 - x^2) : a^2$$

$$y = c\surd(a^2 - x^2) : a$$

Eſt vero $\surd(a^2 - x^2) = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin. (§. 98 *part.* 1.). Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. conſequenter $\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodſi pro x ponatur a; erit quadrans Ellipſis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem ſeries integram Ellipſis aream exhibet, ſi a axem integrum denotet.

Aliter.

Tab.II. Fig.23. Quoniam elementum Ellipſeos eſt $cdx\surd(a^2-x^2):a$; erit ECLR$=\frac{c}{a}\int(dx\surd(a^2-x^2))$. Sed $\int(dx\surd(a^2-x^2))=$ DCLK (§. 124). Eſt itaque $a:c=$ DCLK : ECLR, hoc eſt, area circularis DCLK eſt ad Ellipticam ECLR ut axis major AB (qui eſt diameter circuli) ad minorem 2CE (§. 124 *part.* 1). Pendet adeo quadratura Ellipſeos a quadratura Circuli.

COROLLARIUM I.

127. Si fiat $\surd ac=1$, erit area Ellipſis $=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}-\frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo Ellipſin eſſe circulo æqualem, cujus diameter eſt media proportionalis inter axes Ellipſis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM II.

128. Eſt ergo Ellipſis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 408 *Geom.*), hoc eſt, ut c ad a (§. 124 *part.* 1), ſeu ut axis minor ad majorem: quod idem de ſegmentis indefinitis oſtendimus analytice in reſolutione.

COROLLARIUM III.

129. Data Circuli quadratura dabitur etiam quadratura Ellipſis, & contra.

SCHOLION.

130. *Quamvis Circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* HIPPOCRATES Chius, *ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *ſemicirculus &* GC = BG. *Deſcribatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA Lunula HIPPOCRATIS. *Quoniam* $BC^2=2GB^2$ (§. 417 *Geom.*); *erit quadrans* AFBC *ſemicirculo* AEB *æqualis* (§. 408 *Geom.*). *Ablato igitur utrinque ſegmento communi* AFBA; *erit* AEBFA$=\triangle$ ACB $=GB^2$.

Tab.II. Fig.21.

PROBLEMA XLII.

131. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP=PM (§. 52): erunt in $\triangle$ PMT anguli M & T æquales (§. 184 *Geom.*), adeoque TPQ=2M (§. 239 *Geom.*). Eſt vero anguli APQ menſura arcus dimidius AP (§. 291 & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322 *Geom.*). Ergo APQ=TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ=TPA+APQ =2APQ=2TMP, per *demonſtrata.* Ergo APQ=TMP=M*m*S, ob parallelas MP & *mq* (§. 233 *Geom.*). Quamobrem, cum ad S & Q ſint recti, *per conſtr.*; erit (§. 267 *Geom.*) Tab.I. Fig. 7.

AQ : QP = MS : S*m*

Sit jam AQ$=x$, AB$=1$, erit MS $=dx$, PQ$=\surd(x-xx)$ (§. 377 *part.* 1.) & $mS=dx\surd(x-xx):x$. Repperimus autem ſupra (§. 124) $\surd(x-xx)=x^{1:2}-\frac{1}{2}x^{3:2}-\frac{1}{8}x^{5:2}-\frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\surd(x-xx):x=$ (quoniam ob diviſionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 *part.* 1) $x^{-1:2}dx-\frac{1}{2}x^{1:2}dx-\frac{1}{8}x^{3:2}dx-\frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c. in infinitum, cujus ſumma $2x^{1:2}-\frac{1}{3}x^{3:2}-\frac{1}{20}x^{5:2}-\frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, eſt ſemiordinata Cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM.dx, ſeu elementum QMS*q* ſpatii cycloidici AMQ$=2x^{1:2}dx-\frac{1}{3}x^{3:2}dx-\frac{1}{20}x^{5:2}dx-\frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus ſumma$=\frac{4}{3}x^{3:2}-\frac{2}{15}x^{5:2}-\frac{1}{70}x^{7:2}-\frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinit. exprimit ſegmentum Cycloidis AMQ.

Quodſi $mS=gG=dx\surd(x-xx):x$ ducatur in GM$=$AQ$=x$, reperietur elementum GMH*g* areæ AMG$=dx\surd(x-xx)$: quod cum idem ſit cum elemen-

mento ſegmenti circuli APQ (§. 124), erit ſpatium AMG ſegmento circuli APQ; conſequenter area ADC ſemicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB ſemiperipheriæ circuli æquatur (§. 574 *part.* 1.) ſi ea $= p$ & AB $= a$; erit rectangulum BCDA $= ap$ (§. 375 *Geom.*), & ſemicirculus APB, adeoque & ſpatium cycloidicum externum ADC $= \frac{1}{4} ap$ (§. 429 *Geom.*). Ergo area ſemicycloidis ACB $= \frac{3}{4} ap$ & AMCBPA $= \frac{1}{2} ap$; conſequenter area Cycloidis eſt circuli genitoris tripla.

PROBLEMA XLIII.

133. *Ciſſoidem* DIOCLIS *quadrare.*

Quoniam $y^2 = x^3 : (1 - x)$, ſi 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part.* 1.); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1 : \sqrt{(1 - x)}$ actu radix, per Theorema generale (§. 98 *part.* 1) in quo erit $m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.1. - x = \tfrac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\frac{1x}{2}. - x = \frac{1.3x^2}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^2}{2.4}. - x = \frac{1.3.5x^3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}. - x = \frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus ſumma $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}\,(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1.3}{4.9}x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^5 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6$ &c. in infinitum) exprimit ſpatium APM.

Aliter.

Sit AP $= x$, PN $= v$, PM $= y$, AB $= a$; erit (§. 548 *part.* 1)

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$ Tab. II. *Fig.* 22.

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$

Quoniam (§. 547 *part.* 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x = PB = z$: habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Eſt vero vdx elementum circuli PNnp; $\int zdy$, ob $z = PB = OM$ & $dy = mR = oO$, elementum $mMOo$ areæ AMOB & ydx elementum PMmp areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra Ciſſoidem AI & ejus aſymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ eſt eadem area, adeoque $\int ydx = \int zdy$; conſequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem caſu $\int vdx$ ſemicirculum producat ANB; erit, ob $\int zdy = 3\int vdx$, totum ſpatium ciſſoidale in infinitum protenſum ſemicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA XLIV.

134. *Quadrare Logiſticam, ſeu Logarithmicam.*

Sit ſubtangens PT $= a$ (§. 54), PM $= y$, P$p = dx$; erit (§. *cit.*) Tab. I. *Fig.* 8.

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

 Spa-

Tab. I. *Fig.* 8. Spatium ergo interminatum HPMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM I.

135. Sit QS $= z$; erit ſpatium interminatum ISQH $= az$, conſequenter SMPQ $= ay - az = a(y-z)$, hoc eſt, ſpatium inter duas Logiſticæ ſemiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

COROLLARIUM II.

136. Eſt itaque ſpatium BAPM ad ſpatium PMSQ ut differentia ſemiordinatarum AB & PM ad differentiam ſemiordinatarum PM & SQ (§. *præc.* & §. 124 *part.* 1).

PROBLEMA XLV.

137. *Quadrare Spirales.*

Tab. I. *Fig.* 6. Sint omnia ut in Problemate 8 (§. 50); erit arculus EG $= ydx : a$; qui ductus in $\frac{1}{2}$ AG producit ſectorem infinite parvum GAE $= y^2 dx : 2a$ (§. 435 *Geom.*). Eſt autem pro Spirali *Archimedea*,

$$by = ax$$
$$y^2 = a^2 x^2 : b^2$$
$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$
$$\int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodſi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit ſpatium ſpirale integrum $\frac{1}{6} ab$. Similiter pro infinitis Spiralibus ad circulum relatis (§. 572 *part.* I).

$$b^n y^m = a^m x^n$$
$$y^m = a^m x^n : b^n$$
$$y = a x^{n:m} : b^{n:m}$$
$$y^2 = a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m}$$
$$y^2 dx : 2a = a x^{2n:m} dx : 2 b^{2n:m}$$
$$\int y^2 dx : 2a = m a x^{(2n+m):m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Quare ſi pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro ſpatiis ſpiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n+2m) b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$. Tab. I. *Fig.* 6.

Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad CF ut abſciſſa ad ſemiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur ſpatium ſpirale. Sit enim ex. gr. BC ad CF ut abſciſſa Parabolæ ad ſemiordinatam, erit (ſumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$
$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$
$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$
$$\int y^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec abſimili modo invenitur ſpatium inter arcum BC & Spiralem BF comprehenſum, cujus elementum eſt trapezium CFID $=$ (CD $+$ FI) $\frac{1}{2}$ FC (§. 400 *Geom.*). Eſt vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, adeoque CFID $= (dx + ydx : a)(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam Spiralis ſit parabolica, pro dx ſubſtituatur valor ipſius $(2ydy - 2ady) : r$, erit elementum ſpeciale $(ay^2 dy + a^2 y dy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$; cujus ſumma, $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$, eſt ſpatium quæſitum BFC.

PROBLEMA XLVI.

138. *Quadrare Conchoidem* NICOMEDIS.

Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Tab. I. *Fig.* 5.

Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM, *per hypoth.* erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), conſequenter (§. 268 *Geom.*),

PC

Tab.I. *Fig.* 5.

$$PC : PM = OQ : OM$$

$$a+b-x : y = a-x : OM$$

& hinc $OM = y(a-x) : (a+b-x)$ adeoque $OM^2 = y^2 (a-x)^2 : (a+b-x)^2$. Porro $OQ^2 = (a-x)^2$, & $QM^2 = AB^2$ (§. 535 *part.* 1) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2 (a-x)^2}{(a+b-x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2 (a-x)^2 : (a+b-x)^2$$

$$\surd (2ax - x^2) = y(a-x) : (a+b-x)$$

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \surd (2ax - x^2)$$

Habemus itaque elementum areæ $PpmM = ydx = \frac{a+b-x}{a-x} dx \surd(2ax - x^2)$ nec alia re opus eſt, quam ut $\surd(2ax - x^2)$ reſolvatur in ſeriem (§. 98 *part.* 1.), ſeries hæc porro ducatur in $a+b-x$ & factum tandem dividatur per $a-x$. Ita enim obtinetur ſeries, quæ ſingulis terminis in dx ductis exprimit elementum areæ atque eodem, quo ante, modo ſummatur. Ne calculus perplexus tyrones turbet; ſumamus caſum ſimpliciſſimum, in quo eſt $b = a$, adeoque $a+b = 2a$, & ne $\surd 2$ toties ſit ſcribenda; ponamus $2a = c$, ut ſit $a = \frac{1}{2}c$: erit $ydx = \frac{c-x}{\frac{1}{2}c - x} dx \surd(cx - x^2)$. Eſt autem $\surd (cx - x^2)$ ſemiordinata circuli, cujus diameter c, atque adeo coincidit reſolutio in ſeriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§. 124), niſi quod ibidem ſuppoſuerimus $c = 1$. Quoniam tamen hic conſultius eſt c retineri & in reſolutione, in gratiam operationum ſequentium, quædam notanda ſunt; ideo non inconſultum ducimus, vi Theorematis *Newtoniani* (§. 99 *part.* 1) reſolutionem ipſam inſtituere. Erit itaque

$m = 1$, $n = 2$, $P = cx$,

$Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x$ (§. 54, 55 *part.* 1), adeoque

$$P^{m:n} = c^{1:2} x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}c^{1:2} x^{1:2} . -c^{-1}x = -\tfrac{1}{2}c^{-1:2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} . -\tfrac{1}{2}c^{-1:2} x^{3:2} . -c^{-1}x = -\tfrac{1}{8}c^{-3:2} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6} . -\tfrac{1}{8}c^{-3:2} x^{5:2} . -c^{-1}x = -\tfrac{1}{16}c^{-5:2} x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} . -\tfrac{1}{16}c^{-5:2} x^{7:2} . -c^{-1}x = -\tfrac{5}{128}c^{-7:2} x^{9:2}, \text{ \&c.}$$

Eſt itaque $\surd (cx - x^2) = c^{1:2} x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{-1:2} x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-3:2} x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-5:2} x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-7:2} x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodſi hanc ſeriem multiplices per $c-x$, & porro dividas per $\frac{1}{2}c - x$, prodibit $(c-x)\surd(cx - x^2) : (\frac{1}{2}c - x) = 2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2} x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & diviſio modo ordinario inſtituitur. Etenim ſi ſeriem multiplices per c, prodit $c^{3:2} x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{1:2} x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-1:2} x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-3:2} x^{7:2} - \frac{5}{128} c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2} x^{3:2} + \frac{1}{2}c^{-1:2} x^{5:2} + \frac{1}{8}c^{-3:2} x^{7:2} + \frac{1}{16}c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. Quodſi terminos homogeneos in unam ſummam colligas, obtinetur ſeries $c^{3:2} x^{1:2} - \frac{3}{2}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{5}{8}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{3}{128} c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. Hac porro diviſa per $\frac{1}{2}c - x$ (§. 40 *part.* 1), prodit quotus $2c^{1:2} x^{1:2} + c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2} x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2} x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

Tab. I. Eſt adeo elementum areæ Conchoidis
Fig. 5. $2c^{-1:2}x^{1:2}\,dx + c^{-1:2}x^{3:2}\,dx + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}\,dx + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}\,dx + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}\,dx$ &c. in infinit. Quare area AMP $= \frac{4}{3}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{2}{5}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{11}{14}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{5}{4}c^{-5:2}x^{9:2} + \frac{723}{352}c^{-7:2}x^{11:2}$ &c. in infin.

PROBLEMA XLVII.

139. *Invenire rationem, quam habent ſpatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales deſcripta, ſemiordinatis correſpondentibus rationem conſtantem habentibus.*

Sit elementum ſpatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum ſpatii alterius zdx, poſita nempe ſemiordinata hujus z, abſciſſa communi x. Sed cum in ſingulis elementis eadem ſemper ſit ratio ipſius y ad z, *per hypoth.* erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 187 *Arithm.*) $= y : z$ (§. 181. *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem baſium, quibus inſiſtunt, ſi ſemiordinatæ correſpondentes fuerint in ratione conſtante.

COROLLARIUM I.

140. Quare ſi ARB fuerit ſemiellipſis; Tab. II.
AKB ſemicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione conſtante *Fig.* 23.
DC ad EC (§. 599 *part.* 1.), adeoque ſegmentum circulare BKL ad ſegmentum ellipticum BRL ut KL ad RL.

COROLLARIUM II.

141. Quodſi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem ſector circularis BFK eſt ad ſectorem ellipticum BFR ut KL ad RL (§. 187 *Arithm.*). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 *part.* 1.) & ut CD ad CE ita Circulus integer ad Ellipſin integram (§. 128); erit quoque ſector KFB ad ſectorem RFB ut Circulus ad Ellipſin (§. 167. *Arithm.*), conſequenter ut ſector KFB ad aream integri Circuli, ita ſector RFB ad integram Ellipſis aream (§. 173 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam ſectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus Capite ſequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.

De uſu Calculi integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO VII.

143. Rectificatio curvæ eſt inventio rectæ, cui æqualis eſt linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur conſtare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; ſi una earum inveniatur per calculum differentialem, ſumma dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex ſuperioribus Tab. I.
conſtet, eſſe MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20); *Fig.* 2.
erit Mm ſeu elementum curvæ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quodſi itaque ex æquatione differentiali ad curvam ſpecialem ſubſtituatur

ſtituatur valor vel ipſius dx^2, vel ipſius dy^2; habetur elementum ſpeciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumſtantiis ſpecialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

PROBLEMA XLVIII.

146. *Parabolam rectificare,*

Pro Parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$\surd(dx^2 + dy^2) = \surd(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)$$
$$= dy \surd(aa + 4yy) : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, reſolvatur in ſeriem infinitam (§. 99 *part.* 1.); erit in Theoremate generali

$$n = 2,\ m = 1,\ P = a^2,\ Q = 4y^2 : a^2$$
$$P^{m:n} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a.\ 4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7} \text{ \&c.}$$

in infinitum.

Quare $dy\surd(aa + 4yy) : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. cujus integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum.

COROLLARIUM I.

Tab.II. 147. Sint AC & DC ſemiaxes conjugati
Fig.24. Hyperbolæ æquilateræ; erit $AC = DC = a$ (§. 505 *part.* 1). Sit $CQ = MP = 2y$; erit Tab.II.
(§. 534 *part.* 1) $QM = \surd(4yy + aa)$. Quod- Fig.24.
ſi *qm* intelligatur ipſi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ $CQMA = dy\surd(aa + 4yy)$. Pendet itaque rectificatio Parabolæ a quadratura ſpatii Hyperbolici CQMA.

COROLLARIUM II.

148. Sit AMR Parabola, cujus parame- Tab.
ter AC, & circa communem axem deſcrip- IV.
ta Hyperbola æquilatera ANT, cujus axis Fig.48.
2CA. Si fiat $CQ = AV = QN = 2PM$, & rectangulum CORA ſpatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146, 147), conſequenter $RV = AM - 2PM$, ſeu differentia inter ordinatam & arcum reſpondentem, & $ORVQ = VNA$.

SCHOLION.

149. *Probe notandum eſt, omnes ſummationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in caſu iiſdem utamur. Unde ut ſint perfectæ, in omnibus obſervanda eſt regula ſupra tradita de quadraturis* (§. 109).

PROBLEMA XLIX.

150. *Rectificare Parabolam ſecundi generis, ad quam* $ax^2 = y^3$, *ſeu ſumto* $a = 1$, $x^2 = y^3$.

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx = 3y^2 dy$

$$4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4x^2 = 9y^4dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4}ydy^2$$

$$\surd(dx^2 + dy^2) = \surd(\tfrac{9}{4}ydy^2 + dy^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}\surd(9ydy^2 + 4dy^2) = \tfrac{1}{2}dy\surd(9y + 4).$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\surd(9y + 4) = v$$

erit $9y + 4 = v^2$

$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\surd(9y + 4) = \tfrac{1}{9}v^2dv$$

$$\int\tfrac{1}{2}dy\surd(9y + 4) = \tfrac{1}{27}v^3$$
$$= \tfrac{1}{27}(9y + 4)\surd(9y + 4).$$

Ut

Ut vero ſumma exprimat longitudinem arcus, fiat $y=0$; erit reſiduum $=\frac{4}{27}\sqrt{4}=\frac{8}{27}$: adeoque arcus $\frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)}-\frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.

Tab.II. *Fig.*19. 151. Sit parameter Parabolæ *Apollonianæ* 1, AP = 1, $PQ=\frac{9}{4}y$, erit $AQ=\frac{9}{4}y+1$, & ob parametrum 1, $QN^2=\frac{9}{4}y+1=(9y+4):4$ (§.388 *part.*1.), conſequenter $QN=\frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)}$. Eſt adeo elementum QN*nq* ſpatii parabolici $PMNQ=\frac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)}$; quod diviſum per 1, ſive parametrum, dat elementum arcus Parabolæ ſecundi generis, ad quam $ax^2=y^3$. Pendet adeo hujus rectificatio a quadratura Parabolæ *Apollonianæ*; quæ cum dari poſſit (§.103), mirum non eſt, illam quoque rectificabilem eſſe.

PROBLEMA L.

152. *Infinitas Parabolas rectificare.*

Si parameter = 1, pro infinitis parabolis (§. 519 *part.* 1)

$$y^m=x$$
$$my^{m-1}dy=dx$$
$$m^2y^{2m-2}dy^2=dx^2$$

h. e. ſi brevitatis gratia fiat $2m-2=r$

$$m^2y^r dy^2=dx^2$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(m^2y^r dy^2+dy^2)}=dy\sqrt{(m^2y^r+1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex m^2y^r+1 extrahenda eſt radix per Theorema generale (§. 99 *part.*1); in quo erit

$$m=1,\ n=2,\ P=1,\ Q=m^2y^r$$
$$P^{n:m}=1=A$$
$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}m^2y^r=B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.\frac{1}{2}m^2y^r.\ m^2y^r=-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}=C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}.\ m^2y^r=+\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}=D.$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}.\ m^2y^r=-\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}m^8y^{4r}=E$$
$$\frac{m-4n}{5n}EQ=-\frac{7}{10}.-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}.m^2y^r=+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}\text{ \&c. in infinitum.}$$

Habemus itaque $dy\ \sqrt{(1+m^2y^r)}$ $dy+\frac{1}{2}m^2y^r dy-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy+\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}dy-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}dy+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinit. cujus integrale $y+\frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1}-\frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1}+\frac{1.3}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}$. &c. in infinitum, indefinite exprimit arcum parabolicum cujuſcunque generis.

Quodſi pro r ſubſtituatur valor ipſius $2m-2$; prodibit idem arcus $=y+\frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1}-\frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3}+\frac{1.3}{2.4.6(6m-5)}m^6y^{6m-5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LI.

153. *Dato ſinu* PQ *arcus* AP; *invenire arcum* AP. Tab.I. *Fig.*7.

Sit radius AI=1, PQ=y, AQ=x; erit (§.377 *part.*1)

2x -

Tab. I. *Fig.* 7.

$$2x - xx = yy$$
$$2dx - 2xdx = 2ydy$$
$$dx = ydy : (1 - x)$$
$$dx^2 = y^2dy^2 : (1 - 2x + xx) = y^2dy^2 : (1 - y^2)$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1 - y^2} + dy^2$$
$$= (y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2) : (1 - y^2) = dy^2 : (1 - y^2)$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy : \sqrt{(1 - y^2)} = dy(1 - y^2)^{-1:2}.$$

Reſolvatur hoc elementum in ſeriem infinitam per extractionem radicis, vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1), in quo erit

$$m = -1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = -y^2$$
$$P^{m:n} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.\ 1. - y^2 = \tfrac{1}{2}y^2 = B$$
$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}y^2. - y^2 = \tfrac{1.3}{2.4}y^4 = C$$
$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}y^4. - y^2 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$$
$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6. - y^2 =$$
$$\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^3 \text{ \&c. in infinit.}$$

Eſt adeo $dy : \sqrt{(1 - y^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. eſt arcus AP, cujus ſinus PQ $= y$, ſinu toto exiſtente 1. Si terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. & ſecundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum ſit

Tab. I. *Fig.* 7.

$$A = y$$
$$B = \frac{1}{2.3}y^3 = \frac{1.1}{2.3} Ay^2$$
$$C = \frac{1.3}{2.4.5}y^5 = \frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5 = \frac{3.3}{4.5} By^2$$
$$D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 = \frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7 = \frac{5.5}{6.7} Cy^2$$
$$E = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 = \frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 =$$
$$\frac{7.7}{8.9} Dy^2$$

ſeries inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3} Ay^2 + \frac{3.3}{4.5} By^2 + \frac{5.5}{6.7} Cy^2 + \frac{7.7}{8.9} Dy^2$ &c.

Si coſinus QI $= x$, erit (§. 417 *Geom.*) PQ $= \sqrt{(1 - xx)}$. Sit pq ipſi PQ infinite propinqua, & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q ſint recti, *per hyp.* PO $= Qq = dx$ & △△pOP atque PQI rectangula. Quare cum OPQ ſit rectus (§. 230 *Geom.*) & pPI itidem rectus (§. 38); erit etiam pPO = IPQ (§. 91 *Arithm.*), conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(1 - xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens eſt, ſi in ſerie anteriore pro y ſubſtituatur x, prodire ſeriem pro arcu, qui eſt illius complementum ad 90°.

Corollarium I.

154. Quoniam elementum arcus Mm $= dy : \sqrt{(1 - y^2)}$, ſi MC $= 1$, PM $= y$ (§. 153); Tab. II.
erit ſector elementaris MCm $= dy : 2\sqrt{(1 - y^2)}$ *Fig.* 20.
(§. 435 *Geom.*); conſequenter ſector BCM $= \frac{1}{2}\int dy : \sqrt{(1 - y^2)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4.4.5}y^5 + \frac{3.5}{4.4.6.7}y^7 + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}y^9$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.20. 155. Quodſi MC $=1$, PC $=y$, erit denuo $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$ (§.153); conſequenter & $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$: Summa vero exhibet ſectorem MCO.

COROLLARIUM III.

156. Si fiat $y=1$, ſector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui adeo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{3}{4.4.5} + \frac{3.5}{4.4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}$ &c. ſive $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304}$ &c. in infinit. Eadem ſeries integrum Circulum exprimit, ſi fuerit diameter $=1$.

PROBLEMA LII.

Tab.I. Fig.7. 157. *Dato ſinu verſo* AQ; *invenire arcum* AP.

Sit $AQ = x$, diameter $AB = 1$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§.377 *part.* I) & *vi Probl. præc.* $Pp = dx : 2\sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}dx\,(x - xx)^{-1:2}$. Cum adeo ſit, in Theoremate generali (§.99 *part.* I), $m=-1$, $n=2$, $P=x$, $Q=-x$; erit

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1:2}.-x = \tfrac{1}{2}x^{1:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}.x^{1:2}.-x = \tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2}.-x = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}.-x = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$$

&c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ &c. in infinitum, ſeu $\sqrt{x}\,(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \sqrt{x}$. Tab. I. Fig.7.

PROBLEMA LIII.

158. *Data tangente* BK; *invenire arcum* BM. Tab.II. Fig.20.

Sit tangens $BK = x$, radius $BC = 1$, erit $Mm = dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§.124). Hujus ſeriei ſumma $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum, dat arcum BM.

Cum tangens 45° ſit radio æqualis (§. 32 *Trigon.*), ſi pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° ſeu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quæ eadem ſeries quadranti ſatisfacit, ſi diameter $=1$.

PROBLEMA LIV.

160. *Dato arcu* BM; *invenire ſinum* PM.

Sit ſinus $PM = y$, radius $BC = 1$, arcus $BM = v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§.153). Valor ipſius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Eſt nimirum in Theoremate generali (§.366 *part.* I) $a=1$, $c=\frac{1}{6}$, $e=\frac{3}{40}$ &c. adeoque

$$v : a = v$$

$$-acv^3 : a^5 = -\tfrac{1}{6}v^3$$

$$+(3a^2c^2 - a^3e)v^5 : a^9 = (\tfrac{3}{36} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= (\tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= \tfrac{40-36}{12.40}v^5$$

$$= \tfrac{4}{12.40}v^5 = \tfrac{1}{120}v^5$$

Hinc

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum; unde lex progreſſionis manifeſta eſt. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3$ $+ \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7$ $+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c.

Quodſi Theorema generale ſupponere non libet, reperietur valor ipſius y eodem modo, quo (§. 366 *part.* 1.) Theorema generale inveſtigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \&c.$$

erit (§. 95 *part.* 1.)

$$\begin{aligned} y^3 &= a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \&c. \\ &\qquad\qquad + 3a^2cv^7 + \&c. \\ y^5 &= \qquad a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \&c. \\ y^7 &= \qquad\qquad a^7v^7 + \&c. \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\begin{aligned} y &= av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \ \&c. \\ \tfrac{1}{6}y^3 &= \quad + \tfrac{1}{6}a^3v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \ \&c. \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}a^2cv^7 \\ \tfrac{3}{40}y^5 &= \qquad + \tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \ \&c. \\ \tfrac{5}{112}y^7 &= \qquad\qquad + \tfrac{5}{112}a^7v^7 \ \&c. \\ -v &= -v \end{aligned}$$

$a - 1 = 0 \qquad b + \frac{1}{6}a^3 = 0$

$a = 1 \qquad b = -\frac{1}{6}$

$c + \frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{40}a^5 = 0$

h.e. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{40 - 36}{12.\ 40} = \frac{1}{120}$$

$d + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{8}a^4b + \frac{5}{112}a^7 = 0$

h.e. $d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$

ſeu $d + \frac{1}{5040} = 0$

$$d = -\frac{1}{5040}$$

Nimirum $\frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}$, $\frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$
tandem $\frac{5}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}$.

Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA LV.

161. *Dato arcu* BM; *invenire tangentem* BK. Tab.II. *Fig.*20.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus $= v$; erit (§. 158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in Problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 *part.* 1).

Eſt nimirum, vi Theorematis generalis,

$$x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \ \&c.$$

Jam vero $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$, per legem comparationis, adeoque

$$-\frac{ac}{a^5} = -c = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = 3c^2 - e = \frac{3}{9} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 3}{3.5} = \frac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Poteſt etiam valor ipſius x eodem modo inveniri, quo in Problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. $= 0$; erit (§. 95 *part.* 1)

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \ \&c. \\ &\qquad\qquad + 3a^2cv^7 \ \&c. \\ x^5 &= \qquad + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \ \&c. \\ x^7 &= \qquad\qquad + a^7v^7 \ \&c. \end{aligned}$$

Habemus adeo, ob

$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. $= v$

$$-v = -v$$

$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$\qquad\qquad\qquad - a^2cv^7$$

$$+\tfrac{1}{5}x^5 = +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{7}x^7 = -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Quamobrem

$$\frac{a-1=0}{a=1} \quad \frac{b-\tfrac{1}{3}a^3=0}{b=\tfrac{1}{3}} \quad \frac{c-a^2b+\tfrac{1}{5}a^5=0}{c=b-\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}}$$
$$= \frac{5-3}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0}{d - \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} = 0}$$

$$d = \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \frac{126+135-210}{945}$$

$$= \frac{51}{945} = \frac{17}{315}$$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione aſſumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. ſubſtitutis, prodit $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{2}{15}v^5 + \tfrac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, ſi plures termini deſiderentur, aſſumtitiam quoque ex pluribus conſtandam eſſe.*

PROBLEMA LVI.

Tab.I. Fig. 7. 163. *Dato arcu* AP; *invenire ſinum verſum* AQ.

Quodſi formulam deſideres, quam NEWTONUS dedit (a); radius ſupponi debet 1. In formula ſuperiori, quam pro arcu ex ſinu verſo eruimus (§. 157), diameter eſt 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua ſupra uſi ſumus, methodo eruenda. Sit igitur AI = 1, AQ = x, erit AB = 2, PQ = $\sqrt{(2x - x^2)}$ & per demonſtrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(2x - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

(a) In *Epiſtola ad* LEIBNITIUM, quæ legitur apud WALLISIUM Vol. III. Oper. f. 625.

conſequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x - x^2)} = dx\,(2x - x^2)^{-1:2}$ cumque ſit (§. 99 *part.* I.)

$m = -1$. $n = 2$, $P = 2x$, $Q = -x^2 : 2x = -\tfrac{1}{2}x$; erit

$$P^{m:n} = (2x)^{-1:2} = \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} = A,$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$$

&c.

Eſt itaque $Pp = \dfrac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus $AP = \dfrac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

Nam
$$\frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}.\tfrac{3}{2}} = \frac{2x^{3:2}}{3.4\sqrt{2}} = \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$$
$$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}.\tfrac{5}{2}} = \frac{2.3x^{5:2}}{5.32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$$
$$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}.\tfrac{7}{2}} = \frac{2.5x^{7:2}}{128.7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}.$$

Sit jam AP = v,

erit $v = \dfrac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

adeoque

$$v^2 = \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2.6} + \frac{x^3}{2.36} \text{ \&c.}$$
$$\qquad\qquad + \frac{4.3x^3}{2.80}$$

hoc eſt, $v^2 = 2x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{72}x^3$
$\qquad\qquad + \tfrac{3}{40}x^3$

Ponatur

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $x^2 = a^2v^4 + 2abv^6$

$x^3 = + a^3v^6$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$
$$+\tfrac{1}{3}x^2 = +\tfrac{1}{3}a^2v^4 + \tfrac{2}{3}abv^6$$
$$+\tfrac{1}{72}x^3 = +\tfrac{1}{72}a^3v^6$$
$$+\tfrac{3}{40}x^3 = +\tfrac{3}{40}a^3v^6$$
$$-v^2 = -v^2$$

Quamobrem

$$2a - 1 = 0 \qquad 2b + \tfrac{1}{3}a^2 = 0$$
$$2a = 1 \qquad 2b = -\tfrac{1}{3}a^2$$
$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = -\tfrac{1}{6}a^2 = -\tfrac{1}{6\cdot 4} = -\tfrac{1}{24}$$
$$2c + \tfrac{2}{3}ab + \tfrac{1}{72}a^3 + \tfrac{3}{40}a^3 = 0$$
$$c = -\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 - \tfrac{3}{80}a^3$$
$$-\tfrac{1}{3}ab = +\tfrac{1}{144} = +\frac{8}{144\cdot 8}$$
$$-\tfrac{1}{144}a^3 = -\frac{1}{144\cdot 8}$$
$$-\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144\cdot 8} = \tfrac{7}{1152}$$
$$-\frac{3a^3}{80} = -\frac{3}{80\cdot 8} = -\tfrac{3}{640}$$
$$c = \frac{4480-3456}{1152\cdot 640} = \frac{1024}{1252\cdot 640}$$
$$= \frac{16}{1152\cdot 10} = \frac{1}{720}$$

Eſt igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1.2$, $24 = 1.2.3.4$, $720 = 1.2.3.4.5.6$. Quare $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6$ &c. Quodſi jam terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius $= 1$, erit ſinus complementi, ſeu coſinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 - \frac{1}{1...3\,.4.5.6}v^6 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}v^8$ &c.

COROLLARIUM II.

165. Si $1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2...4}v^4$, ſive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi ſatisfacit pro ſinu complementi arcus, & coſinus iſte dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, conſequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 *part.* 1).

PROBLEMA LVII.

166. *Dato arcu* BM; *invenire ſecantem* KC. Tab. II. *Fig.* 20.

Sit $BC = 1$, arcus $= v$, erit $KB = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161); adeoque $BC^2 = 1$, $KB^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. conſequenter (§. 417 *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$; $KC^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodſi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit $KC = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli oſtendit.

$$1 + v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.} \left(1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{5}{24}v^4 + \text{ \&c.}\right.$$
$$1$$
$$\overline{+ v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2)$$
$$+ v^2 + \tfrac{1}{4}v^4$$
$$\overline{+ \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2 + v^2)$$
$$+ \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{5}{24}v^6 \text{ \&c.}$$
$$\overline{+ \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2 + v^2 + \tfrac{5}{12}v^4)$$
$$+ \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$
$$\overline{\text{\&c. \&c.}}$$

Scholion.

167. *Seriem pro ſinu & ſinu verſo ex arcu, atque pro arcu ex iiſdem determinando invenit* Newtonus (l); *ſeriem pro tangente & ſecante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando,* Jacobus Gregorius (m). *Exiſtimavit autem* Leibnitius *ſeries iſtas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum neceſſitate liberare.*

Problema LVIII.

Tab. I. Fig. 7. 168. *Rectificare Cycloidem.*

Sit $AQ = x$, $AB = 1$, erit $Qq = MS = dx$, $PQ = \surd(x - xx)$ (§. 377 *part.* 1) & hinc $AP = \surd x = x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), conſequenter ob $\triangle\triangle$ APQ & MmS ſimilitudinem ſupra demonſtratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}\,dx$$

Eſt ergo Mm differentiale arcus cycloidici $AM = x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2AP$ eſt arcus AM, ſeu arcus Cycloidis AM eſt chordæ arcus circuli genitoris ipſi reſpondentis AP duplus.

Problema LIX.

Tab. IV. Fig. 49. 169. *Data chorda arcus* AP; *invenire arcum cognominem, quem ſubtendit.*

Sit $AB = 1$, $AP = x$: cum angulus APB ſit rectus (§. 317 *Geom.*) erit $PB = \surd(1 - x^2)$ (§. 417 *Geom.*). Sit porro Ap ipſi AP infinite propinqua. Quoniam angulus $AQB = APB + PAp$ (§. 239 *Geom.*) & PAp, cujus menſura eſt $\frac{1}{2}$ Pp (§. 314 *Geom.*) infinite parvus; erit $AQB = APB$ (§. 4), conſequenter rectus (§. 145 *Geom.*) Eſt igitur & $PQp = AQB$ (§. 156 *Geom.*) rectus (§. 145 *Geom.*) itidemque AQP rectus (§. 65 *Geom*) adeoque ipſi APQ æqualis (§. 145 *Geom.*) & hinc $AP = AQ$ (§. 253, 89 *Geom.*); conſequenter Qp differentiale chordæ AP (§. 6) $= dx$. Porro anguli PAB menſura eſt arcus dimidius PB & anguli QPp menſura $\frac{1}{2}pB$ (§. 314 *Geom.*): quare cum arcus PB & pB, ob infinite parvum Pp, ſint æquales (§. 4), erit angulus $PAB = QPp$ (§. 141 *Geom.*). Habemus itaque (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\surd(1 - x^2) : 1 = dx : Pp$$

adeoque $Pp = dx : \surd(1 - x^2)$, & hinc porro arcus $AP = \int(dx : \surd(1 - x^2))$. Eadem igitur formula ſatisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam ſupra invenimus pro eodem ex ſinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus

$$AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9 \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quodſi $PB = x$, erit $PQ = dx$ & $AP = (\surd 1 - x^2)$, atque eodem prorſus modo reperitur arcus $PB = \int(dx : \surd(1 - x^2))$, ut adeo eadem ſeries ſatisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

Problema LX.

170. *Data chorda arcus* AP; *invenire ſegmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit, per demonſtrata in Problemate præcedente, $PB = \surd(1 - x^2)$ & $pQ = dx$, nec non $\triangle APB \backsim \triangle PQp$: erit etiam (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\surd(1 - x^2) : x = dx : PQ$$

adeo-

(l) Vide *Commercium epiſtolicum* D. Joh. Collins p. 40. 52.

(m) Ibidem p. 45.

Tab. IV. Fig. 49. adeoque $PQ = xdx : \sqrt{(1-x^2)}$, conſequenter cum PQ haberi poſſit pro arcu infinite parvo ex centro A radio AP deſcripto (§. 38), adeoque APQ pro ſectore circulari, erit $APQ = x^2dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2}x^2dx\,(1-x^2)^{-1:2}$.

Eſt vero $(1-x^2)^{-1:2}$ ſeu $1:\sqrt{(1-x^2)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (§. 153), adeoque

$APQ = \frac{1}{2}x^2dx(1-x^2)^{-1:2} = \frac{1}{2}x^2dx + \frac{1}{4}x^4dx + \frac{1.3}{4.4}x^6dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^8dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10}dx$ &c. in infinit.

Ergo ſegmentum circuli $AP = \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXI.

171. *Dato arcu* AP; *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, $AP = x$, erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque $AP = x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut ſupra (§. 160).

Quodſi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & viciſſim chorda $AP = v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos ſuperiores repetenti apparet. Tab. IV. Fig. 49.

PROBLEMA LXII.

172. *Rectificare arcum Ellipſis* GM. Tab. I. Fig. 10. Sit $CG = c$, $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$, erit (§. 432 *part.* 1)

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$$

$$2a^2ydy = -2c^2xdx$$

$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4y^2} = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4c^2 - a^2c^2x^2} = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{a^4dx^2 - a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$, reſolvendus eſt in ſeriem & ſeries prior per poſteriorem dividenda eo modo, quem mox ſubjiciemus. Eſt itaque (§. 99 *part.* 1.), in caſu primo, $m = 1$, $n = 2$, $P = a^4$, $Q = -(a^2 - c^2)x^2 : a^4$

Fiat

Fiat $a^2 - c^2 = b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q = -b^2x^2 : a^4$.

Unde porro obtinetur

$P^{m:n} = a^2 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}. a^2. -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}. -\frac{b^2x^2}{2a^2}. -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}. -\frac{b^4x^4}{8a^6}. -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}. -\frac{b^6x^6}{16a^{10}}. -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c.

Eſt itaque $\sqrt{(a^4 - b^2x^2)} = \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)} = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $= K$

Enimvero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infin. (§. 126).

Quare $a\sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infin. $= L$.

Seriem adeo primam K per alteram L diviſurus probe obſervare debes omnes terminos in diviſione emergentes, in quibus x ad eandem dimenſionem aſſurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus ſimul ſumtis ſubſtitui poſſit unus, qualis etiam in caſu ſingulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, ſi fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam ſummam colligerentur. Quamobrem terminus unuſquiſque dividendæ dividitur per a^2, quotcunque partibus fuerit auctus in ipſo diviſionis actu, & integra ſeries dividens ducitur in quotum atque a dividenda ſubtrahitur, quemadmodum in communi diviſione fieri ſolet: id quod ex typo exempli ſubjecti attento lectori obvium.

$$\begin{array}{l}
K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\
L = a^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6} \\
\hline
\text{Reſid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{10}} \\
\qquad + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6} \\
\hline
L.B = -\frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8} \\
\qquad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
A. & B. & C. & D. & E. \\
1 & -\frac{b^2x^2}{2a^4} & -\frac{b^4x^4}{8a^8} & -\frac{b^6x^6}{16a^{12}} & -\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} \\
 & +\frac{x^2}{2a^2} & -\frac{b^2x^4}{4a^6} & -\frac{b^4x^6}{16a^{10}} & -\frac{b^6x^8}{32a^{14}} \\
 & & +\frac{3x^4}{8a^4} & -\frac{3b^2x^6}{16a^8} & -\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} \\
 & & & +\frac{5x^6}{16a^6} & -\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} \\
 & & & & +\frac{35x^8}{128a^8}
\end{array}$$

Reſid.

Reſid. II.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4} - \frac{b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{9x^8}{128a^6}$$

L. C =

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6} + \frac{b^4x}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{8a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2} - \frac{3x^6}{16a^4} - \frac{3x^8}{64a^6}$$

Reſid. III. =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8} - \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4} + \frac{15x^8}{128a^6}$$

L. D =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}} + \frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6} + \frac{3b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{32a^6}$$

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

 Subſti-

Subſtituatur jam valor ipſius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^4} = +\frac{3x^4}{8a^4}$$
$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$
$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo ſatis calculo, quem tamen diſtincte hic explicari conſultum fuit, ut ſit exemplar in caſibus ſimilibus, tandem reperitur

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Eſt

Tab. I. *Fig.* 10. Eſt igitur elementum arcus

$$\frac{dx\,\surd(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}{a\surd(a^2 - x^2)} =$$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

&c. in infinitum.

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodſi terminorum homogeneorum coëfficientes reducas ad eandem denominationem; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4}$

$$+ \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7$$
$$+ \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$$

Corollarium I.

173. Quodſi ponamus eſſe GC : AC = 1 : m adeoque AC = mc; erit GM = $x +$

$$\frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7$$
$$+ \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9 \text{ \&c.}$$

Quare ſi ſpecies Ellipſis in caſu dato determinetur, hoc eſt, m per numerum determinatum explicetur; prodibit ſeries multo ſimplicior. Sit enim $m = 2$, erit GM = Tab. I. *Fig.* 10.

$$x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7$$
$$+ \frac{3419}{75497472c^8}x^9 \text{ \&c.}$$

Corollarium II.

174. Quodſi $c = a$, Ellipſis degenerat in Circulum & ſeries pro Circulo evadit

$$x + \frac{x}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8} \text{ \&c.}$$

hoc eſt, ſi $a = 1$, ſeries $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. prorſus ut ſupra (§. 153).

Problema LXIII.

175. *Rectificare arcum Hyperbolæ* AM. Tab. II. *Fig.* 24.

Sit BC = AC = c, CQ = PM = x, dimidius axis conjugatus = a, CP = y, erit BP = $y + c$, AP = $y - c$

AP. PB = $y^2 - c^2$

Quare (§. 469 *part.* I)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h.e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{dx\,\surd(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}{a\surd(a^2 + x^2)}$$

 Ele-

Tab.II. *Fig.*24. Elementum hoc nonniſi ſignis differt ab elemento Ellipſis (§. 172). Quamobrem, eodem prorſus modo quo in Problemate præcedente, reperitur elementum arcus M*m* =

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc eſt, reductione coëfficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 + c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 + 48a^4c^4 + 24a^2c^6 + 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodſi denuo Hyperbolæ axes ponantur inter ſe ut 1 ad *m*, hoc eſt, ſi ſit $a = mc$, reperietur arcus $AM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2+1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4+4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6+48m^4+24m^2+5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et ſi ſpecies Hyperbolæ determinetur, explicando *m* per numerum determinatum 2, erit $AM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{17}{1024c^4}x^5 + \frac{145}{458752c^6}x^7 - \frac{4965}{75497472c^8}x^9$ &c. Tab.II *Fig.*24

Series adeo pro arcu hyperbolico à ſerie pro arcu elliptico non differt niſi ſignis, in formula generali.

COROLLARIUM.

176. Si Hyperbola fuerit æquilatera erit $c = a$, & ſeries pro arcu AM multo ſimplicior evadit. Eſt nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{5x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA LXVI.

177. *Rectificare Logarithmicam.* Tab.I *Fig.*8.

Sit curvæ ſubtangens $= a$, $PM = y$, $Pp = dx$, erit (§. 54)

$$\frac{ydx}{dy} = a$$
$$ydx = ady$$
$$dx = \frac{ady}{y}$$
$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)}$$

Ut elementum hoc *m*M integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda eſt radix. Erit itaque, in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1)

$m = 1$

Tab.I. *Fig.*8. $m=1, n=2, P=\frac{a^2}{y^2}, Q=1:\frac{a^2}{y^2}=\frac{y^2}{a^2}$

$$P^{m:n}=\frac{a}{y}=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}.\frac{a}{y}.\frac{y^2}{a^2}=\frac{y}{2a}=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{1}{4}.\frac{y}{2a}.\frac{y^2}{a^2}=-\frac{y^3}{8a^3}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{3}{6}.-\frac{y^3}{8a^3}.\frac{y^2}{a^2}=+\frac{y^5}{16a^5}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\tfrac{5}{8}.\frac{y^5}{16a^5}.\frac{y^2}{a^2}=-\frac{5y^7}{128a^7} \text{ \&c.}$$

Eſt itaque $\sqrt{(\frac{a^2}{y^2}+1)}=\frac{a}{y}+\frac{y}{2a}-\frac{y^3}{8a^3}+\frac{y^5}{16a^5}-\frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem ſeries prodit, ſi ex $\sqrt{(a^2+y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quæ provenit, $a+\frac{y^2}{2a}-\frac{y^4}{8a^3}+\frac{y^6}{16a^5}-\frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum Mm arcus interminati MI $=\frac{a}{y}dy+\frac{y}{2a}dy-\frac{y^3}{8a^3}dy+\frac{y^5}{16a^5}dy-\frac{5y^7}{128a^7}dy$ &c.

Quare arcus MI $=\int\frac{ady}{y}+\frac{y^2}{4a}-\frac{y^4}{32a^3}+\frac{y^6}{96a^5}-\frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur SQ $=z$, erit arcus interminatus SI $=\int\frac{adz}{z}+\frac{z^2}{4a}-\frac{z^4}{32a^3}+\frac{z^6}{96a^5}-\frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Eſt igitur arcus MS $=\int\frac{ady}{y}-\int\frac{adz}{z}+\frac{y^2-z^2}{4a}-\frac{y^4-z^4}{32a^3}+\frac{y^6-z^6}{96a^5}-\frac{5y^8-5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int\frac{ady}{y}-\int\frac{adz}{z}$ eſt ſpatium hyperbolicum aſymptoticum inter duas $a^2:y$ & $a^2:z$ comprehenſum, & per a diviſum (§. 118).

Eſt autem a latus potentiæ Hyperbolæ, y & z ſunt abſciſſæ in aſymptoto ſumtæ (§. 488 *part.* 1). Pendet adeo rectificatio curvæ Logarithmicæ a quadratura Hyperbolæ, quæ per ſeries infinitas in ſuperioribus data (§. 120).

Poteſt etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni poteſt $P=1$, $Q=\frac{a^2}{y^2}=a^2y^{-2}$. Quare cum ſit ut ante $m=1$, $n=2$; erit

$$P^{m:n}=1=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}.1.a^2y^{-2}=\tfrac{1}{2}a^2y^{-2}=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}a^2y^{-2}.a^2y^{-2}=-\tfrac{1}{8}a^4y^{-4}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{3}{6}.-\tfrac{1}{8}a^4y^{-4}.a^2y^{-2}=+\tfrac{1}{16}a^6y^{-6}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\tfrac{5}{8}.\tfrac{1}{16}a^6y^{-6}.a^2y^{-2}=-\tfrac{5}{128}a^8y^{-8} \text{ \&c.}$$

Eſt igitur elementum curvæ $dy+\frac{1}{2}a^2y^{-2}dy-\frac{1}{8}a^4y^{-4}dy+\frac{1}{16}a^6y^{-6}dy-\frac{5}{128}a^8y^{-8}dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $=y-\frac{1}{2}a^2y^{-1}+\frac{1}{24}a^4y^{-3}-\frac{1}{80}a^6y^{-5}+\frac{5}{896}a^8y^{-7}$ &c. $=y-\frac{a^2}{2y}+\frac{a^4}{24y^3}-\frac{a^6}{80y^3}+\frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia ſemiordinata SQ $=z$, erit longitudo curvæ $=z-\frac{a^2}{2z}+\frac{a^4}{24z^3}-\frac{a^6}{80z^5}+\frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter ſemiordinatas y & z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam ſeries iſtæ ſatisfaciunt quæſito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra ſubtangentem a decreſcat; ſerie prima utendum eſt, ſi $a > y$; poſteriori autem ſi $y > a$.

PROBLEMA LXV.

179. *Rectificare Hyperbolam ex æquatione ad Hyperbolam intra aſymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit

$$y = a^2 : x = a^2x^{-1}$$
$$dy = -a^2x^{-2}dx$$
$$dy^2 = a^4x^{-4}dx^2$$
$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4x^{-4}dx^2$$
$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})}$$

Elementum hoc arcus Hyperbolici non multum differt ab elemento arcus Logarithmicæ (§. 177).

Vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = a^4x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}.1.\,a^4x^{-4} = \tfrac{1}{2}a^4x^{-4} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}a^4x^{-4}.\,a^4x^{-4} = \frac{1}{2.4}a^8x^{-8} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}a^8x^{-8}.\,a^4x^{-4} = +\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}.\,a^4x^{-4} = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16} \text{ \&c.}$$

Eſt igitur elementum curvæ $dx + \tfrac{1}{2}a^4x^{-4}dx - \frac{1}{2.4}a^8x^{-8}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}dx$, &c. conſequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3}a^4x^{-3} + \frac{1}{2.4.7}a^8x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11}a^{12}x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15}a^{16}x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodſi alia abſciſſa fit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter ſemiordinatas abſciſſis x & z reſpondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorſus ſeries prodit, ſi in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſubſtituatur valor ipſius dx^2, ut elementum curvæ ſpeciale evadat $dy\sqrt{(1 + a^4y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decreſcat, nec unquam ſit major latere potentiæ a; ſeries hæc altera parum convergit.

Quod-

Quodſi a dicatur 1, erit ſeries pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{1}{2.3\,z^3} + \frac{1}{2.4.7\,x^7} - \frac{1}{2.4.7\,z^7} - \frac{1.3.}{2.4.6.11\,x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11\,z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXVI.

180. *Data area Hyperbolæ intra aſymptotos; invenire abſciſſam eidem reſpondentem.*

Sit area Hyperbolæ $= t$, abſciſſa a fine lateris potentiæ Hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

$$\begin{aligned} \text{erit } x^2 &= +a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 \\ &\qquad\qquad\qquad + 2act^4 \\ x^3 &= \qquad + a^3t^3 + 3a^2bt^4 \\ x^4 &= \qquad\qquad\qquad + a^4t^4 \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} x &= at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.} \\ -\tfrac{1}{2}x^2 &= -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 \\ &\qquad\qquad\qquad - act^4 \\ +\tfrac{1}{3}x^3 &= +\tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4 \\ -\tfrac{1}{4}x^4 &= \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}a^4t^4 \\ -t &= -t \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{2}$$

$$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$
$$\text{h. e. } c - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = 0$$
$$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$

$$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$$
$$\text{h. e. } d - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = 0$$
$$d = \tfrac{14}{48} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$$

Eſt igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c. $= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorſus modo in aliis caſibus inveniri poteſt baſis, ſi figuræ area datur per ſeriem infinitam, ut pluribus exemplis non ſit opus.*

PROBLEMA LXVII.

182. *Quadrare Cycloidem, ex ſuppoſita arcus Circuli rectificatione vi ſinus verſi.*

In Cycloide eſt arcus AP = PM (§. 575 *part.* 1). Jam ſi AQ $= x$, arcus AP, (§. 157) conſequenter Tab. I. *Fig.* 7.

$$PM = x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{3}{40}x^{5:2} + \tfrac{5}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$
$$PQ = x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \text{ (§. 124)}$$
$$QM = 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - \tfrac{1}{56}x^{7:2}$$

Quare elementum QMmq $= 2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorſus ut ſupra (§. 131).

SCHO-

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi Cycloidem uſus eſt* NEWTONUS (*a*): *quam ideo ſuperiori addidimus, ut appareat, quomodo ſubinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro Circulo ſubſtitui poſſunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis eſt* PM. *Dari etiam poſſunt exempla, in quibus arcus datur non per abſciſſam, ut in exemplo præſente, ſed per ſemiordinatam, veluti ſi* AP *ſit Parabola* (§. 146).

PROBLEMA LXVIII.

184. *Data chorda arcus cujuſcunque invenire chordam arcus alterius, qui ſit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli $= d$
chorda arcus dati $= a$
ratio arcuum $= 1 : n$
chorda arcus quæſiti $= x$
erit (§. 169).

$$\text{arcus datus} = a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{1.3a^5}{2.4.5d^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}a^7 \ \&c = a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \ \&c.$$

$$\text{arcus quæſitus} = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 \ \&c.$$

Quoniam arcus datus ad quæſitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \ \&c. = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 \ \&c.$$

conſequenter ſi prima ſeries ſit $=$ A altera B, erit B $-$ A $= 0$.

Fiat

$$\begin{aligned}
x &= ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \ \&c.\\
x^3 &= \quad + h^3a^3 + 3h^2ia^5 + 3h^2ka^7 + 3hi^2a^7\\
x^5 &= \quad + h^5a^5 + 5h^4ia^7\\
x^7 &= \quad + h^7a^7
\end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{array}{llll}
x = & ha + ia^3 & + ka^5 & + la^7 \ \&c.\\
+\frac{1}{2.3d^2}x^3 = & +\frac{1}{2.3d^2}h^3a^3 & +\frac{1}{2d^2}h^2ia^5 & +\frac{1}{2d^2}h^2ka^7 \ \&c.\\
 & & & +\frac{1}{2d^2}hi^2a^7 \ \&c.\\
+\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 = & & +\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5a^5 & +\frac{3.3}{2.3.4d^4}h^4ia^7 \ \&c.\\
+\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 = & & & +\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}h^7a^7 \ \&c.\\
\&c \ \&c & & & \&c
\end{array}$$

$$-\text{A} = -na - \frac{n}{2.3d^2}a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \ \&c.$$

(*a*) In *Analyſi per æquationes numero terminorum infinitas.* p. 18.

Habemus

Habemus itaque

$$h - n = 0$$

$$h = n$$

$$i + \frac{1}{2.3d^2}h^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$

$$i = \frac{n - n^3}{2.3d^2} = \frac{n.(1-n^2)}{2.3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2}h^2 i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{1}{2d^2}h^2 i$$

Eſt vero

$$h^5 = n^5 \qquad h^2 = n^2$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4} \qquad i = \frac{n-n^3}{2.3d^2}$$

$$h^2 i = \frac{n^3 - n^5}{2.3d^2}$$

$$\frac{1h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3 - n^5}{3.4d^4}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{2.3.4.5d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6}$

Eſt igitur chorda arcus quæſiti $= na + \frac{n.(1-n^2)a^3}{1.2.3d^2} + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{1.2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{1.2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

185. *Cum ſinus ſit arcus dupli ſubtenſa dimidia* (§. 2 Trigon.)*; formula præſens ſinibus computandis inſervit.*

PROBLEMA LXIX.

186. *Quadrare ſectorem Ellipſis* DCM.

Ducatur C*m* ex centro C ipſi CM infinite propinqua, & ex eodem centro C radio CM deſcribatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38), & ſector infinite parvus CMN = MN. ½ CM (§. 435 *Geom.*). Eſt vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§. 417 *Geom.*) Tab. IV. Fig. 50.

Sit jam AC $= a$, parameter $= b$,

PC $= x$, PM $= y$

erit AP $= a - x$

PB $= a + x$

AP. PB $= a^2 - x^2$

conſequenter (§. 420 *part.* I)

b : AB = PM² : AP. PB

$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$

$$y^2 = \frac{a^2 b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)^{1:2}$$

Tab. IV. *Fig.* 50.

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§.172)

Eſt vero $c = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)\,dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodſi jam partes has ipſius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare $NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$

adeoque $NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$

Jam cum ſit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum ſectoris CMN $= \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$

$$= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Eſt vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN $= \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; conſequenter ſector BCM $= \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Enimvero $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ eſt elementum arcus circuli LE radio CA deſcripti, cujus ſinus eſt PC (§. 153). Quare cum in ſuperioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus eſt, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$, ſive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat ſector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodſi fiat $c = a$, hoc eſt CD = CE, Ellipſis degenerat in circulum, & formula pro ſectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}$CE. LE, adeoque ſector ellipticus DCM in ſectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Eſt itaque

$$DCM : ECL = \tfrac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \tfrac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$= c : a$ (§. 124 *part.* 1)

$=$ CD : EL

hoc eſt, ſector ellipticus DCM eſt ad ſectorem circuli circa axem majorem deſcripti, ſinu arcuum PC utrobique exiſtente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet adeo quadratura ſectoris elliptici à quadratura ſectoris circuli.*

PROBLEMA LXX.

189. *Quadrare ſectorem hyperbolicum* CAM, *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Tab. IV. *Fig.* 5[illegible]

Intelligatur radius Cm ipſi CM infinite propinquus, & radio CM deſcribatur

Tab. IV. *Fig.* 51. batur arcus Circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$CM. MN ſector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), ſeu elementum ſectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ erit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $\quad PB = x + a$

$AP.\, PB = x^2 - a^2$

adeoque (§.459 *part.* 1)

$AB : b = AP.\, PB : PM^2$

$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$
$$CP^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} CM^2 &= x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a} \\ &= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a} \\ &= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CM &= \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)} \\ &= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2} \end{aligned}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2\,(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $$y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} dy^2 &= \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2} \\ &= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} \end{aligned}$$

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h. e. $$Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)\,dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)\,dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + \frac{-(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$\begin{array}{l} b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b \\ 4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b \\ \hline -\,2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2 \\ +\,2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2 \\ +\,4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2 \end{array}$$

&

$$\begin{array}{l} -\,4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2 \\ \quad 2abx^2 - 2a^3b \\ \hline +\,8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2 \\ -\,8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4 \end{array}$$

conſequenter productis hiſce in unam ſummam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^6}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$\tfrac{1}{2}CM.\,NM. = \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2ab)}}$$
$$= \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Eſt vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 *part.* 1) qui ſi dicatur $2c$; erit ſectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in Hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum ſectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Reſolvatur $1 : \sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1:2}$ in ſeriem (§. 99 *part.* 1) erit

$m = -1, n = 2, P = x^2, Q = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$

$P^{m:n} = x^{-1} = A$

$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}x^{-1}. - a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}. - a^2x^{-2} =$

$$+\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = C$$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}. - a^2x^{-2}$

$$= +\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = D$$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = \tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}. - a^2x^{-2}$

$$= +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx$$ &c. in infinitum.

Tab. IV. *Fig.* 51.

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$ &c.

Habemus itaque ſectorem CAM

$= \tfrac{1}{2}a\int cx^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$ &c. $= \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3}{4.4.4x^4}a^5c - \frac{1.3.5a^7c}{4.4.6.6x^6} - \frac{1.3.5.7a^9c}{4.4.6.8.8x^8}$ &c. in inf.

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura Hyperbolæ intra aſymptotos (§. 120); evidens eſt quadraturam ſectoris hyperbolici in hoc caſu ſupponere quadraturam Hyperbolæ intra aſymptotos.

Quodſi Hyperbola ad axem ſecundum referenda, fiat dimidius axis ſecundus $CD = c$, $CA = CB = a$, $CQ = PM = x$, $CP = QM = y$, erit $PM^2 = x^2$, $AP.PB = y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1).

$$AC^2 : CD^2 = AP.\,PB : PM^2$$
$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ eſt tertia proportionalis ad axem ſecundum 2CD & primarium AB dicitur parameter reſpectu axis ſecundi, quemadmodum parameter

Tab. IV. *Fig.* 51. rameter reſpectu axis primarii AB eſt tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); ſi parameter reſpectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, adeoque $2a^2 : c = p$, conſequenter $2a^2 : c^2 = p : c$, & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipſius $c^2 : a^2$ in æquatione ſubſtituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

$$\text{Ergo } CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c} = \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c} = \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\text{Porro } y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{adeoque } 2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2} = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2 = \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + \frac{-(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} = \frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}.\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}.\sqrt{(x^2 + c^2)}} = \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a = \tfrac{1}{2}acdx\,(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Reſolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in ſeriem: erit in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1.)

$$m = -1,\ n = 2,\ P = c^2,\ Q = \frac{x^2}{c^2}$$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{c}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.-\frac{x^2}{2c^3}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^4}{2.4c^5}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}.\frac{x^2}{c^2} = \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9}\ \&c.$$

Tab. IV. *Fig.* 51. Eſt itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. conſequenter $CMA = \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam ſectoris hyperbolici CAM hoc in caſu non pendere a quadratura Hyperbolæ intra aſymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excreſcit; ubi procul a vertice diſceſſeris, ſeries poſterior minus convergit priori; ſed quandiu $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM I.

190. Quoniam in Hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc eſt, axis ſecundus ſeu conjugatus eſt ad ipſius parametrum ut quadratum ſemiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum diſtantiæ ſemiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM II.

191. Cum in Hyperbola æquilatera ſit $c = a$, ſector hyperbolicus eſt $\int(a^2 dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)}) = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA LXXI.

Tab. IV. *Fig.* 52. 192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM; *invenire ſectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC eſt parallela (§. 448, 444 *part.* 1), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), adeoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam $AC = a$, $CD = 1$, $AE = x$, $PM = y$. Ducatur C*e* ipſi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN, atque radio CM arcus MO. Erit △ E*e*N ∽ △ AEC, quemadmodum ſupra in caſu ſimili (§. 124) demonſtratum eſt, $Ee = dx$, & ob $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§. 417 *Geom.*) $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum ſit (§. 267 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$
$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$

Porro, ob paralleliſmum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$
$$x : a = y : PC$$

adeoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 432 *part.* 1)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arithm.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

PC²

Tab. IV. *Fig.* 52.

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2+1}$$

$$CM^2 = \frac{x^2+a^2}{x^2+1}$$

$$CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

Denique ob ſectores ſimiles CEN & CMO (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CE : EN = CM : OM$$

$$\sqrt{(x^2+a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} : OM$$

adeoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+1)}}$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{2\sqrt{(x^2+1)}}$.

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2}adx}{1+x^2}$

Eſt igitur elementum ſectoris elliptici ACE idem cum ſectore circuli (§. 124), ſi CD = 1.

Quare ſector $AMC = \frac{1}{2}a(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. in infinit.).

PROBLEMA LXXII.

Tab. IV. *Fig.* 52. 193. *Dato ſectore* KFB, *recta* KF *ex foco Ellipſis ducta; invenire ſemiordinatam* KQ.

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$, $FB = b$, ſector $KFB = \frac{1}{2}v$, $CD = c$, erit differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$ & ob $QB.QA = BC^2 - QC^2$ (§. 431 *part.* I) ex natura Ellipſis (§. 430. *part.* I)

$$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$$

adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$ (§. 124 *part.* I.)

$$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$$

$$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$$

conſequenter $CQ^2 = a^2(c^2 - y^2) : c^2$

$$CQ = a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$$

$$CB = a$$

$$QB = a - a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$$

$$FB = b$$

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$$

Differentiale ipſius $FQ = \frac{aydy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$$KQ = y$$

Elementum ſegmenti $KQB = \frac{ay^2dy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

Porro

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$$

$$\tfrac{1}{2}QK = \tfrac{1}{2}y$$

$$\triangle FQK = \tfrac{1}{2}by - \tfrac{1}{2}ay + ay\sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$$

differentiale $\triangle FQK = \frac{1}{2}bdy - \frac{1}{2}ady - \frac{ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}} + ady\sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$ hoc eſt, reductione ad eandem denominationem facta.

$$d\triangle FQK = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)}dy + (ac^2 - 2ay^2)dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$$

$$dKQB = \frac{2ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$$

$$dFKB = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)}dy + ac^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$$

$$= \frac{ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}}dy$$

Habemus itaque

$$\frac{ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}}dy = \tfrac{1}{2}dv$$

$$(ac + (b - a)\sqrt{c^2 - y^2})dy = dv\sqrt{(c^2 - y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}(ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}) = \sqrt{(c^2 - y^2)}$$

$\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$

Jam ut valor ipſius y per v exprimatur, quod eſt quod quæritur, fiat

$$y=hv+iv^3+lv^5+mv^7\ \&c.$$

erit $dy=hdv+3iv^2dv+5lv^4dv+7mv^6dv\&c.$

$$\frac{dy}{dv}=h+3iv^2+5lv^4+7mv^6,\ \&c.$$

$$y^2=h^2v^2+2hiv^4+i^2v^6+2hlv^6\ \&c.$$

$$y^4=h^4v^4+4h^3iv^6\ \&c.$$

$$y^6=h^6v^6\ \&c.$$

Porro (§. 99 *part.* I)

$$\sqrt{(c^2-y^2)}=c-\frac{y^2}{2c}-\frac{y^4}{8c^3}-\frac{y^9}{16c^5}\ \&c.$$

$$=c-\frac{h^2v^2}{2c}-\frac{2hiv^4}{2c}-\frac{i^2v^6}{2c}\ \&c.$$

$$-\frac{2hlv^6}{2c}\ \&c.$$

$$-\frac{h^4v^4}{8c^3}-\frac{4h^3iv^6}{8c^3}\ \&c.$$

$$-\frac{h^6v^6}{16c^5}\ \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv}=bh+3biv^2+5blv^4+7bmv^6\ \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}=bch+3bciv^2+5bclv^4+7bcmv^6$$
$$-\frac{bh^3}{2c}v^2-\frac{2bh^2i}{2c}v^4-\frac{bhi^2}{2c}v^6$$
$$-\frac{2bh^2l}{2c}v^6$$
$$-\frac{bh^5}{8c^3}v^4-\frac{4bh^4i}{8c^3}v^6$$
$$-\frac{3bh^2i}{2c}v^4-\frac{bh^7}{16c^5}v^6$$
$$-\frac{6bhi^2}{2c}v^6$$
$$-\frac{5bh^2l}{2c}v^6$$
$$-\frac{3bh^4i}{8c^3}v^6$$

Quodſi pro b ſubſtituatur a, prodibit valor ipſius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}$.

Quamobrem, ſi hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$ ſubſtituantur, prodibit

$\frac{acdy}{dv}$

$$\begin{aligned}
\frac{acdy}{dv} &= ach + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \text{ \&c.}\\
\frac{bdy}{dv}\surd(c^2-y^2) &= bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \text{ \&c.}\\
&\quad - \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{5bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6\\
&\quad - \frac{7bh^2l}{2c}v^6\\
&\quad - \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3}v^6\\
&\quad - \frac{bh^7}{16c^5}v^6\\
&\quad - \frac{6bhi^2}{2c}v^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{ady}{dv}\surd(c^2-y^2) &= -ach - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \text{ \&c.}\\
&\quad + \frac{ah^3}{2c}v^2 + \frac{5ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ahi^2}{2c}v^6\\
&\quad + \frac{7ah^2l}{2c}v^6\\
&\quad - \frac{ah^5}{8c^3}v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3}v^6\\
&\quad + \frac{ah^7}{16c^5}v^6\\
&\quad + \frac{6ahi^2}{2c}v^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\surd(c^2-y^2) &= -c + \frac{h^2}{2c}v^2 + \frac{2hi}{2c}v^4 + \frac{i^2}{2c}v^6 \text{ \&c.}\\
&\quad + \frac{2hl}{2c}v^6\\
&\quad + \frac{h^4}{8c^3}v^4 + \frac{4h^3i}{8c^3}v^6\\
&\quad + \frac{h^6}{16c^5}v^6 = 0
\end{aligned}$$

Habemus itaque

$$ach + bch - ach - c = 0$$
$$bch - c = 0$$
$$bh - 1 = 0$$
$$bh = 1$$
$$h = 1 : b$$
$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$3bci - \frac{bh^3}{2c} + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$
$$6bc^2i - bh^3 + ah^3 + h^2 = 0$$
$$6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2$$
$$= \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2}$$
$$= -\frac{a}{b^3}$$
$$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$$

$$5acl + 5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - 5acl + \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

hoc eſt, $5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} + \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$

$$40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i + ah^5 + 8c^2hi + h^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - ah^5 - 8c^2hi - h^4$$

$h^2 = \frac{1}{b^2}$ $\quad bh^5 = \frac{1}{b^4}$

$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$ $\quad -ah^5 = -\frac{a}{b^5}$

$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2}$ $\quad hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$

$20bc^2h^2i = -\frac{10a}{3b^5}$ $\quad -8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$

$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$

Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4} = \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = -\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, adeoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^7$, &c.

PROBLEMA LXXIII.

194. *Quadrare ſectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE. Tab. IV. Fig. 53.

Calculus prorſus idem, qui ſupra pro Ellipſi in caſu ſimili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$ $AE = x$ $CD = 1$ erit $Ee = dx$ $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$ &, ob △△ AEC & EeN ſimilitudinem, $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$; ob ſimilitudinem vero △△CPM & CAE, ut in Ellipſi, $PC = ay : x$, atque, ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : PC^2 - AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469 *part.* I) $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc ut ſupra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 - x^2)}$, & ob $CE : EN = CM : OM$, porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 - x^2)}$, tandemque elementum MOC ſectoris $CMA = \frac{\frac{1}{2}adx}{1 - x^2}$: quod idem prorſus eſt, quod pro Ellipſi & Circulo reperimus, (§. 124, 192) niſi quod illic ſit $+x^2$, hic $-x^2$. Unde prodit, ut ſupra, ſector CMA, $\frac{1}{2}a(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c. in infin.).

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo ſeries ſectoribus circuli, ellipſis, atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inſervit, niſi quod pro hyperbola ſigna omnia ſint poſitiva.

CAPUT

CAPUT IV.

De uſu Calculi integralis in cubandis Solidis & dimetiendis ſuperficiebus eorundem.

DEFINITIO VIII.

196. *Solidum cubare* idem eſt ac ſpatium ſolido comprehenſum dimetiri.

PROBLEMA LXXIV.

Tab.II. Fig.19. 197. *Cubare ſolidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMR*p* haud differet a trapeziolo PM*mp* (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ deſcribit parallelogrammulum PMR*p* (§. 465 *Geom.*) eſt elementum ſolidi per illam rotationem producti: cujus adeo ſumma dat integrum ſolidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis conſtare concipitur.

Sit jam $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $= r:p$, erit peripheria circuli radio PM deſcripti $= py:r$; conſequenter area $py^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in P*p*, ſive dx, dat ſoliditatem cylindruli ſeu elementi ſolidi $= py^2dx : 2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodſi jam ex æquatione ad curvam ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius y^2; habebitur, ſi elementum integrari poſſit, ſoliditas ſegmenti, cujus altitudo AP, radius baſis PM, hoc eſt revolutione ipſius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA LXXV.

198. *Cubare Conum.* Tab.I. Fig.17.

Conus deſcribitur, ſi triangulum ADC circa axem DC rotatur (§. 467 *Geom.*). Sit $DC = a$, $AC = r$, $PM = y$, $DP = x$; erit (§. 268 *Geom.*).

$$DP : PM = DC : CA$$
$$x : y = a : r$$

$$\text{Hinc } rx : a = y$$
$$\& \ r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2\,dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2dx : 2a^2 \quad (\S.\ 197).$$

$$\int py^2\,dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Quodſi pro x ſubſtituatur a; habebitur ſoliditas totius Coni, $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$. Baſis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda eſt in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex Elementis Geometriæ conſtat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVI.

199. *Cubare Sphæram.*

Sphæra cum deſcribatur per rotationem ſemicirculi circa diametrum ejus (§. 470 *Geom.*); erit, ſi diameter ſit $2r$,

$$yy = 2rx - x^2 \quad (\S.\ 377\ part.\ 1).$$

$$\text{Unde } py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem ſegmenti ſphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

 Quod-

Quodſi ergo pro x ſubſtituatur diameter $2r$; prodibit ſoliditas ſphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp. \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum eſt per tertiam radii, aut ſextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique ſi diameter $2r$ ſit 1; erit ſoliditas ſphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM I.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus baſis eſt rectangulum ex diametro ſphæræ $2r$ in peripheriam eadem deſcriptam; altitudo ſemidiameter ſphæræ (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

201. Cylindri ſphæræ circumſcripti ſoliditas eſt pr^2 (§. 541 *Geom.*). Eſt itaque ad ſphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc eſt, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, ſeu ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXVII.

202. *Cubare Conoides parabolicum, ex rotatione parabolæ cujuſcunque generis circa axem ſuum genitum.*

Sit parameter = 1, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$y = x^{1:m}$$
$$y^2 = x^{2:m}$$
$$py^2dx : 2r = px^{2:m}dx : 2r$$
$$\int py^2dx : 2r = mpx^{2:m+1} : (4 + 2m)r$$
$$= mpy^2x : (4 + 2m)r$$

Sit altitudo totius conoidis = a, diameter baſeos $2r$: erit a pro x, & r pro y ſubſtituto, ſoliditas totius conoidis

$$mpr^2a : (4 + 2m)r = \frac{m}{4+2m}apr$$
$$= \frac{1}{2}pr.\frac{m}{2+m}a.$$

Ex. gr. Si parabola genitrix fuerit *Apolloniana*, erit $m = 2$, adeoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \frac{1}{2}$. Baſis ergo ducenda eſt in dimidiam altitudinem: conſequenter conoides cylindri ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis ſubduplum (§. 541 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVIII.

203. *Cubare ſphæroides ellipticum ex rotatione Ellipſis* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Ellipſin *Apollonianam* (§. 420 *part.* 1).

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$
$$\text{erit } py^2dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$$
$$\int py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodſi pro abſciſſa x ſubſtituatur axis a, prodibit ſoliditas integri ſphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM I.

204. Quodſi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 *part.* 1). Unde ſoliditas ſphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$; hoc eſt, ſphæroides ellipticum æquatur cono, cujus altitudo axi majori a æqualis, baſis vero dupla circuli circa axem minorem deſcripti (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

205. Quoniam cylindri circumſcripti altitudo = a, diameter = $2r$, adeoque ſoliditas = $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); erit ſphæroides ellipticum ad cylindrum circumſcriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc eſt, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, ſeu ut 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

COROLLARIUM III.

206. Si diameter ſphæræ = a, erit peripheria circuli maximi (poſita ratione radii ad peripheriam = $r:p$) = $ap:2r$; conſequenter ſphæra = $a^3p:12r$. Eſt adeo ſphæroides ellipticum ad ſphæram axe majore a deſcriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc eſt, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$)

$\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, ſeu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM IV.

207. Si diameter ſphæræ $= 2r$, erit ſoliditas $= \frac{2}{3} pr^2$ (§. 199). Eſt itaque ſphæroides ellipticum ad ſphæram axe minore $2r$ deſcriptam, ut $\frac{1}{3} par$ ad $\frac{2}{3} pr^2$, hoc eſt, ut a ad $2r$ (§. 124 *part.* 1.), ſeu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA LXXIX.

208. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Hyperbolam ſcalenam (§. 459 *part.* 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $py^2 dx : 2r = pbxdx : 2r + pbx^2 dx : 2ar$

& $\int py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$.

Et quia ad Hyperbolam æquilateram (§. 507 *part.* 1.)

$$y^2 = ax + x^2$$

erit $py^2 dx : 2r = (apxdx + px^2 dx) : 2r$

& $\int py^2 dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo conoidis fuerit axi tranſverſo æqualis, hoc eſt, ſi $x = a$; erit ſoliditas conoidis in caſu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA LXXX.

Tab. II. Fig. 22. 210. *Cubare ſolidum ex rotatione Ciſſoidis circa axem* AB *genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : 2r(1 - x)$$

hoc eſt, quia $2r = AB = 1$,

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : (1 - x).$$

Eſt vero $x^3 : (1 - x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $py^2 dx : 2r = px^3 dx + px^4 dx + px^5 dx + px^6 dx + px^7 dx + px^8 dx$ &c. in infinitum. Tab. II. Fig. 22.

Et hinc $\int py^2 dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$, &c. definit ſolidum portione APM deſcriptum. Quodſi pro x ſubſtituatur AB $= 1$; prodit ſolidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. ſeu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.).

PROBLEMA LXXXI.

211. *Cubare ſolidum ex rotatione Logiſticæ circa aſymptotum* AH *genitum.* Tab. I. Fig. 8.

In Logiſtica, cujus ſubtangens $= a$, eſt (§. 54).

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2 dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quodſi pro y ſubſtituatur AB $= r$, erit integrum ſolidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4} apr$.

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius baſis $= r$, eſt $\frac{1}{2} apr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad ſolidum logiſticum ut $\frac{1}{2} apr$ ad $\frac{1}{4} apr$, hoc eſt, ut 2 ad 1 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus expoſita expreſſionibus ſolidorum, ea inter ſe facile comparentur, unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA LXXXII.

214. *Cubare ſolidum ex rotatione Parabolæ circa ſemiordinatam* QN *genitum.* Tab. II. Fig. 25.

Ex reſolutione Problematis 74 (§. 197) manifeſtum eſt, elementum ſolidi eſſe circulum radio MR deſcriptum & in differentiale Rr ipſius NR ductum.

 Sit

Tab.II. Fig.25. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AQ = r$, $AP = x$, $QN = b$, $PM = y$, erit $Rr = dy$, $MR = PQ = AQ - AP = r - x$, peripheria radio MR deſcripta $= p - px : r$; conſequenter area circuli $\frac{1}{2}pr - px + px^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum ſolidi $\frac{1}{2}prdy - pxdy + px^2 dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2 = x$ (§. 388 *part.* 1) & $y^4 = x^2$; quibus valoribus in expreſſione elementi generali ſubſtitutis, erit id $\frac{1}{2}prdy - py^2 dy + py^4 dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit ſolidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodſi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem ſolido $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r = p(\frac{1}{2}ry - \frac{1}{3}xy + x^2y : 10r)$.

Denique ſi pro y ſubſtituatur b, pro x vero r; prodibit ſolidum integrum $p(\frac{1}{2}br - \frac{1}{3}br + \frac{1}{10}br) = (30 - 20 + 6)$ $pbr : 60 = \frac{8}{30}pbr = \frac{1}{2}pr.\frac{8}{15}b$, hoc eſt, baſis ſeu circulus radio AQ deſcriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis eſt $\frac{1}{2}pbr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad ſolidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2}pbr$ ad $\frac{1}{2}pbr.\frac{8}{15}$, hoc eſt, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, ſeu ut 15 ad 8 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXXIII.

Tab.II. Fig.26. 216. *Cubare ſolidum ex rotatione ſpatii interminati hyperbolici juxta aſymptotum* CD *tanquam axem genitum.*

Sit $AB = a$, $AC = b$, $CP = x$, $PM = y$; erit $Pp = dx$, & poſita peripheria radio AC deſcripta $= p$, peripheria radio PC deſcripta $px : b$, quæ ducta in PM $= y$, dat ſuperficiem cylindri parallelogrammo CPMR deſcripti $= pxy : b$ (§. 541 *Geom.*). Hæc vero ſi ulterius ducatur in $Pp = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo Pp QM deſcriptus, ſeu elementum ſolidi $= pxydx : b$. Tab.II. Fig.26.

Eſt vero ex natura hyperbolæ intra aſymptotos

$$xy = ab \text{ (§. 502 } part. \text{ 1)}.$$

Quare $pxydx : b = pabdx : b = padx$

$$\int pxydx : b = pax.$$

Quodſi pro x ſubſtituatur b; prodibit ſolidum integrum pab.

COROLLARIUM.

217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti eſt $\frac{1}{2}pba$ (§. 541 *Geom.*), adeoque ad ſolidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2}pba$ ad pba, hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ ad 1, ſeu ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

218. *Poſſunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quaſcunque; Sed cum nihil in his difficultatis ſit, plura non addimus.*

PROBLEMA LXXXIV.

219. *Metiri ſuperficiem corporis rotatione figuræ* ANQ *circa axem* AQ *geniti.* Tab.II. Fig.19.

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM deſcripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum ſuperficiei ſolidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$.

Quodſi jam ex natura figuræ ANQ valor ipſius dx^2 ſubſtituatur, & elementum integrabile fiat; ſuperficies deſiderata per ſummationem habetur.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

Tab. II. Fig. 17. 220. *Invenire ſuperficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expreſſione generali ante (§. 198) inventa ſubſtituendus eſt valor ipſius dx^2. Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $DP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$
$$x = ay : r$$
$$dx = ady : r$$
$$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$$

$$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py\sqrt{(a^2dy^2 + r^2dy^2)} : r^2$$
$$= pydy\sqrt{(a^2 + r^2)} : r^2$$

$$\int py\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = py^2\sqrt{(a^2+r^2)} : 2r^2$$

Quodſi pro y ponatur r, prodibit ſuperficies coni integri $= \frac{1}{2}p\sqrt{(a^2+r^2)} = \frac{1}{2}p.\ AD$; eſt nempe æqualis facto ex ſemiperipheria baſis coni in latus AD, prorſus ut in Elementis Geometriæ demonſtratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXXVI.

Tab. I. Fig. 3. 221. *Invenire ſuperficiem Sphæræ.*

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\sqrt{(x - xx)}$, quod ductum in peripheriam radio PM deſcriptam $= 2p\sqrt{(x - xx)}$ producit elementum ſuperficiei ſphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur ſuperficiem ſegmenti ſphærici, cujus altitudo x.

Quodſi pro x ſubſtituatur diameter 1; erit ſuperficies ſphæræ integræ $= p.\ 1$; ſeu, ſi $1 = a$, pa.

COROLLARIUM.

222. Eſt ergo quodlibet ſegmentum ſuperficiei ſphæricæ ad ſuperficiem ſphæræ integram ut px ad $p.1$, ſeu ut x ad 1 (§. 124 *part.* 1), hoc eſt ut altitudo ſegmenti ad diametrum ſphæræ.

PROBLEMA LXXXVII.

223. *Invenire ſuperficiem Conoidis parabolici.*

Ad parabolam eſt $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py\sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2)} : ar$$
$$= pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2 + a^2)} = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$
$$ydy = \frac{1}{4}vdv$$
$$pydy\sqrt{(4y^2+a^2)} : ar = pv^2dv : 4ar$$

$\int pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^3 : 12ar = p(4y^2+a^2)\sqrt{(4y^2+a^2)} : 12ar$. Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2\sqrt{a^2} : 12ar = pa^2 : 12r$. Unde ſuperficies ſegmenti conoidis parabolici $= p(4y^2+a^2)\sqrt{(4y^2+a^2)} : 12ar - pa^2 : 12r$

CAPUT

CAPUT V.

De uſu Calculi integralis in Methodo tangentium inverſa.

DEFINITIO IX.

224. *Methodus Tangentium inverſa* eſt, qua ex data tangente, aut linea quacunque alia cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut conſtructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expreſſiones differentiales tangentis, ſubtangentis, ſubnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ ſuperius traditæ fuerint (§. 20, 34, 35, 44, 98, 144); ſi valor datus expreſſioni differentiali æquetur, & æquatio differentialis vel ſummetur, vel, ſi id fieri nequeat, conſtruatur; curva deſiderata innoteſcit.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire lineam curvam, cujus ſubtangens* $= 2yy : a$.

Quoniam ſubtangens lineæ algebraicæ $= ydx : dy$ (§. 20); erit

$$ydx : dy = 2yy : a$$
$$aydx = 2y^2dy$$
$$adx = 2ydy$$
$$ax = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita parabola (§. 388 *part.* I), cujus conſtructio ex ſuperioribus manifeſta (§. 393 *part.* I).

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Curvam invenire, cujus ſubnormalis eſt conſtans, ex. gr.* $= a$.

Quoniam ſubnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) $= ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax$$

Eſt adeo curva quæſita parabola, cujus parameter $= 2a$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire curvam, cujus ſubnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 35); erit

$$ydy = rdx - xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$
$$y^2 = 2rx - xx$$

Eſt adeo curva quæſita circulus, cujus radius r ſeu diameter $2r$ (§. 377 *part.* I).

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt tertia proportionalis ad* $r - x$ *&* y.

Quoniam (§. 20)

$$r - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* I)

$$rdx - xdx = ydy$$
$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx - xx = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita denuo circulus, cujus diameter $2r$.

PROBLEMA XCII.

230. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt tertia proportionalis ad* $r + x$ *&* y.

Quoniam (§. 20)

$$r + x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)

$$rdx + xdx = ydy$$

$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx + x^2 = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita Hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$ (§. 507 *part.* 1).

PROBLEMA XCIII.

231. *Invenire curvam in qua ſubtangens multiplo abſciſſæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari poſſit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95).

erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$y^m : x = a^{m-1}$$

$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo propoſito infinita Parabolarum genera.

PROBLEMA XCIV.

232. *Invenire lineam, in qua ſubtangens ſemiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$ydx = ydy$$

$$dx = dy$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæſitam eſſe rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, ſeu hypothenuſam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodſi vero x ſumatur pro arcu circuli; erit linea quæſita Cyclois (§. 572 *part.* 1, & §. 52 *part.* 2).

PROBLEMA XCV.

233. *Invenire curvam, cujus ſubnormalis $= \sqrt{ax}$.*

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit $ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata ſemiordinatarum hujus curvæ exprimere ſpatia Parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur ſemiordinatæ ipſæ mediæ proportionales inter abſciſſas & $\tfrac{2}{3}$ ſemiordinatarum Parabolæ circa communem axem deſcriptæ (§. *cit.*).

SCHOLION.

234. *Curva hæc dici poteſt Quadratrix Parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem deſcriptam, cujus ſemiordinatis datis datur quadratura partium reſpondentium in altera curva. Ex. gr. ſi fuerit ut in noſtro caſu* APMA = PN², *vel* APMA = AP. PN, *vel* APMA = PN. *a*, *&c. erit* AND Quadratrix *ipſius* AMC. Tab.II. *Fig.*27.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire curvam, cujus normalis conſtans eſt.*

Sit conſtans linea $= a$, abſciſſa $= x$, ſemiordinata $= y$; erit (§. 44)

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a$$

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx$$

$$y^2dy^2 + y^2dx^2 = a^2dx^2$$

$$y^2dy^2 = a^2dx^2 - y^2dx^2$$

$$ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

$$-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -dx$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x \quad (\S. 95).$$

Eſt

Eſt itaque curva quæſita circulus.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per $a\sqrt{ax}$.*

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

$$\text{erit } \tfrac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2}dx = ydx$$
$$\tfrac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2} = y$$
$$\tfrac{1}{4}a^3x^{-1} = \tfrac{1}{4}a^3 : x = y^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^3 = xy^2$$

Eſt adeo curva Hyperbola ſecundi generis intra aſymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ ſit ſemiordinata Parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens eſt Parabolam *Apollonianam* eſſe quadratricem Hyperbolæ intra aſymptotos, ad quam $\tfrac{1}{4}a^3 = xy^2$.

PROBLEMA XCVIII.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita $= x^3 : a$.*

Quoniam $x^3 : a = \int ydx$

$$\text{erit } 3x^2dx : a = ydx$$
$$x^2 = \tfrac{1}{3}ay$$

Tab.II. *Fig.*28. Eſt adeo curva quæſita Parabola exterior, cujus parameter $\tfrac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$, erit $\tfrac{1}{3}ay = x^2$ (§. 388 *part.* 1).

PROBLEMA XCIX.

239. *Invenire curvam, cujus area $= a\sqrt{(aa+xx)}$.*

$$\text{Quoniam } axdx : \sqrt{(aa+xx)} = ydx$$
$$ax : \sqrt{(aa+xx)} = y$$
$$a^2x^2 : (aa+xx) = y^2$$

hoc eſt, $y^2 : x^2 = a^2 : aa+xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix eſt Hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro exiſtentibus a (§. 507 *part.* 1, & §. 234 *part.* 2).

PROBLEMA C.

240. *Invenire curvam, cujus area $= x\sqrt{(aa+xx)}$.*

$$\text{Quon. } \frac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} + dx\sqrt{(aa+xx)} = ydx$$
$$\text{erit } \frac{2x^2+aa}{\sqrt{(aa+xx)}} = y$$
$$(2x^2+aa)^2 = y^2\,(aa+xx)$$
$$y^2 : aa+2xx = aa+2xx : aa+xx$$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix eſt Hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex Problematibus his apparet, quod data quadratrice ſemper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri poſſunt curvæ innumeræ quadrabiles, conſtruique curvarum quadrabilium, ſeu, quod perinde eſt, formularum ſummabilium canones.*

PROBLEMA CI.

242. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt linea conſtans a.*

Quoniam $ydx : dy = a$ (§. 20)

$$\text{erit } dx = ay^{-1}dy$$
$$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$$

Quodſi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum Hyperbolæ intra aſymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua aſymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 *part.* 1). Quodſi ergo y ſumatur pro abſciſſa, erit reſpondens ſemiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis ſpatio hyperbolico aſymptotico per conſtantem a, quæ latus eſt potentiæ in Hyperbola æquilatera (§. 477 *part.* 1), diviſo. Unde conſtructio

curvæ

curvæ quæſitæ a quadratura Hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1}dy$, eſt logarithmica ad aſymptotum relata (§.54) atque x in aſymptoto ſumta logarithmus ſemiordinatæ ipſi reſpondentis (§.553 *part.* 1); erit quoque $\int ay^{-1}dy$ logarithmus ejuſdem ſemiordinatæ y, conſequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy:y = ly$; ($ly$ denotat logarithmum ipſius y in logiſtica ſumtum, cujus ſubtangens $= a$). Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, ſit inveniendum. Quoniam enim $ady:y = dly$ erit etiam $d(ly)\,n = n(ly)^{n-1}\,ady:y$ ubi a notat ſubtangentem logiſticæ.

COROLLARIUM II.

244. Et quia $a\int\frac{dy}{y}$ eſt ſpatium hyperbolicum per latus potentiæ Hyperbolæ diviſum; ſpatia hyperbolica per idem latus diviſa exprimunt logarithmos, quorum numeri ſunt ut ſemiordinatæ ad aſymtotum relatæ.

PROBLEMA CII.

245. *Invenire curvam, in qua eſt ut a ad y ita $\surd(aa - yy)$ ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth. &* §. 20

$$a : y = \surd(aa - yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\surd(aa - yy) : dx$

erit $dy\surd(aa - yy) : a = dx$

$\int dy\surd(aa - yy) : a = x$

Tab.I. Fig.3. Quoniam $\int dy\surd(aa - yy)$ eſt portio circuli CDPM, cujus radius AC $= a$, abſciſſa PC $= y$ (§.124): conſtructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc eſt, circulus eſt quadratrix curvæ quæſitæ (§.234). Retentis nempe abſciſſis PC, ſemiordinatæ x erunt æquales ſpatio PMDC per conſtantem a diviſo.

PROBLEMA CIII.

246. *Invenire curvam, in qua eſt ut a ad y ita $\surd(aa + yy)$ ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth. &* §. 20

$$a : y = \surd(aa + yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\surd(aa + yy) : dx$

erit $dy\surd(aa + yy) : a = dx$

$\int dy\surd(aa + yy) : a = x$

Quoniam $\int dy\surd(aa + yy) : a$ eſt arcus Parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146); ſi ſemiordinata Parabolæ PM ſumatur pro abſciſſa curvæ quæſitæ, erit ſemiordinata ejuſdem arcui parabolico AM æqualis. Tab.II. Fig.19.

SCHOLION.

247. *Apparet adeo, interdum conſtructionem pendere a rectificatione curvarum. Præſtat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere; quia in priori caſu praxis eſt facilior, ubi arcum filo metiri datur. In poſteriori autem ſpatiorum quadratura ope ſerierum infinitarum definienda eſt in numeris prope veris, & inde ſimiliter in iſtiuſmodi numeris ſemiordinatæ curvarum quæſitarum ſunt computandæ.*

PROBLEMA CIV.

248. *Invenire curvam, in qua eſt ſubtangens ad y ut quantitas conſtans r ad $\surd(r^2 - y^2)$.*

Quoniam *per hypoth. &* §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \surd(r^2 - y^2)$$

hoc eſt, $dx : dy = r : \surd(r^2 - y^2)$

erit $dx = rdy : \surd(r^2 - y^2)$

$x = \int(rdy : \surd(r^2 - y^2))$.

Quia $\int(rdy : \surd(r^2 - y^2))$ eſt arcus circuli AM, cujus radius AC $= r$, PM $= y$ (§.153); conſtructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Tab.I. Fig.3.

 Nempe

Tab.I. Nempe ſi ſemiordinatæ in circulo PM *Fig.3.* ſumantur pro abſciſſis curvæ quæſitæ; erunt ejuſdem ſemiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA CV.

249. *Invenire curvam, in qua ſubtangens eſt ad y ut r^2 ad r^2+y^2.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2+y^2$$

hoc eſt, $dx : dy = r^2 : r^2+y^2$

erit $dx = r^2\, dy : (r^2+y^2)$

Quoniam $\int(r^2\, dy : (r^2+y^2))$ aut, ſi $r=1$, $\int(dy:(1+y^2))$ eſt elementum Tab.II. arcus BM, cujus tangens BK$=y$ (§. *Fig.20.* 158); evidens eſt, conſtructionem curvæ quæſitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abſciſſis curvæ quæſitæ; ſemiordinatæ ejuſdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli exiſtente r.

PROBLEMA CVI.

250. *Invenire curvam, in qua tangens eſt conſtans.*

Sit conſtans illa$=a$, abſciſſa$=x$, ſemiordinata y: erit (§. 34)

$$y\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2-y^2dy^2}{y^2}$$

$$x = \int\left(\frac{dy}{y}\sqrt{(a^2-y^2)}\right).$$

Tab.I. Curva, in qua tangens conſtans eſt, *Fig.8.* deſcribitur puncto M, ſi alterum extremum rectæ TM in recta AR incedit, diciturque *Tractoria.* Ad ejus adeo Tab.I. deſcriptionem non opus eſt, niſi ba- *Fig.8.* cillo, in cujus utroque extremo cuſpis infixa, ita ut cuſpis in M prematur in planum elatere, vel pondere. Eſt itaque æquatio inventa ad Tractoriam.

Eadem æquatio ſic eruitur. Quoniam TM$=a$, PM$=y$; erit PT$=\sqrt{(a^2-y^2)}$. Sed PT$=ydx:dy$ (§.20. Ergo $ydx:dy = \sqrt{(a^2-y^2)}$; conſequenter $dx=dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$; aut, quia ſemiordinatæ continuo decreſcentis differentiale negativum, $dx=-dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$.

COROLLARIUM I.

251. Si fuerit $x=0$, erit etiam $dx=0$, adeoque

$$-dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y=0$$

$$\sqrt{(a^2-y^2)}=0$$

$$a^2-y^2=0$$

$$a=y$$

Eſt igitur in A, ubi origo indeterminatæ x, AB$=a$; id quod etiam ex deſcriptione liquet.

COROLLARIUM II.

252. Quoniam $dx=dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$, erit $ydx=dy\sqrt{(a^2-y^2)}$; adeoque ſpatium indeterminatum RPMI$=\int dy\sqrt{(a^2-y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a quadratura circuli (§. 124), cujus radius eſt a, abſciſſæ a centro computatæ ſunt y.

COROLLARIUM III.

253. Similiter quia $dx^2=\frac{a^2dy^2-y^2dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2+dy^2=\frac{a^2dy^2-y^2dy^2}{y^2}+dy^2$$

$$=a^2dy^2:y^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{ady}{y}$$

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int\frac{ady}{y}$$

Quare

Quare cum $\int\frac{ady}{y}$ ſit logarithmus ipſius y; arcus tractoriæ ſunt ut logarithmi, ſemiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int(ady:y)$ eſt abſciſſa logarithmicæ, cujus ſubtangens $= a$; arcus tractoriæ rectificantur per abſciſſas logarithmicæ.

COROLLARIUM IV.

254. Si BO $= v$, erit OA $=$ PM $= a - v$, adeoque $a - v = y$, & $- dv = dy$; conſequenter $dx = - dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y = dv\sqrt{(2av - v^2)} : (a - v)$. Habemus adeo æquationem, quæ Tractoriam definit reſpectu axis BA.

CAPUT VI.

De uſu Calculi integralis in Logarithmorum doctrina.

PROBLEMA CVII.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Tab. III. Fig. 30. Sit Logarithmicæ MBN ordinata AB $= 1$, eademque ſubtangenti, quæ conſtans eſt (§. 54) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, AQ logarithmus numeri unitate minoris.

Quodſi jam differentia inter AB & PM ſit y; erit PM $= 1 + y$; conſequenter AP, ſeu logarithmus unitate majoris numeri, $\int(dy:(1+y))$ (§. 243). Eſt vero $1:(1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $dy:(1+y) = dy - ydy + y^2 dy - y^3 dy + y^4 dy$ &c. in infinitum; conſequenter $\int(dy:(1+y))$, ſeu logarithmus numeri $1+y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodſi differentia inter AB & QN ſit y, erit QN $= 1 - y$; conſequenter AQ, ſeu logarithmus numeri unitate minoris, $= \int(-dy:(1-y))$. Eſt vero $-1:(1-y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $- dy:(1-y) = -dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy$, &c. in infinitum; conſequenter $\int(-dy:(1-y))$, ſeu logarithmus numeri unitate minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

256. Si latus potentiæ Hyperbolæ AB, vel BC, fuerit 1, BP $= y$; erit AP $= 1 + y$, & ſpatium hyperbolicum aſymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Tab. II. Fig. 29. Et ubi BQ $= y$, erit AQ $= 1 - y$, adeoque (ſi QN $= v$) ob $1 = v - vy$ (§. 490 *part.* 1), elementum ſpatii hyperbolici aſymptotici $- 1ydy : (1 - y)$; conſequenter ſpatium $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Poſſunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum ſi latus potentiæ AB $= 1$, abſciſſa AP eſt numerus unitate major, ſpatium aſymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; ſimiliter abſciſſa AQ eſt numerus unitate minor & ſpatium hyperbolicum aſymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM II.

257. Quodſi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM III.

258. Quoniam logarithmus ipſius $1:(1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem eſt (§. 351 *Arithm.*), fractio vero $1:(1 + x)$

numerus unitate minor; pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula poſterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum ſatisfacit. Nempe cum ſit ex hypotheſi

$$1-y=1:(1+x)$$

erit $1-1:(1+x)=y$

hoc eſt, $\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}=y$

adeoque in formula $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. pro y ſubſtitui debet $x:(1+x)$, ſi numeri unitate majoris logarithmus deſideretur.

SCHOLION.

259. *Formula poſterior ſi in caſu quoque priore, ubi numerus cujus logarithmus quæritur unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera abſolvitur; quia ſeries citius convergit, quam ſi priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum* Neperianis, *adeoque diverſos eſſe a* Briggianis; *quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici ſint ad* Briggianos *ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii* Briggianum, *ſitque logarithmus binarii hyperbolicus* 2. 302585092994 &c. Briggianus 1. 000000000000; *hyperbolici ad* Briggianos, *quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA CVIII.

260. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y=l+bl^2+(2b^2-c)l^3+(5bc-5b^3-d)l^4+(14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e)l^5$ &c. (§. 366 *part.* 1) ob $a=1$, & $b=-\frac{1}{2}$, $c=+\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, $e=+\frac{1}{5}$ &c. erit

$$2b^2-c=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$5bc-5b^3-d=-\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{-40+30+12}{48}=\frac{2}{48}=+\frac{1}{24}$$

$$14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e$$

$$=\frac{14}{16}+\frac{6}{8}-\frac{21}{12}+\frac{3}{9}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{6}{8}-\frac{14}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{40-15-24}{120}=+\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y=l+\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{6}l^3+\frac{1}{24}l^4+\frac{1}{120}l^5 \text{ &c.}$$

in infinit. $=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c. in infinit.

Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y=l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l eſt logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y=1+l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y=l-\frac{1}{1.2}l^2+\frac{1}{1.2.3}l^3-\frac{1}{1.2.3.4}l^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$, &c. in infinitum, conſequenter $1-y=1-\frac{l}{1}+\frac{1}{1.2}l^2-\frac{1}{1.2.3}l^3+\frac{1}{1.2.3.4}l^4-\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, &c. erit $y=l-\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl-\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum; conſequenter $1-y=1-l+\frac{1}{2}Al-\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl-\frac{1}{5}Dl$, &c. in infinitum.

PRO-

Problema CIX.

261. *Dato ſinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $= 1$, coſinus $= x$, erit ſinus $= \sqrt{(1-xx)}$ (§. 377 *part.* 1) $= \sqrt{((1+x)(1-x))}$. Sed $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$ & $l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$ Ergo $l(1-xx) = -\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$ (§. 337 *Arith.*) & $l\sqrt{(1-xx)} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Ar.*).

Problema CX.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, ſeu ſinus totus, hoc eſt, tangens 45° (§. 32 *Trigon.*) $= 1$; tangens arcus 45° majoris $= 1 + x$; tangens arcus 45° minoris $= 1 - x$; erit logarithmus tangentis in caſu poſteriore $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in caſu poſteriore $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255.)

SECTIO TERTIA.

DE CALCULO EXPONENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi exponentialis.

Definitio X.

263. *Calculus exponentialis* eſt methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium ſummandi.

Definitio XI.

264. *Quantitas exponentialis* eſt dignitas, cujus exponens variabilis, ex. gr. x^x, a^x.

Problema CXI.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

Resolutio.

Non alia re opus eſt, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio ſuccedit per §. 243.

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y = z$$

erit $ylx = lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$lxdy + ydx : x = dz : z \quad (\text{§}. 243)$$

$$zlxdy + zydx : x = dz$$

hoc eſt, $x^y\, lxdy + yx^{y-1}\, dx = dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda ſecundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{xy} = z$$

erit $x^y lv = lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}\, dx)\, lv + x^y\, dv : v = dz : z \; (\text{§}. 243)$$

$$z(x^y\, lxdy + yx^{y-1} dx)\, lv + zx^y\, dv : v = dz$$

hoc eſt,

$$v^{x^y}(x^y\, lxdy + yx^{y-1}\, dx)\, lv + v^{x^y} v^{-1}\, x^y\, dv = dz$$

ſeu

$$v^{x^y} x^y\, lxlvdy + v^{x^y} yx^{y-1} lvdx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz$$

Eadem

Eadem ratione inveniri poteſt differentiale quantitatis exponentialis cujuſcunque alterius.

PROBLEMA CXII.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

erit $lx = l(1+y)$

& $dx = dy$.

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)\,dy.$$

Eſt vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 255). Ergo $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum) = [multiplicatione actu facta]

$$ydy - \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{1}{3}y^3dy - \tfrac{1}{4}y^4dy + \tfrac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.}$$
$$+ y^2dy - \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy - \tfrac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.}$$

h.e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua ſerie $y = x - 1$.

PROBLEMA CXIII.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, & $dx = dy$, adeoque $x^x dx = (1+y)^{1+y}dy$.

Fiat $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

erit $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

hoc eſt, $(1+y)(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 255); ſeu per calculum præcedentem, $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 266).

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

erit $v^2 = + y^2 + 2yk^3 + k^2y^4 + 2kmy^5$
$\qquad\qquad + 2my^4 + 2ny^5$

$v^3 = + y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5$
$\qquad\qquad + 3my^5$

$v^4 = + y^4 + 4ky^5$

$v^5 = + y^5$

(§. 95 *part.* 1). Unde

$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5$ &c.

$-\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}y^2 - ky^3 - \frac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5$ &c.
$\qquad\qquad - my^4 - ny^5$

$+\frac{1}{3}v^3 = + \frac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5$ &c.
$\qquad\qquad + my^5$

$-\frac{1}{4}v^4 = - \frac{1}{4}y^4 - ky^5$ &c.

$+\frac{1}{5}v^5 = + \frac{1}{5}y^5$ &c.

$- y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{20}y^5 = 0$

Habemus ergo

$1 - 1 = 0 \quad k - \frac{2}{2} = 0 \quad m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$

$1 = 1 \quad k = 1 \quad m = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$n - \tfrac{1}{2}k^2 - m + k - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} = 0$$

$$n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} = 0$$

$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{5}{20} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} - \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{12}$$

Conſequenter

$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. in infinitum.

Quare differentiale ad integrandum propoſitum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

PRO-

PROBLEMA CXIV.

268. *Quantitatem exponentialem, conſequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, conſtruere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ ſunt ad logarithmicas, quæ per abſciſſas Logarithmicæ exhiberi poſſunt.

Ex.gr. Sit conſtruenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$, erit (*§.341 Arithm.*)
Tab. $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN
III. deſcriptam, & in ea ſemiordinatam AB $= 1$.
Fig.30. Sit PM $= x$; erit AP $= lx$. Eſt vero $1 : lx = x : ly$ (*§.299 Arithm.*). Ergo ly reperiri poteſt (§.271 *Geom.*): cui ſi æqualis in axe Logiſticæ ſumatur AH, erit HI $= y$ (§.553 *part.* 1).

Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur ſequentem in modum: Tab. III.

Fiat AC $= x$, & ducatur MC ipſi AP pa- *Fig.30.*
rallela, quæ Logiſticam in M ſecabit; erit MC $=$ AP $= lx$. Fiat CD $=$ AB $= 1$, & DE $=$ AC, ducaturque LE ipſi MC parallela; erit LE $= ly$. Ducatur LH ipſi EA parallela; erit HI $= y$. Quodſi ergo AC ſumatur pro axe curvæ exponentialis, fiatque CG $=$ HI; erit G punctum in curva quæſita.

Porro cum $x = 0$, erit $ly = 0$. Sed 0 eſt logarithmus unitatis. Ergo y eſt unitas, conſequenter $=$ AB. Quare ſi fiat AF $=$ AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB $= 1 = x$, erit $lx = 0$, adeoque ad AB applicata y eſt 1, ſeu ipſi AB æqualis. Quamobrem ſi fiat BK $=$ BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.

De uſu Calculi exponentialis in Curvarum exponentialium ſymptomatis inveſtigandis.

DEFINITIO XII.

269. *Curva exponentialis* eſt, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO XIII.

270. *Æquatio exponentialis* eſt, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA CXV.

271. *Invenire ſubtangentem curvæ, in qua* $a^x = y$.

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§.243)

$dx = dy : yla$

Ergo ſubtangens $ydx : dy$ (*§.* 20) $= ydy : yladу = 1 : la$.

Conſtructio. Sit deſcripta Logiſtica Tab.
quæcunque MBN & in ea AB $= 1$. Fiat III.
AC $= a$, ducaturque CM ipſi AP & MP *Fig.31.*
ipſi AC parallela: erit PM $=$ AC $= a$ & AP $= la$ (§.554 *part.* 1). Fiat porro PQ $=$ AB $= 1$, itemque QT ipſi AB parallela; erit TQ $= 1 : la$ (*§.* 302 *Arithm.* & *§.* 268 *Geom.*).

COROLLARIUM.

272. Quoniam curvæ ſubtangens $1 : la$ conſtans; æquatio propoſita ad Logarithmicam eſt.

SCHOLION.

273. *Nempe ſi ſubtangens Logiſticæ fuerit* $1 : la$; *ea definitur per* $a^x = y$.

Problema CXVI.

Tab. I. Fig. 8. 274. *Quadrare ſpatium Logiſticum interminatum* HPMI.

Sit Logiſticæ ſubtangens $PT = 1 : la$: $PM = y$, $Pp = dx$; erit

$$a^x = y \quad (\S.\ 273).$$
$$x\,la = ly$$
$$ladx = dy : y \quad (\S.\ 243)$$
$$dx = dy : yla$$
$$ydx = ydy : yla = dy : la$$
$$\int ydx = y : la = y\,(1 : la) = PM.\,PT$$

Corollarium I.

275. Spatium Logiſticum interminatum HPMI eſt trianguli ſubtangente PT, tangente TM, & ſemiordinata PM contenti duplum (*§.392 Geom.*).

Corollarium II.

276. Quoniam Spatium HPMI = PM.PT & ISQH = SQ. PT (*§.* 274); erit QPMS = (PM − SQ) PT, hoc eſt, ſpatium inter duas ſemiordinatas interceptum æquale rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

Problema CXVII.

277. *Cubare ſolidum Logiſticum ex rotatione ſpatii interminati* HPMI *circa aſymptotum* PH *geniti.*

Quoniam (*§.* 274)

$dx = dy : yla$ erit (§. 197)

$$py^2dx : 2r = py^2\,dy : 2ryla = pydy : 2rla$$
$$\int py^2dx : 2r = py^2 : 4rla.$$

Corollarium I.

278. Quoniam $py^2 : 2r$ eſt circulus radio $PM = y$ deſcriptus (*§.*197); $py^2 : 4rla$ eſt cylindrus, cujus baſis eadem eſt cum baſi ſolidi logiſtici, altitudo vero $1 : 2la$ ſeu $\frac{1}{2}$PT (§. 541 *Geom.*).

Corollarium II.

279. Eſt ergo ſolidum iſtud logiſticum ad conum, cujus altitudo ſubtangens PT $= 1 : la$, ſemidiameter baſis $PM = y$, ut $py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc eſt, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, ſeu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§.124 *part.* 1). Tab. I. *Fig.* 8.

Problema CXVIII.

280. *Determinare ſubnormalem Logiſticæ.*

Quoniam $ladx = dy : y$ (*§.*274).

erit $dy = yladx$

$$ydy : dx = y^2ladx : dx \quad (\S.\ 35).$$
$$= y^2\,la = y^2 : \frac{1}{la}$$

Eſt adeo ſubnormalis tertia proportionalis ad tangentem $PT = 1 : la$. & ſemiordinatam $PM = y$.

Corollarium.

281. Quodſi ergo Parabola deſcribatur, cujus parameter ſubtangenti Logiſticæ æqualis; ſemiordinatæ Parabolæ eædem ſunt cum ſemiordinatis Logiſticæ, illius autem abſciſſis hujus ſubnormales æquantur.

Problema CXIX.

282. *Determinare ſubtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $xlx = ly$

erit $lxdx + xdx : x = dy : y$

$$ylxdx + ydx = dy$$

Ergo ſubtangens $ydx : dy = ydx : (ylxdx + ydx) = 1 : (lx + 1)$.

Eſt itaque PT tertia proportionalis ad $AB + AP = 1 + lx$ & $AB = 1$ (§.268). Tab. III. Fig. 3.

Problema CXX.

283. *Determinare ſubnormalem curvæ, ad quam* $x^x = y$.

Quia $ylxdx + ydx = dy$ (*§.*282); erit ſubnormalis (§.35) $ydy : dx = (y^2lxdx + y^2dx) : dx = y^2lx + y^2 = y^2\,(lx + 1)$.

Quærenda igitur eſt ad $AB = 1$, & $PM = y$, tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad $AB = 1$, $AB + AP = 1 + lx$,

atque

atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA CXXI.

Tab. III. Fig. 30. 284. *Determinare minimam applicatam* SR *in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63).

$$\text{erit} \quad lx + 1 = 0$$

$$1 = - lx$$

Fiat ergo AT = AB = 1; erit TV = AR = x (*§. 554 part. I*).

Quodſi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ ſubſtituatur valor modo inventus $- 1$; prodibit $x = - ly$. Fiat igitur AQ = VT = $- x$: erit NQ = SR = y (§. *cit part.* I).

PROBLEMA CXXII.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98) erit area curvæ $= \int x^x dx =$ [ſi pro x ponatur $1 + y$] $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§ 267).

PROBLEMA CXXIII.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

$$\text{erit} \quad dy = y\,(1 + lx)\,dx$$

$$dy : y = dx + lxdx$$

$$\int (dy : y) = ly, \int (dx + lxdx) = xlx$$

$$ly = xlx$$

$$y = x^x \ (\text{§. 341 } Arithm.)$$

PROBLEMA CXXIV.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubnormalis* $y^2\,(lx + 1)$.

Quoniam $y^2\,(lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

$$\text{erit} \quad y^2\,(lx + 1)\,dx = ydy$$

$$lxdx + dx = dy : y$$

$$xlx = ly \ (\text{§ 243})$$

$$x^x = y \ (\text{§. 341 } Arithm.).$$

PROBLEMA CXXV.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus ſubnormalis* $y^2\,la$.

Quoniam $y^2\,la = ydy : dx$ (§. 35)

$$\text{erit} \quad y^2\,ladx = ydy$$

$$ladx = dy : y$$

$$xla = ly \ (\text{§. 243})$$

$$a^x = y \ (\text{§. 341 } Arithm.)$$

Eſt ergo Curva quæſita Logarithmica vulgaris, ſeu Logiſtica (§. 273).

PROBLEMA CXXVI.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2\,lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

$$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$$

$$\text{erit} \quad 4x\,x = 4yla$$

$$xlx = yla$$

$$x^x = a^y \ (\text{§. 341 } Arithm.)$$

Curva hæc vi Probl. 114 (§. 268) ita conſtruitur, ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe AB = 1, quæ in infinitum producatur. Fiat AD = a, & AC = x, ducanturque DL & CM ipſi AP, HL & PM ipſi AC parallelæ; erit DL = AH = la, & CM = AP = lx (§. 268). Fiat AF = AH, & ducatur FE ipſi CG parallela, per A vero & E recta AG ipſi CM continuatæ in G occurrens, erit CG = $xlx : la = y$ (§. 268 *Geom.*); adeoque punctum G in curva quæſita, quæ definitur per $x^x = a^y$. Tab. III. Fig. 32.

 Co-

COROLLARIUM I.

Tab. III. *Fig.* 32. 290. Quia $lxdx + dx = lady$ (§. 243)

erit $dx = lady : (lx + 1)$

$ydx : dy = yla : (lx + 1)$ (ſ. 20).

Eſt ergo ſubtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & conſtantem AH.

COROLLARIUM II.

291. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $ydy : dx = y(lx + 1) : la$, adeoque ſubnormalis curvæ hujus exponentialis eſt quarta proportionalis ad conſtantem AH, ad AP + AB & ad CG. Tab III. *Fig.* 3

COROLLARIUM III.

292. Eſt ergo ſubtangens ad ſubnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y(lx + 1) : la$, hoc eſt, ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 *part.* 1) Quare quadratum compoſitæ ex conſtante AB & variabili AP eſt ad quadratum conſtantis AH ut ſubnormalis curvæ exponentialis ad ejus ſubtangentem.

SECTIO QUARTA.

DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi differentio-differentialis.

DEFINITIO XIV.

293. *Calculus differentio-differentialis* eſt methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam ſignum differentialis eſt *d* (ſ. 8): differentiale ipſius dx erit ddx: differentiale ipſius ddx erix $dddx$, & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. *Scribantur* ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. *compendioſius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO XV.

296. *Differentiale primi gradus* eſt infiniteſima quantitatis ordinariæ, ut dx. *Differentiale ſecundi gradus* eſt infiniteſima quantitatis differentialis primi gradus, veluti ddx, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* eſt infiniteſima quantitatis differentialis ſecundi gradus, ut $dddx$, dx^3, $dxdydz$ & ita porro.

PROBLEMA CXXVII.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorſus modo inveſtigari poſſunt, quo ſupra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§. 17, 19): id quod uno alteroque exemplo oſtendere libet.

Ex. gr. I. Sit inveſtigandum differentiale ipſius xdx.

Fiat $xdx = v$

erit $dx = v : x$

$d^2x = (xdv - vdx) : x^2$ (ſ. 19)

$x^2d^2x = xdv - vdx$

$vdx + x^2d^2x = xdv$

hoc

hoc eſt, ob $v = xdx$

$$xdx^2 + xd^2x = xdv$$

$$dx^2 + xd^2x = dv$$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ ſe mutuo multiplicantes differentiari ſolent (§. 12).

II. Sit differentiale ipſius $x : dx$ inveſtigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = vdx$$

$$dx = vd^2x + dxdv, \text{ per caſ. præc.}$$

$$dx - vd^2x = dxdv$$

hoc eſt, ob $v = x : dx$

$$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$$

$$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ ſe mutuo dividentes differentiari ſolent (§. 19).

III. Sit differentiale ipſius dx^2 inveſtigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2, \text{ per caſ. } 2.$$

$$dx^2d^2x = dxdv - vd^2x$$

$$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$$

hoc eſt, ob $v = dx^2$

$$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$$

$$2dxd^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari ſolent (§. 13, ſeqq.).

Corollarium I.

298. Cum differentialia compoſita aut ſe mutuo multiplicent, aut ſe mutuo dividant, aut potentiæ, ſive perfectæ, ſive imperfectæ, differentialium primi gradus exiſtant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

Corollarium II.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non eſt diverſus a calculo differentiali (§. 293).

Problema CXXVIII.

300. *Differentiare differentialia.*

Resolutio.

Differentialia conſiderentur inſtar ordinariarum quantitatum, & ex circumſtantiis caſuum ſpecialium dijudicetur quænam ſint variabiles, quænam conſtantes. Ipſa vero differentiatio abſolvatur per Problemata *Cap.* 1. *Sect.* 1. (vi §. 299).

Ex. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$, & 1 quantitas conſtans, erit $d(1 : dx) = -d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, ſi dx conſtans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, ſi dy conſtans.

CAPUT II.

De uſu Calculi differentio-differentialis in inveniendo puncto flexus contrarii curvarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 301. Punctum flexus contrarii eſt punctum M in quo curva flectitur in partes contrarias, ut ſcilicet axi, aut puncto cuidam fixo convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regreſſus*, ſi curva AMI in contrarias partes flexa regreditur verſus verticem A.

PROBLEMA CXXIX.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ ſunt inter ſe parallelæ.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2. Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, ſintque PM, *pm* & QS infinite propinquæ, & $Pp = pQ$, hoc eſt, *dx* ſit conſtans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipſi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus $MmR = mSr$ (§. 233 *Geom.*). Sed $MR = Pp$ & $mr = pQ$ *per hypoth.* adeoque $MR = mr$ (§. 87 *Arithm.*). Ergo $mR = rS$ (§. 251 *Geom.*). Eſt vero $Sr > Vr$, quando curva axi concavitatem obvertit, & $Sr < Vr$, quando convexitas curvæ axem reſpicit. Quamobrem, in caſu priore, differentia ſemiordinatarum *dy* continuo decreſcit, in poſteriore autem creſcit, ſumta abſciſſæ differentia *dx* pro conſtante. In puncto itaque flexus contrarii differentia ſemiordinatarum *dy* eſt minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, ſi fiat $ddy = 0$, vel $ddy = \infty$, hoc eſt, ſi ſumpta *dx* pro conſtante, valor ipſius *dy* denuo differentietur (§ 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur.

COROLLARIUM.

303. Quodſi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri poteſt, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, ſi ex æquatione differentiali eruatur ratio *m*R & MR. Ex. gr. In Parabola (§. 388 *part.* 1).

$$ax = y^2$$

adeoque $adx = 2ydy$

$$a : 2y = dy : dx$$

hoc eſt $a : 2\sqrt{ax} = dy : dx$

Creſcente adeo abſciſſa *x*, decreſcit ratio $a : 2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arithm.*). Quare cum *dx* ſit conſtans, *per hypoth.* *dy* decreſcere debet (§. 204 *Arithm.*) Parabola igitur conſtanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA CXXX.

304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut ſit* $AQB : BN = AQ : QM$. Tab. III. Fig. 34.

Sit

Tab. III. *Fig.* 34. Sit ſemiperipheria circuli genitoris $AQB = p$, $BN = a$, $AB = 1$, $PQ = v$, $AQ = z$, $AP = x$, $PM = y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit $PM = PQ + QM = v + az : p$

Eſt adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az : p$$

unde $dy = dv + adz : p$.

vel $pdy = pdv + adz$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) & ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$.

Quodſi adeo dx ſumatur pro conſtante; erit (§. 300)

$$2pddy = -\frac{2p\sqrt{(x - xx)}\,dx^2}{x - xx}$$

$$\frac{pdx^2 - 4pxdx^2 + adx^2 + 4px^2dx^2 - 2axdx^2}{(x - x^2)\,2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$ Quare (§. 302)

$$\frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}} = 0.$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo $CP = AP - AC = x - \tfrac{1}{2} = p : 2a$. Eſt adeo $a : p = \tfrac{1}{2} : CP$.

$$BN : AQB = BC : CP.$$

PROBLEMA CXXXI.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $axx = (xx + aa)y$.*

Quoniam $axx = (xx + aa)\,y$

erit $axx : (xx + aa) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc eſt, $\dfrac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$

Quodſi adeo dx ſumatur pro conſtante reperietur (§. 300)

$$\frac{(2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)dx^2 - (8a^3x^4 + 8a^5x^2)\,dx^2}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$= \frac{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\,dx}{(x^2 + a^2)^4} = ddy$$

Quare (§. 302)

$$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0$$

$$\overline{}\;(2a^3$$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0$$

$$\overline{}\;(aa + xx$$

$$aa - 3xx = 0$$

$$aa = 3xx$$

$$\tfrac{1}{3}aa = xx$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}aa} = x$$

Quodſi valor ipſius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)\,y$ ſubſtituatur: prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}aay$$

$$\overline{\phantom{\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}aay}}\;(\tfrac{4}{3}aa$$

$$\tfrac{1}{4}a = y$$

Quare ſi $\sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$ & $\tfrac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit deſcripta.

PROBLEMA CXXXII.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$*

Quoniam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

erit $4b^3dx = 4b^2y\,dy - 4y^3dy$

$$\frac{b^3dx}{b^2y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx conſtans, reperietur (§. 300),

$$ddy = \frac{-b^5dxdy + 3b^3y^2dxdy}{(b^2y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

Subſtituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$, erit

$$4b^3x = \tfrac{2}{3}b^4 - \tfrac{1}{9}b^4 = \tfrac{5}{9}b^4$$

$$x = \tfrac{5}{36}b$$

Quodſi ſit $x = 0$, erit

$$2b^2y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodſi ponamus $dy = \infty$, erit ob $b^3dx : (b^2y - y^3) = dy$

$$b^2y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in caſu maximi (§. 63).

Quodſi denique hic valor ſubſtituatur in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$; erit

$$4b^3x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

adeoque $x = \frac{1}{4}b$

Curvæ igitur hujus ductus eſt prorſus mirabilis.

PROBLEMA CXXXIII.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $ay^2 = x^3 - bx^2$.*

Quia $ayy = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2dx - 2bxdx$

$$dy = \frac{3x^2dx - 2bxdx}{2ay}$$

$$ddy = 0 = \frac{12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2dxdy + 4abxdxdy}{4a^2y^2}$$

Hinc

$$(12axy - 4aby)dx^2 = (6ax^2 - 4abx)dxdy$$

$$\frac{(6x-2b)ydx}{3x^2-2bx} = dy = \frac{(3x^2-2bx)dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b)ayy = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc eſt,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \frac{4}{3}b$$

Subſtituatur valor ipſius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur

$$ayy = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{16}{9}b^3 = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{48}{27}b^3 = \tfrac{16}{27}b^3$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{(b^3 : 3a)}$$

PROBLEMA CXXXIV.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva ad quam $y - a = (x - a)^{3:5}$*

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \frac{3}{5}(x - a)^{-2:5}dx$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante; reperietur

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5}dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipſius x prodit in hypotheſi $ddy = 0$; ponatur

$-6dx$

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

erit $25(x-a)^{7:5} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA CXXXV.

309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ſemiordinatæ* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur.*

Tab. III. Fig. 35. n. 1. 2. Sit C*m* ipſi CM infinite propinqua & CM $= y$. Tangat TM curvam in puncto M, & occurrat ipſi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m*, & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quæ ipſi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* < CL, quando curva puncto C ſeu polo convexitatem obvertit: aſt eadem C*t* > CL, quando curva eſt verſus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* = o. Deſcribatur jam ex centro C radio CM arcus MR $= dx$ & radio CT arcus TH; erit ob MCT = *m* C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* = HCT (§. 91 *Arithm.*); conſequenter arcus TH ∽ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM eſt rectus, *per conſtruct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), adeoque TCM = MR*m* (§. 145 *Geom.*) Et quia TMC = M*m*C + MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* = o; erit M*m*R = TMC, conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH ſimiles, *per demonſtrata*, erit (§. 413 *Geom.* & §. 171 *Arithm.*)

$$CM : CT = MR : TH \quad \text{Tab. III. Fig. 35.}$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Denique cum, ob infinite parvum LCT, angulus HLT = LTC (§. 239 *Geom.*), & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus, *per conſtruct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

Ergo HL $= dx^3 : dy^2$.

Eſt vero ob CT $= ydx : dy$, ſumto arculo MR $= dx$ pro conſtante, *t*H $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 300). Ergo *t*L = *t*H + HL $= (dxdy^2 - ydxddy + dx^3) : dy^2$.

Fiat jam $\frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $dy^2 + dx^2 = yddy$

PROBLEMA CXXXVI.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in Conchoide* NICOMEDIS.

Sit AB $= q$M $= a$, BC $= b$, C$q = z$, CM $= y$, M$r = dx$, erit $mr = dy$ & (§. 535 *part.* 1) Tab. I. Fig. 5.

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Porro B$q = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo *qt*, erit ob rectos *t* & B, atque S & *q* non niſi infinite parvo angulo *q*CS differentes (§. 239 *Geom.*), adeoque æquales (§. 4), △S*qt* ∽ △BC*q* (§. 267 *Geom.*); conſequenter

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob ſectores C*qt* & CM*r* ſimiles eſt

Tab. I. Fig. 5. $Cq : qt = CM : Mr$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2-b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2-b^2)}}{bz+ab} = dz = dy$$

Si itaque dx ſumatur pro conſtante, cum ſit differentiale ipſius $zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2-b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)} = (2z^2-b^2)dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz+ab$ ſit bdz, reperitur $ddy = (2bz^3 - b^3z + 2abz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bz\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz+ab)^2 = (bz^3 + 2abbz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} =$ [ſubſtituto valore ipſius dz,] $(bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)dx^2 : (bz+ab)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \text{ (§. 308)}$$

hinc tandem eruitur

$$b(z+a)(z^4 + 2az^3 - ab^2z)dx^2 : (bz+ab)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (bz+ab)^2$$

$$z^4 + 2az^3 - ab^2z = (bz+ab)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z = b^2z^2 + 2ab^2z + a^2b^2 - b^2z^2 = 2ab^2z + a^2b^2$$

$$2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Tab. I. Fig. 14. Deſcribatur itaque parametro b parabola & (§. 622 *part.* 1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$, & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A deſcribatur circulus: dico eſſe $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = IR^2 + MR^2$, $\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb = \frac{z^4}{bb} - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^2 + z^2 - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$

Tab. Fig. 5.

$$\frac{z^4}{bb} - \tfrac{6}{4}z^2 - \tfrac{1}{2}az = 0 \qquad z : bb$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

SCHOLION.

311. *Niſi inconſulta nobis viſa fuiſſet figurarum multiplicatio, Parabolam circa axem* CT *deſcripſiſſemus, ſtatuto vertice in* C *&* *crure ſurſum tendente.*

PROBLEMA CXXXVII.

Tab. III. Fig. 30. 312. *Determinare punctum flexus contrarii in Spirali parabolica* AMC, *quæ generatur, ſi axis Parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.*

Quoniam ſemiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 38). Quare ſi parameter Parabolæ a, abſciſſa $AP = v$, $PM = y$; erit æquatio ad Spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque

$$adv = 2ydy$$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, $MR = dx$; erit $CM = r - y$, &

$$CP : Pp = CM : MR$$

$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r - y)dv : r$$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius dv,

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$

$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, ſi dx ſumatur pro conſtante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy}{ar} = 0$$

$$(r - 2y)dy^2 + (ry - y^2)ddy = 0$$

$$(r-y)yddy = (2y - r)dy^2$$

$$yddy = (2y - r)dy^2 : (r - y)$$

Habe-

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\,dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y - r)\,dy^2}{r - y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y eſt ſemiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT III.

De uſu Calculi differentio-differentialis in inveſtigandis Evolutis curvarum & Radio oſculi.

DEFINITIO XVII.

Tab. III. Fig. 37. 313. Si curvæ BC filum circumplicetur & ſucceſſive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extenſi curvam aliam deſcribit, quam HUGENIUS inventor (*k*) *Curvam ex evolutione deſcriptam*; ſicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO XVIII.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius oſculi.* Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C deſcribitur, dicitur curvam ex evolutione deſcriptam in M *oſculari.*

COROLLARIUM I.

315. Evoluta igitur BC eſt locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione deſcriptam AMI oſculantium.

COROLLARIUM II.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM III.

317. Quia elementum arcus M*m* in curva ex evolutione deſcripta eſt arcus circuli radio CM deſcriptus (§. 313); radius evolutæ CM eſt ad curvam AMI perpendicularis (§. 38). Tab. III. Fig. 37.

(*k*) In *Horolog. Oſcillatorio* part. 3. Def. 3. f. 60.

COROLLARIUM IV.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipſam evolutam BC continuo tangit, ceu ex geneſi manifeſtum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta deſcribuntur, ſi tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur: donec arcubus ſibi reſpondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum oſculis debetur illuſtri* LEIBNITIO, *qui primus Evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum uſum oſtendit.*

PROBLEMA CXXXVIII.

320. *Determinare Radium oſculi vel curvedinis in curvis, quarum ſemiordinatæ* PM *&* pm *ſunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua; ſit item radius oſculi C*m* alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipſi AB parallela, donec

ſemior-

Tab. III. *Fig.* 37. ſemiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R ſunt recti, &, ob EMG & CM*m* (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG ſublato, EMC = GM*m*; erit (§. 267 *Geom.*)

MR : M*m* = ME : MC

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = t : \frac{t\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Jam cum radius MC conſtans intelligatur, quandiu ex centro C arcus infinite parvus M*m* deſcribitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali R*m*; erit radii oſculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, ſi *dx* ſumatur pro conſtante, differentiale ipſius MC eſt

$$\frac{dt\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} + \frac{tdy\,ddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

$$\text{Ergo } \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -\,tdyddy$$

Quoniam *m*R differentiale ſemiordinatæ etiam differentiale ipſius ME ob PE conſtantem; erit $dt = dy$.

$$\text{Quare } dx^2 + dy^2 = -\,tddy$$

$$(dx^2 + dy^2) : -\,ddy = t$$

Quodſi itaque, ex æquatione ad curvam datam, ſubſtituatur valor ipſius dy^2 & $-\,ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipſe deſideretur (quem interdum inveniri præſtat) fiat (§. 268 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 35)

MP : PH = ME : EC Tab. III. *Fig.* 37.

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{-\,ddy} : \frac{dx^2dy + dy^3}{-\,dxddy}$$

$$\text{Unde } EC^2 = \frac{dx^4dy^2 + 2dx^2dy^4 + dy^6}{dx^2ddy^2}$$

$$ME^2 = \frac{dx^4 + 2dx^2dy^2 + dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6 + 2dx^4dy^2 + dx^2dy^4}{dx^2ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^6 + 3dx^4dy^2 + 3dx^2dy^4 + dy^6}{dx^2ddy^2} = \frac{(dx^4 + 2dx^2dy^2 + dy^4)(dx^2 + dy^2)}{dx^2ddy^2}$$

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-\,dxddy.}$$

PROBLEMA CXXXIX.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad Evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigentur quantitates BN & CN in valore abſciſſæ AP aut ſemiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde ſubducta PM relinquit PE = NC. Sed per analogiam PM : PH = ME : EC (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP + EC = AN ſubtrahatur AB radius Evolutæ in vertice B, per Probl. præc. determinandus, relinquitur BN. Tab. III. *Fig.* 37.
2. Fiat valor ipſius BN $= v$, CN $= z$ & communis æquationum reductio dabit æquationem ad Evolutam in puris v & z atque conſtantibus.

PROBLEMA CXL.

322. *Invenire Radium circuli Parabolam oſculantis, & æquationem ad ejus Evolutam.*

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$

erit $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, ſi dx ſumatur pro conſtante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$$

Tab. III. *Fig.* 37. Unde $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{(4xdx^2 + adx^2)4x\sqrt{ax}}{4axdx^2} = \frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = y + \frac{4xy}{a}$ $= t =$ ME $=$ PM $+$ PE. Eſt vero PM $= y$. Ergo PE $= 4xy : a$, hoc eſt, quia $x = y^2 : a$, PE $= 4y^3 : aa$.

Conſtructio. Quoniam PM $= y$, TP $= 2y^2 : a$, (§. 21); ſi in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipſi MP continuatæ in E occurrens; erit PE $= 4y^4 : aay = 4y^3 : aa$ (§. 327 *Geom*). Quodſi ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis interſectio in C radium oſculi ſeu Evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipſi PH parallela; erit (§. 268 *Geom.*) ob PH $= \frac{1}{2}a$ (§. 36)

$$\text{MP} : \text{PH} = \text{ME} : \text{EC}$$

$$y : \tfrac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \tfrac{1}{2}a + 2x$$

adeoque $\text{EC}^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

$\text{ME}^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

$$\text{MC}^2 = \tfrac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a.$$

Jam cum MC coincidit in AB, hoc eſt, quando radius Evolutæ eſt AB, $x = 0$. Quare $\text{AB}^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc AB $= \frac{1}{2}a$. Eſt adeo BN $=$ AP $+$ PM $-$ AB $= 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN $= v$, CN $=$ PE $= z$: erit

Tab. III. *Fig.* 37.

$v = 3x$ $\qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$

$\frac{1}{3}v = x$ $\qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$$3az = 4v\sqrt{\tfrac{1}{3}av}$$

$$9a^2z^2 = \tfrac{16}{3}av^3$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a : 3$$

$$27az^2 = 16v^3$$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur Evolutam Parabolæ Apollonii eſſe Parabolam ſecundi generis, cujus parameter $= \frac{27}{16}$ parametri Parabolæ *Apollonianæ.*

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, ſubſtitutis in formula generali $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy$ valoribus dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, MC $=$ $(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})\sqrt{(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})}4x\sqrt{ax} : adx^3$ $= (4x+a)dx^3\sqrt{(4x+a)}4x\sqrt{ax} : 8axdx^3\sqrt{x}$ $= (4x+a)\sqrt{(4x+a)} : 2\sqrt{a}$

Quodſi fiat $x = 0$, erit vi n. 1, ME $= 0$ & MC $= a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, circuli Parabolam in vertice oſculantis diameter æquatur parametro, & centrum ejus, ob ME $= 0$, eſt in axe Parabolæ. Porro, quia MC $= \frac{(4x+a)\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{a}}$ $= \frac{(4ax+aa)\sqrt{(4ax+aa)}}{2a^2}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax+aa)}$ $=$ MH ſeu normali: erit MC $= \frac{8\text{MH}^3}{2a^2}$

Eſt autem 8MH^3 cubus duplæ normalis MH, ſicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Conſtructio. Fiat $a : 2\text{MH} = 2\text{MH} : \frac{4\text{MH}^2}{a}$ & $2\text{MH} : \frac{4\text{MH}^2}{a} = \frac{4\text{MH}^2}{a} : \frac{8\text{MH}^3}{a^2}$ hoc eſt, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis, erit ejus dimidium radius oſculi MC.

Tab. III. *Fig.* 37. Quoniam etiam $MC = 4MH^3 : a^2$, erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a} : \& MH : \frac{MH^2}{a} = \frac{MH^2}{a} \cdot \frac{MH^3}{a^2}$, hoc eſt, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius oſculi ſeu evolutæ MC.

PROBLEMA CXLI.

323. *Determinare Radium oſculi ſeu Evolutæ* MC *in infinitis Parabolis aut Paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 519 *part.* 1).

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, erit

$$(m^2-m)\,y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(m^2-m)\,y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$

$$(m-1)\,y^{-1}dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$(dx^2+dy^2) : -ddy = (ydx^2+ydy^2) : (m-1)dy^2$

hoc eſt, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2 : a^{2m-2}$

$$ME = \frac{m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2}{(m-1)\,a^{2m-2}dy^2} =$$

$$\frac{m^2y^{2m-1}+a^{2m-2}y}{(m-1)\,a^{2m-2}} = \frac{m^2y^{2m-1}}{(m-1)a^{2m-2}} + \frac{y}{m-1}$$

$$= \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax.y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in Problemate præcedente.

PROBLEMA CXLII.

324. *Determinare Radium oſculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

erit $2ydy = 2rdx - 2xdx$

$$ydy = rdx - xdx$$

Quare ſi dx ſumatur pro conſtante, erit Tab. III. *Fig.* 37.

$$dy^2 + y\,ddy = -dx^2$$

$$(dx^2+dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{y\,(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2} = y$$

Eſt itaque $ME = y$, hoc eſt, punctum E cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 38, 320). Radius igitur circuli idem eſt cum radio oſculi, hoc eſt, circulus, qui circulum oſculatur, huic congruit & circuli Evoluta eſt centrum ejus.

PROBLEMA CXLIII.

325. *Invenire Radium oſculi in Ellipſi.*

Quoniam ad Ellipſin (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit $2aydy = abdx - 2bxdx$

$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$

ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$.

Unde, ſi dx ſumatur pro conſtante,

$$ddy = -\frac{4bdx^2\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}{4a^2bx-4abx^2} - \frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}} =$$

$$\frac{(-4a^2b^2x + 4ab^2x^2 - a^3b^2 + 4a^2b^2x - 4ab^2x^2)\,dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}$$

$$= -\frac{a^3b^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}$$

Nimirum ſi $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & $N = abdx - 2bxdx$; reperietur $dD = (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$,

adeoque $\frac{dD.\,N}{D^2} =$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}},$$

quæ eſt differentialis valoris ipſius dy pars negativa (§. 19).

Eſt

Eſt vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2)\, dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)}\, dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2)\, 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$; conſequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^3b^2$.

Eſt vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum ſit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)}\sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)}dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)}\, dx = \sqrt{v} : 2a$; conſequenter $MH^3 = v\sqrt{v} : 8a^3$; adeoque $4MH^3 = v\sqrt{v} : 2a^3$.

Eſt itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$

Conſtructio. Fiat $b : MH = MH : MH^2$

& $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$

hoc eſt, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius oſculi MC.

COROLLARIUM.

326. Si AP, ſive $x = 0$: circuli in A Ellipſin oſculantis AB radius reperitur $a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLIV.

327. *Invenire Radium oſculi ſeu Evolutæ in Hyperbola.*

Quoniam ad Hyperbolam (§. 459 *part.* I) $ay^2 = abx + bx^2$, radius oſculi MC eodem prorſus, ut in Probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$ &, ſi $x = 0$, hoc eſt in vertice,

$$= a^2b^2 \sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = \tfrac{1}{2}b.$$

PROBLEMA CXLV.

328. *Invenire radium circuli* MC *Cycloidem* AMB *in* M *oſculantis.* Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* I), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 157); adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - xx)} + \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 575 *part.* I). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - xx)} + \int \frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - xx)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$= dx(1 - x) : \sqrt{x}.\sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur

$ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (-xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{(x - xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x - xx)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2.(1 - x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$; eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$ (§. 320) $= 2xdx^3\sqrt{(x - x^2)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)} = 2DQ$ (§. 417 *Geom.*). Nam

$PD^2 = 1 - 2x + xx$

$PQ^2 = x - xx$

$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$.

Conſtructio. Quoniam tangens TM ipſi AQ parallela (§. 132); $TMQ = AQP$ (§. 233 *Geom.*). Eſt vero AQD rectus (§. 317 *Geom.*), & TMC itidem rectus (§. 317): Ergo $QMC = PQD$ (§. 91 *Arithm.*); conſequenter MC ipſi QD parallela. Conſtructio igitur talis eſt: Ducatur MC ipſi QD parallela, & fiat $EC = EM$; erit C punctum in Evoluta Cycloidis.

Co-

COROLLARIUM I.

329. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare ſi DG fiat $= AD$; in G terminabitur Evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius Evolutæ $2\sqrt{(1-1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare Evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM II.

330. Quodſi BL ipſi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD = BDQ (§.233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§.322 *Geom.*) chordæque cognomines (§.289 *Geom.*); conſequenter BL = EC (§.337 *Geom.*), & hinc LC ipſi BE æqualis & parallela (§.257 *Geom.*). Eſt vero BE arcui QD (§.575 *part.* 1) adeoque & alteri BL, *per demonſtr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§.87 *Arithm.*). Eſt itaque Evoluta Cycloidis itidem Cyclois æqualis & ſimilis (§.575 *part.* 1), hoc eſt, Cyclois ſui evolutione ſeipſam deſcribit.

SCHOLION.

331. *Cum Radius oſculi aut Evolutæ vel æqualis ſit arcui Evolutæ, vel eundem quantitate data excedat* (§.316); *omnes arcus Evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per conſtructiones geometricas exhiberi poſſunt. Unde patet, cur arcus Cycloidis* BC *ſit chordæ* BL *duplus* (§.168): *eſt enim radius Evolutæ* MC *ejuſdem duplus* (§.328) *& Evoluta Cycloidis ipſa quoque Cyclois eſt* (§.330). *Liquet etiam innumeras inveniri poſſe curvas, quæ ſaltem geometrice rectificantur. Ceterum utilis eſt Radii oſculi inventio, quia arcus circuli oſculatoris ſubſtitui poteſt pro arcu curvæ, quam oſculatur, in praxi. Ita ſpeculum ſphæricum cavum, obſervante* LEIBNITIO *in* Actis Erudit. *A.* 1686, *ſubſtituitur parabolico, quia parameter parabolæ eſt diameter circuli eam in vertice oſculantis* (§.317) *ſicque perinde ac parabolicum diſtantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA CXLVI.

332. *Determinare Radium oſculi ſeu Evolutæ in Logarithmica.*

Quoniam in Logarithmica (§.54)

$$ydx : dy = a$$

$$ydx : a = dy$$

$dxdy : a = ddy$, quia dx conſtans ſeu $ddy = ydx^2 : a^2$,

Eſt vero $dy^2 = y^2dx^2 : a^2$, adeoque

$$dy^2 + dx^2 = y^2dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2)\,dx^2 : a^2$$

$$(dy^2+dx^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : a^3$$

$$(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy = \frac{dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-a^2ydx^3 : a^2} = \frac{(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-ay}$$

Eſt igitur Radius oſculi ſeu Evolutæ $= (y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : ay$.

Enimvero cum a ſit ſubtangens Logiſticæ PT, y ſemiordinata PM, erit $\sqrt{(y^2+a^2)}$ tangens TM (§.417 *Geom.*). Tab. I. Fig. 8.

Porro cum ſit

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y : PH$$

erit ſubnormalis $PH = y^2 : a$; conſequenter TH compoſita ex ſubnormali $y^2 : a$ & ſubtangente $a = (y^2 + a^2) : a$.

Habemus adeo

$$y : \frac{y^2+a^2}{a} = \sqrt{(y^2+a^2)} : MC$$

h. e. $PM : TH = TM : MC$

Theorema. In Logiſtica Radius oſculi ſeu Evolutæ eſt quarta proportionalis ad ſemiordinatam, tangentem atque compoſitam ex ſubtangente ac ſubnormali.

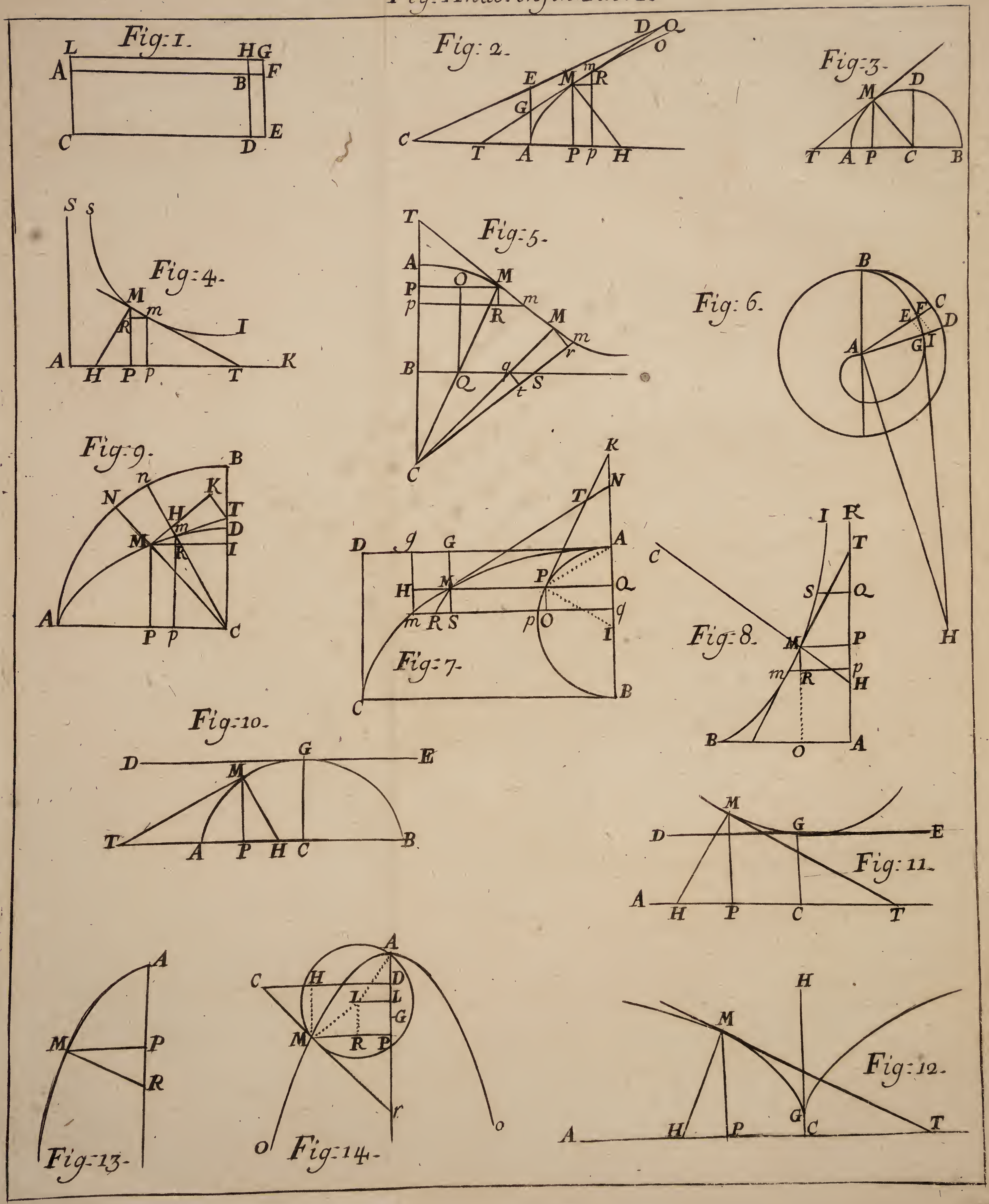
Quantitas negativa eſt, ob valorem ipſius y in præſente caſu negativum.

Porro quoniam ay eſt ſpatium logiſticum interminatum HPMI (§.134) & $(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)} = TM^3$; erit HPMI : $TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logiſticum interminatum eſt ad quadratum tangentis, ut tangens ad Radium oſculi ſeu Evolutæ.

SEC-

Fig: Anal: infin: Tab: I.



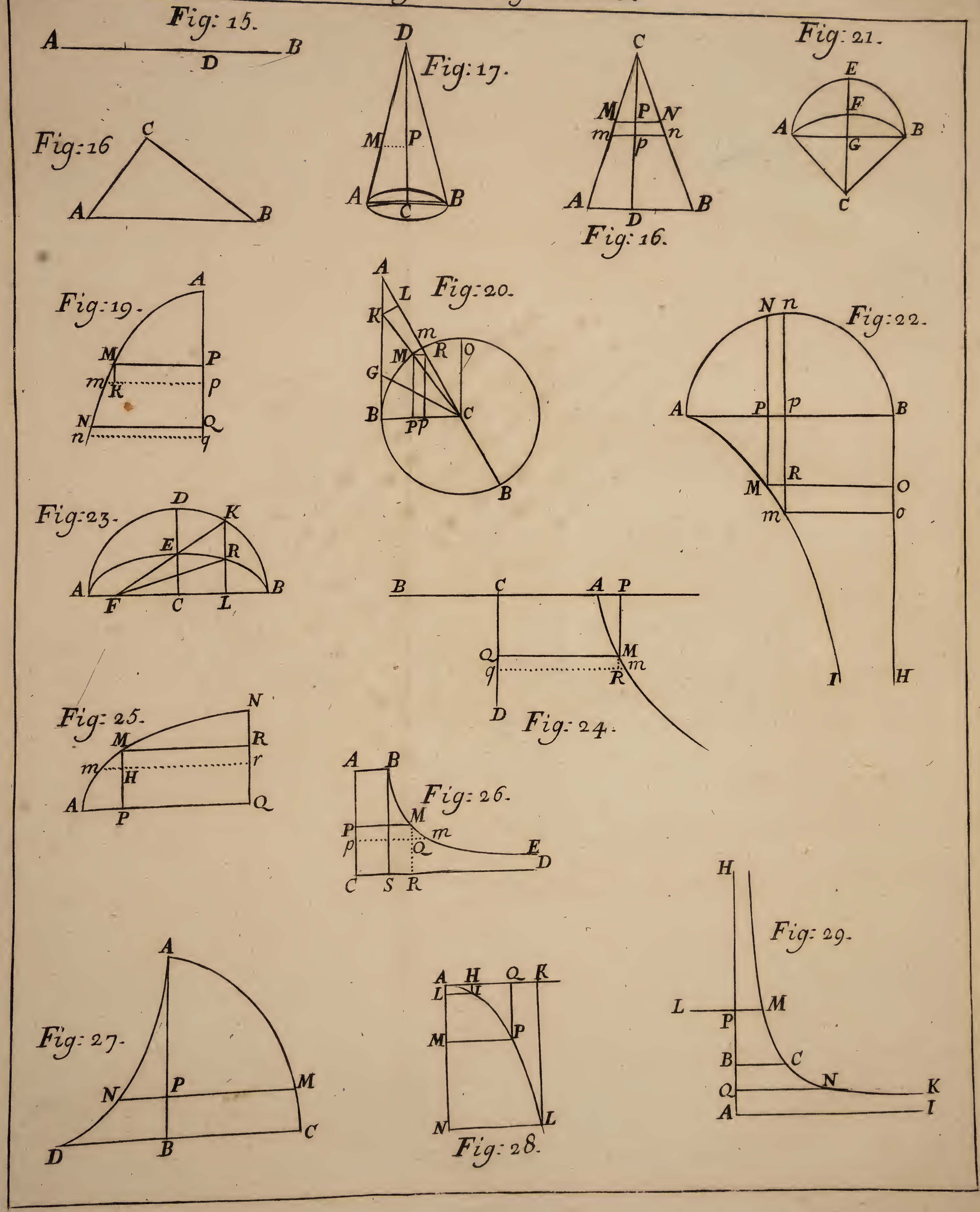

Fig: 15.
Fig: 16
Fig: 17.
Fig: 16.
Fig: 21.
Fig: 19.
Fig: 20.
Fig: 22.
Fig: 23.
Fig: 24.
Fig: 25.
Fig: 26.
Fig: 27.
Fig: 28.
Fig: 29.

Fig. Anal. infin. Tab. III

Fig. 30.

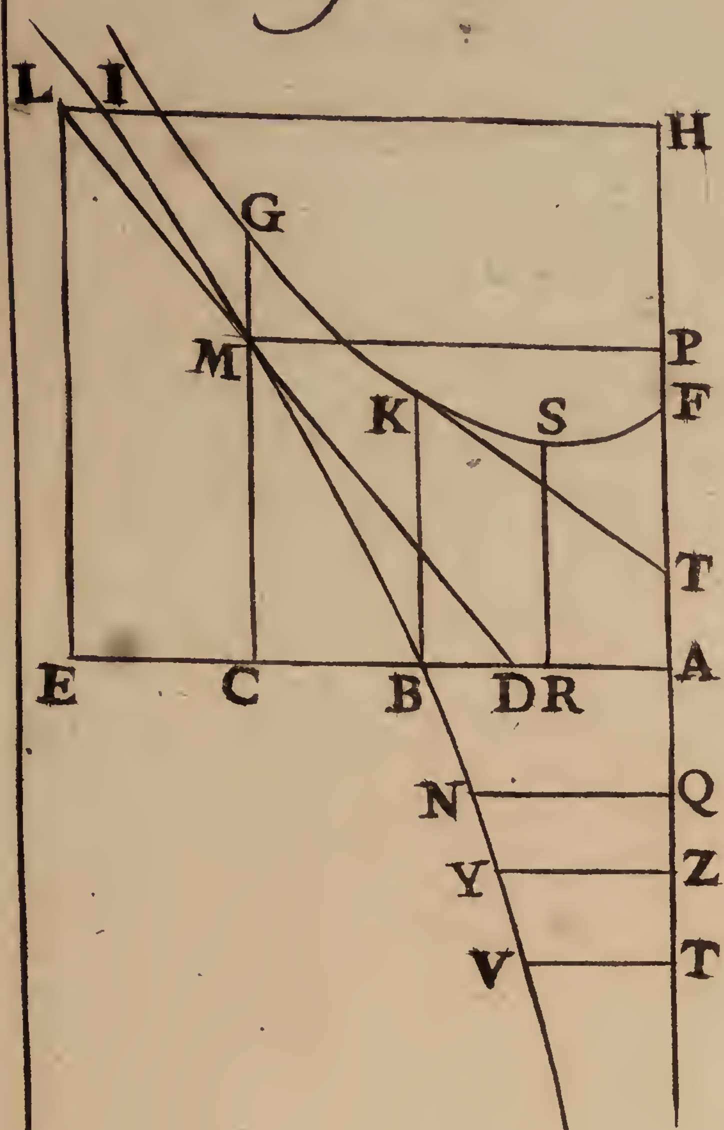


Fig. 31.

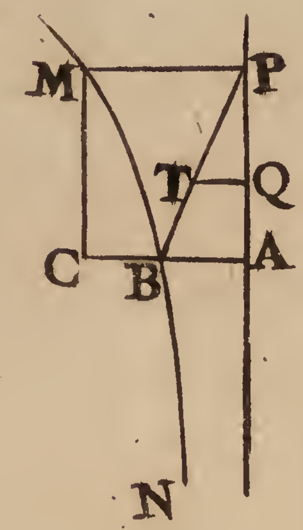


Fig. 32.

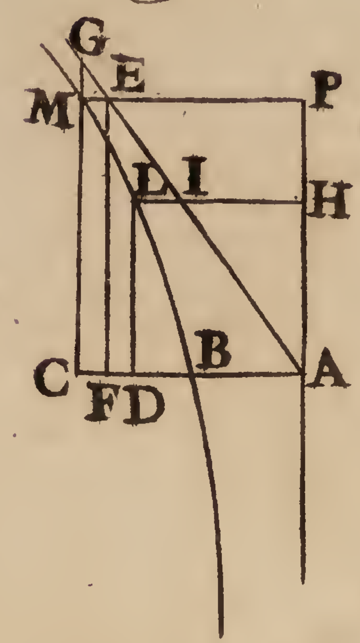
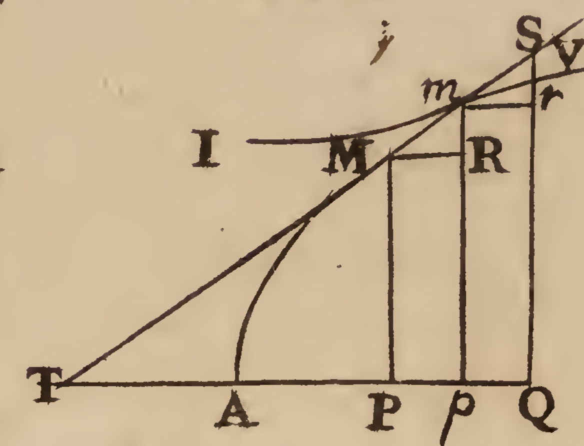


Fig. 33.

N. 1.



N. 2.

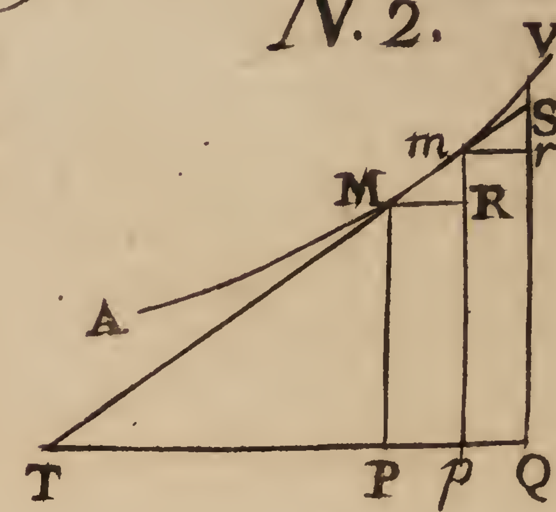


Fig. 34.

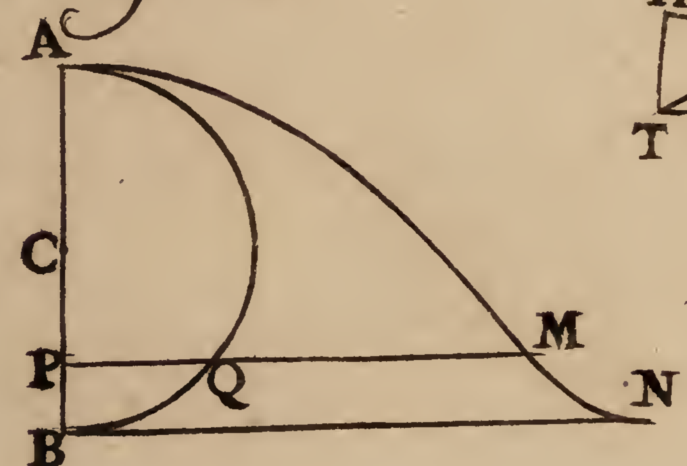
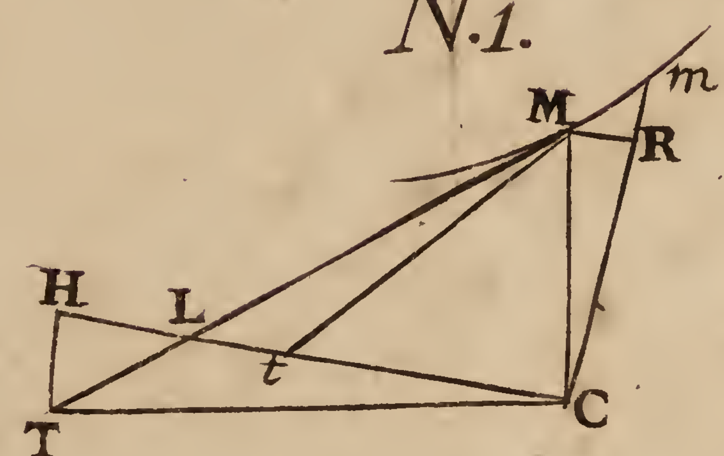


Fig. 35.

N. 1.



N. 2.

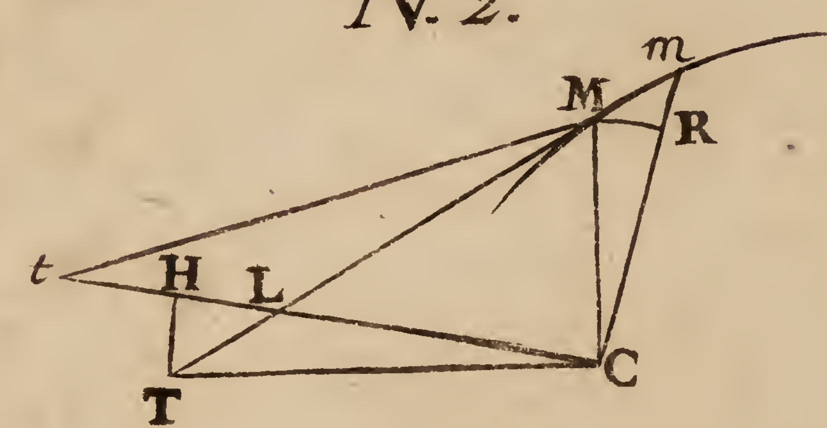


Fig. 36.

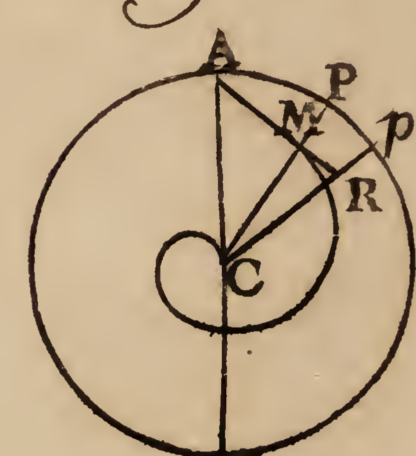


Fig. 37.

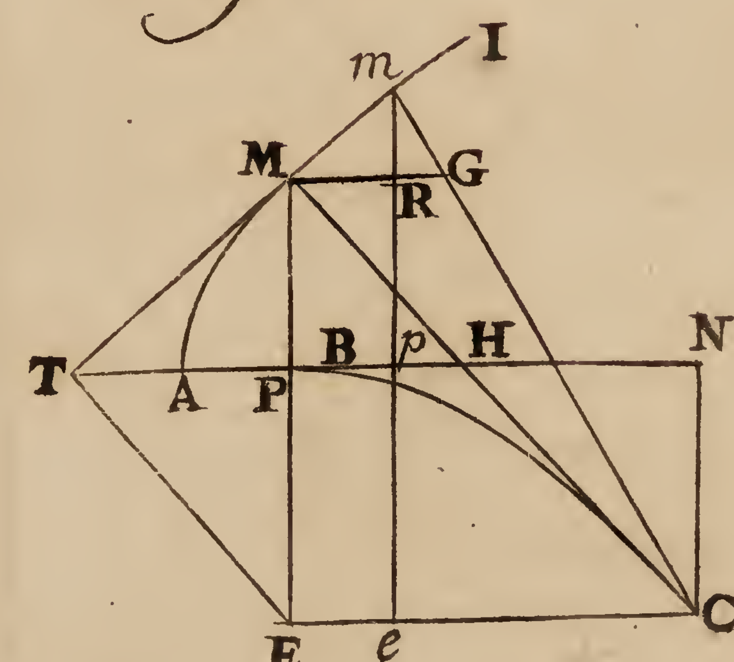


Fig. 38.

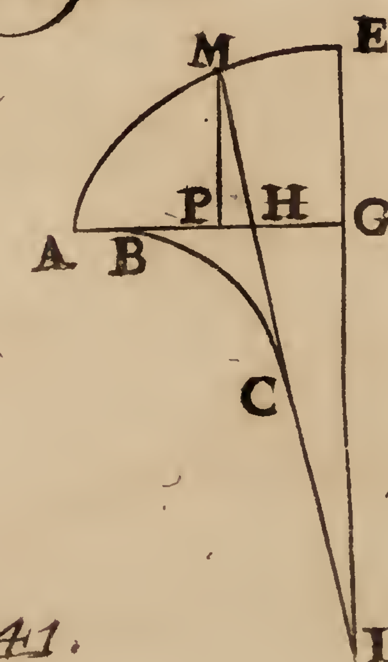


Fig. 39.

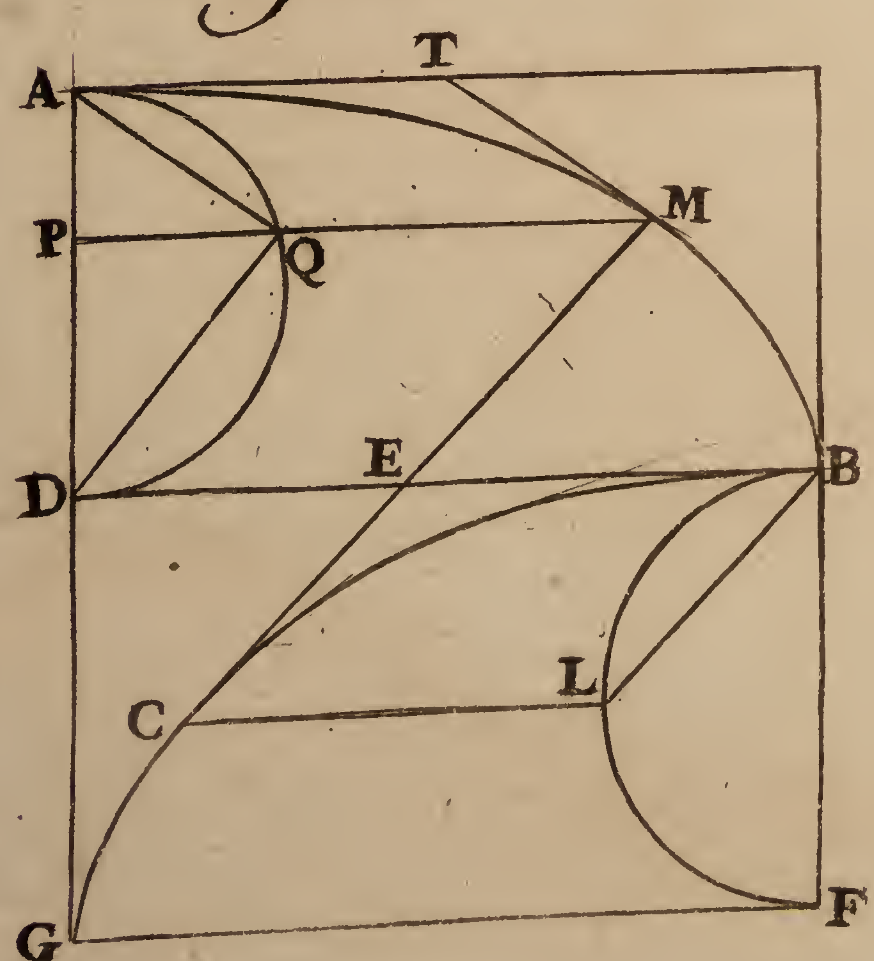


Fig. 40.

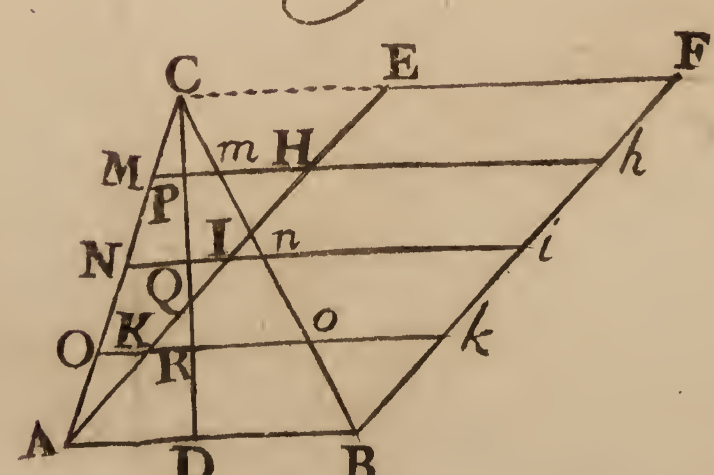


Fig. 41.

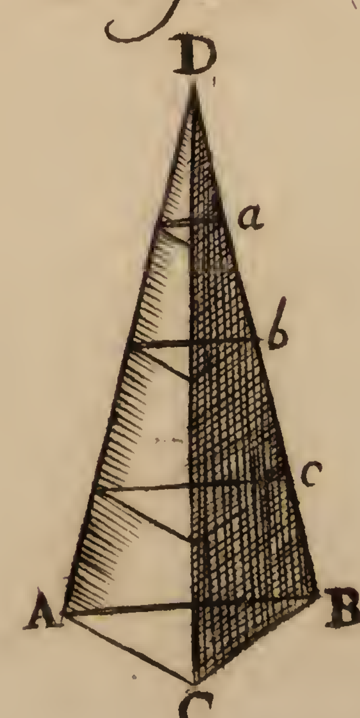


Fig. 42.

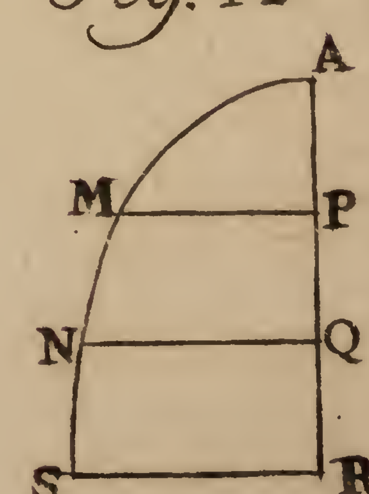


Fig. Anal. infin. Tab. IV.

Fig. 43.

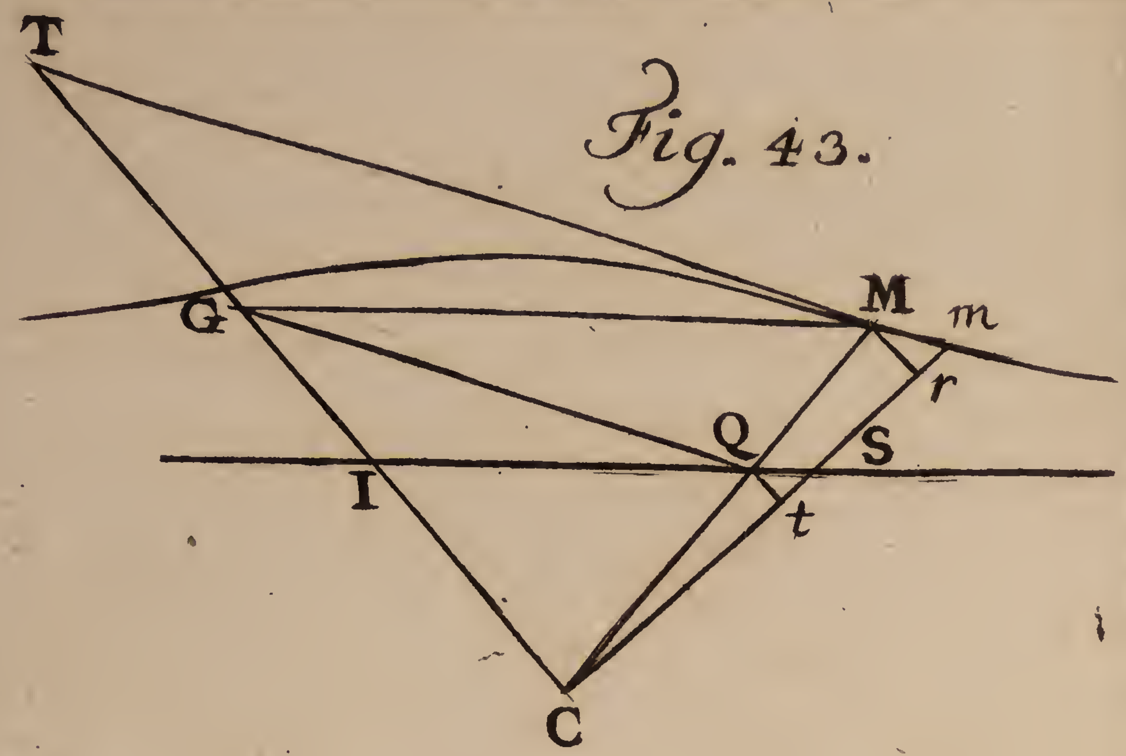


Fig. 44.

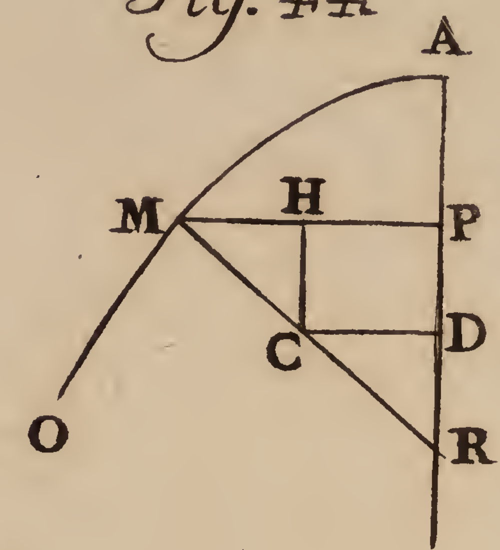


Fig. 45.

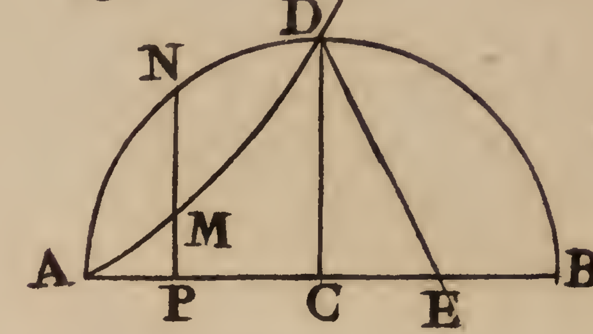


Fig. 46.

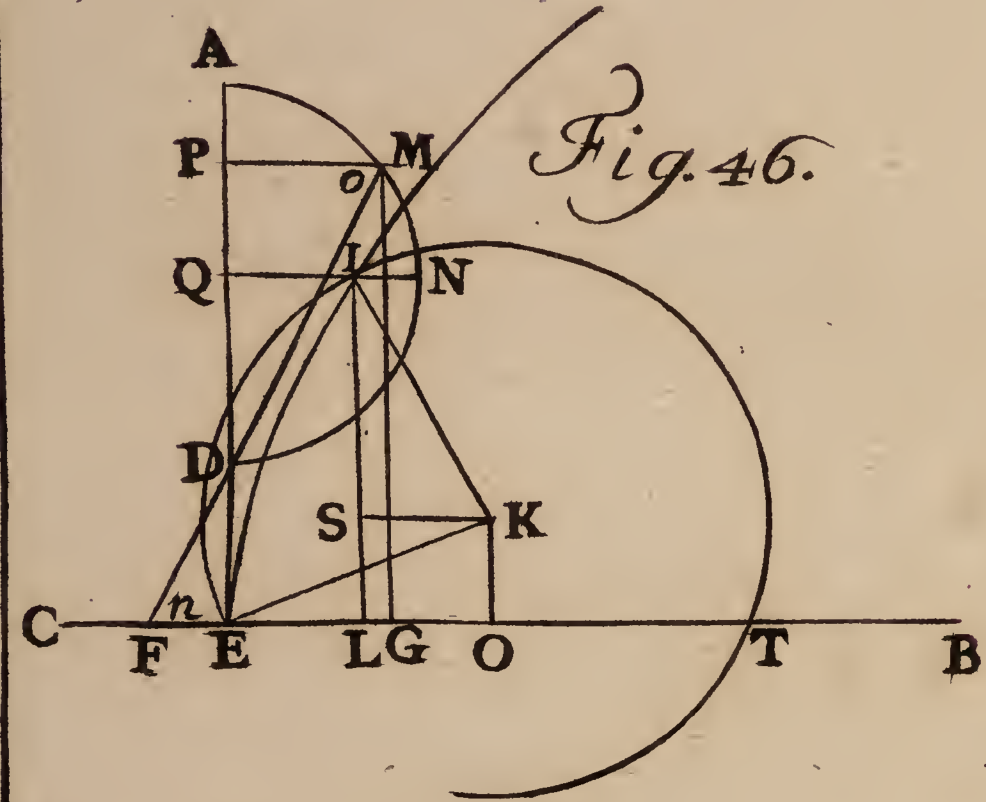


Fig. 47.

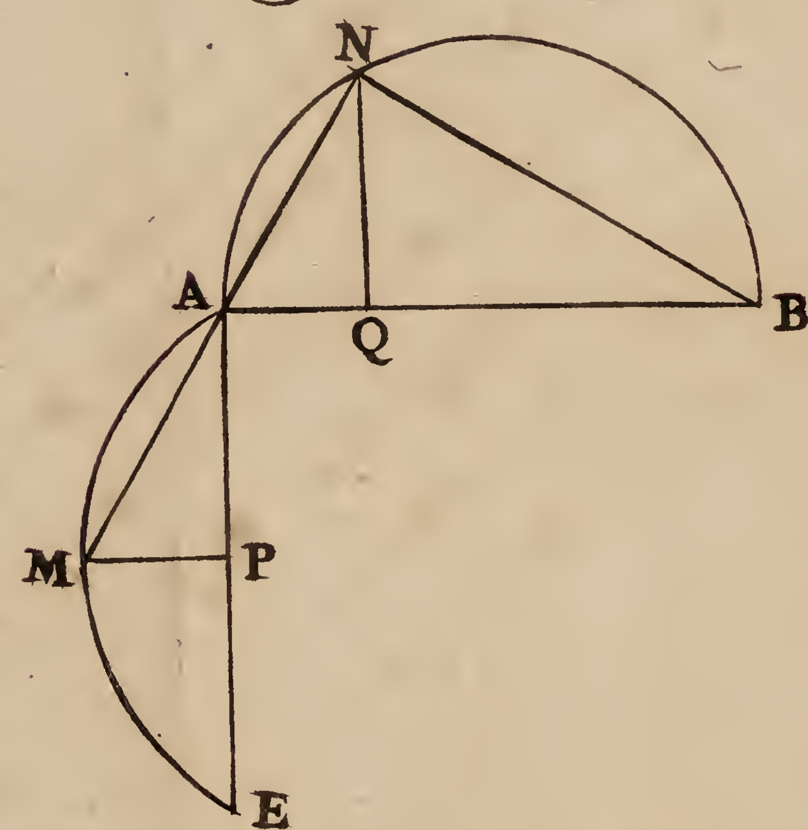


Fig. 48.

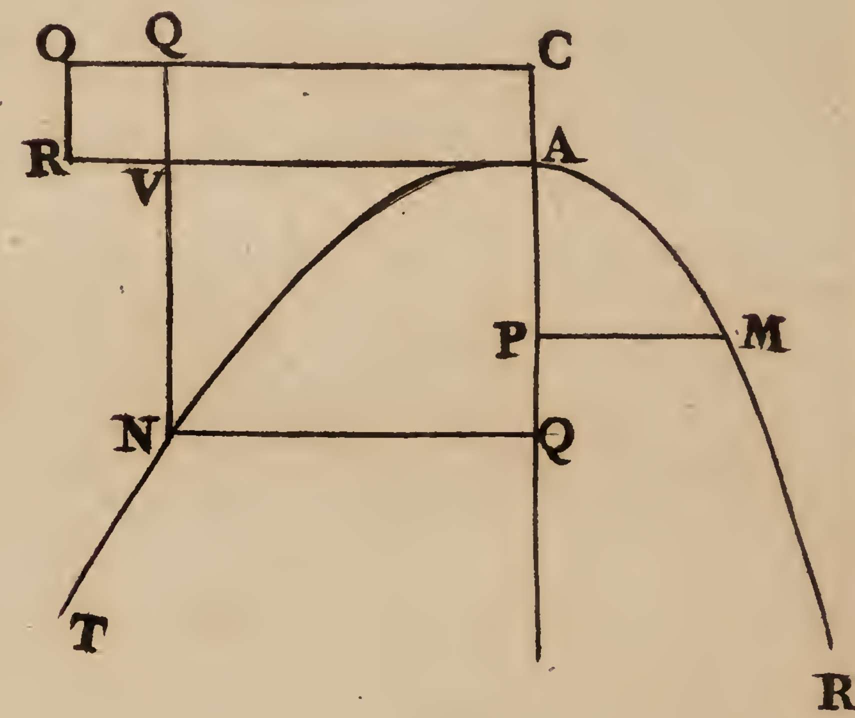


Fig. 49.

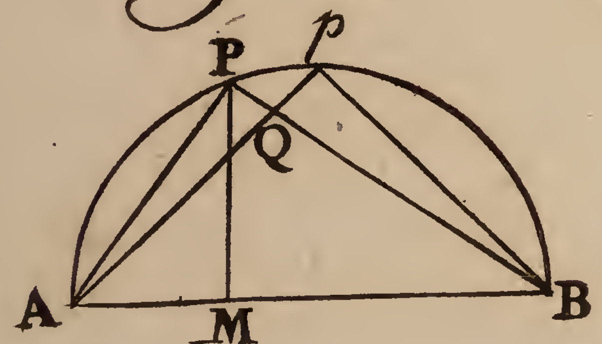


Fig. 50.

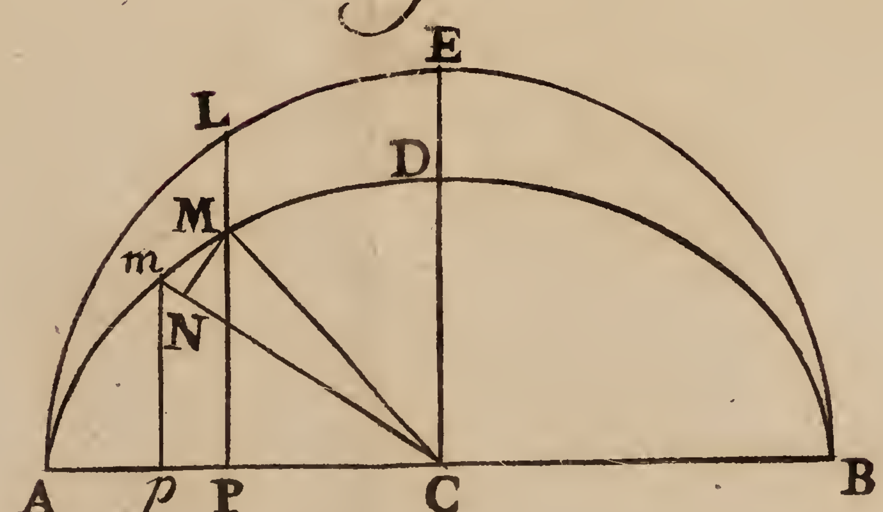


Fig. 51.

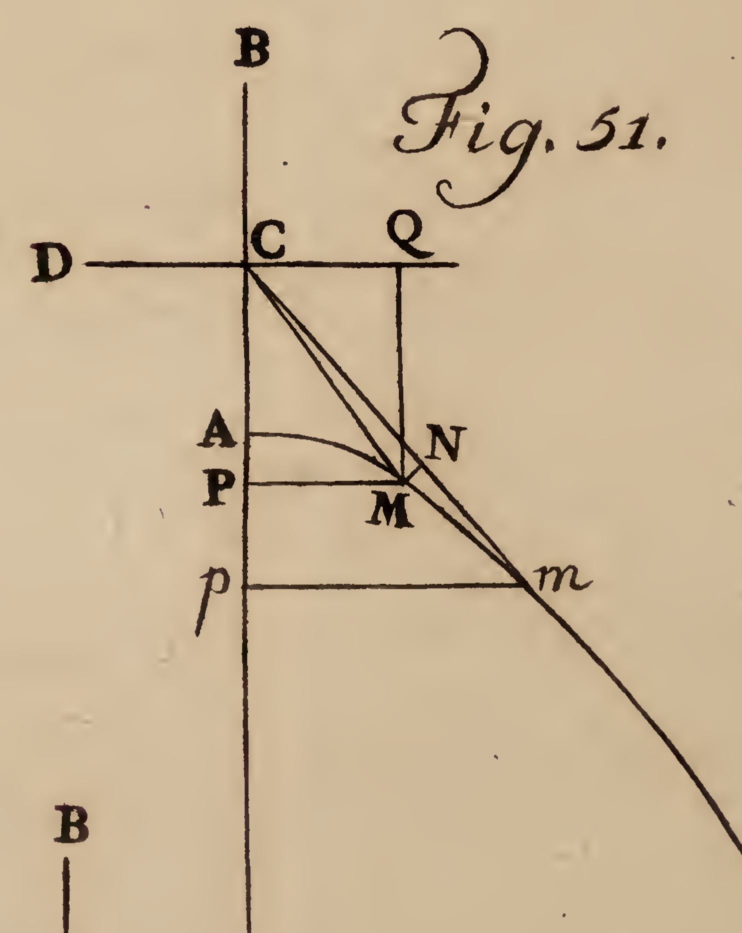
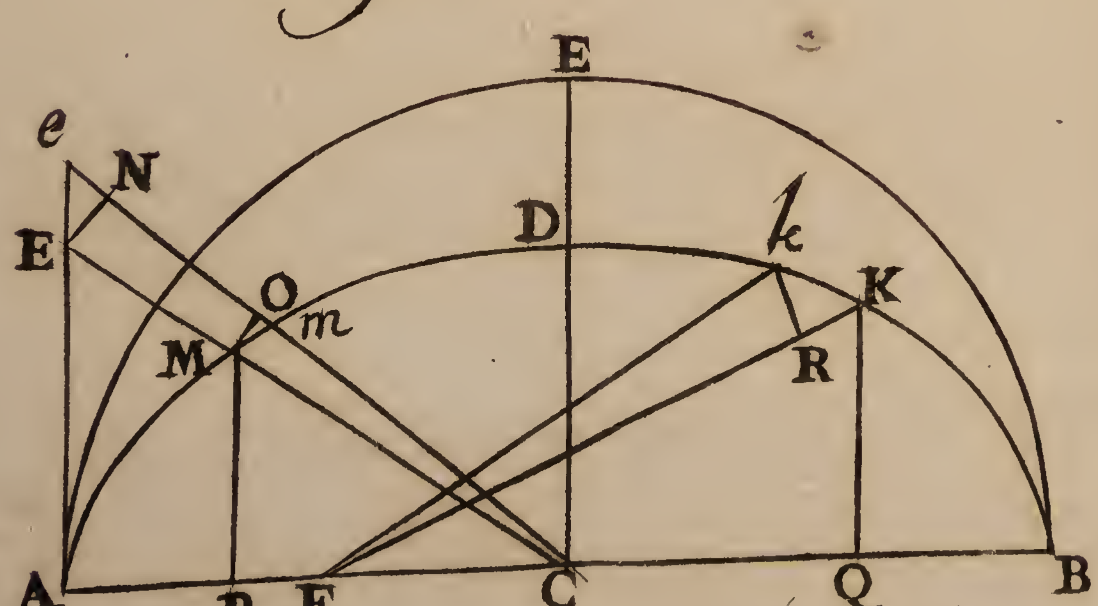


Fig. 52.



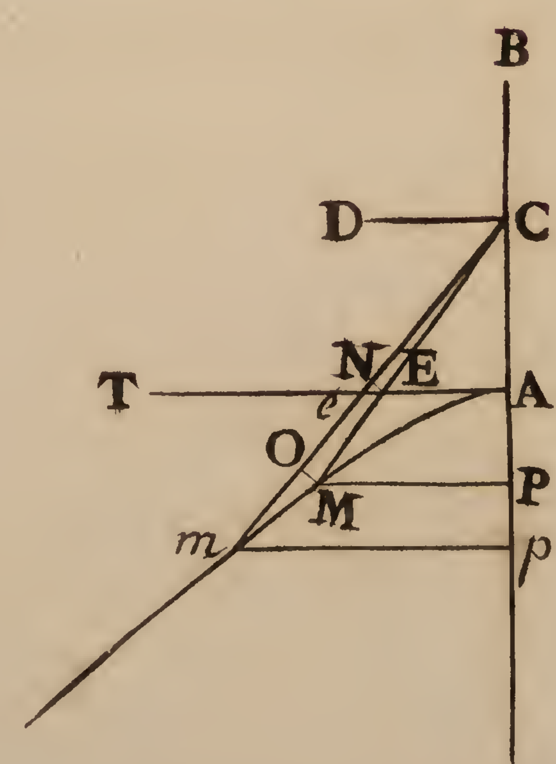


Fig. 53.

SECTIO QUINTA.

DE ARITHMETICA INFINITORUM.

CAPUT I.

De natura Arithmeticæ infinitorum.

DEFINITIO XIX.

333. A*Rithmetica infinitorum* eſt methodus ſummandi ſeries numerorum infinitis terminis conſtantes, aut earum rationes inveſtigandi.

PROBLEMA CXLVII.

334. *Invenire ſummam fractionum infinitarum, quarum numerator communis eſt unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad ſuum denominatorem.*

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum ſit infinitus, & termini continuo decreſcant, devenietur tandem ad infiniteſimam (§.2), adeoque ſumma fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima conſideratur, ipſi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§.4). Diviſa ergo per $e-1$ dat ſummam omnium terminorum $1:(ee-e)$, excepto primo (§. 119 *part.* 1). Quare ſumma integræ ſeriei $1:(ee-e)+1:e=(1+e-1):(ee-e)=e:(ee-e)=1:(e-1)$.

Sit ex. gr. $e=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. in infinit.$)=1$.

Sit $e=3$; erit $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{2}$.

Sit $e=4$; erit $\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{3}$.

Sit $e=5$; erit $\int(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{4}$.

Sit $e=6$; erit $\int(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{5}$.

PROBLEMA CXLVIII.

335. *Invenire ſummam infinitarum fractionum, ubi numerator communis eſt unitate minor denominatore primæ, & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $=m$; erit numerator $=m-1$. Summa primi & ultimi termini, utpote primo æqualis $=(m-1):m$, quæ per $m-1$ diviſa dat ſummam omnium terminorum, excepto maximo ſeu primo $1:m$. Quare ſumma integræ ſeriei $=m:m=1$.

Sit ex.gr. $m=2$, erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$ &c. in infinit.$)=1$, ut ante (§.334).

Sit $m=3$, erit $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c. in infinit.$)=1$.

Sit $m=4$, erit $\int(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. in infinit.$)=1$.

SCHOLION.

336. *Poterat idem per modum Corollarii ex Theoremate præcedente deduci. Eſt enim* $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$&c.$)=\frac{1}{2}$ (§.334). *Ergo duplum hujus ſeriei, hoc eſt,* $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c.$)=\frac{2}{2}=1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*$)=1:(m-1)$. *Ergo multiplum hujus ſeriei, cum ſumitur vicibus* $m-1$, *ſit neceſſe eſt* $(m-1):(m-1)=1$.

PROBLEMA CXLIX.

337. *Invenire ſummam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Si terminus primus $= (m - n) : m$, qui, utpote æqualis ſummæ primi & ultimi, diviſus per $(m - 1)$ dat ſummam omnium terminorum maximo excepto $(m - n) : (m^2 - m)$. Quare ſumma ſeriei integræ $= (m - n) : (m^2 - m) + (m - n) : m = (m - n + m^2 - mn - m + n) : (m^2 - m) = (m^2 - mn) : (m^2 - m) = (m - n) : (m - 1)$.

Sit ex. gr. $n = 1$, erit $(m - n) : (m - 1)$
$= (m - 1) : (m - 1) = 1$.

Sit $n = 2$, $m = 4$, erit $\int(\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{64}$ &c.
$= (4 - 2) : (4 - 1) = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 2$, $m = 5$; erit $\int(\frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125}$ &c.
$= (5 - 2) : (5 - 1) = \frac{3}{4}$.

Sit $n = 2$, $m = 6$; erit $\int(\frac{4}{6} + \frac{4}{36} + \frac{4}{216}$ &c.)
$= (6 - 2) : (6 - 1) = \frac{4}{5}$.

Sit $n = 2$, $m = 7$; erit $\int(\frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343}$ &c.)
$= (7 - 2) : (7 - 1) = \frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n = 3$, $m = 6$; erit $\int(\frac{3}{6} + \frac{3}{36} + \frac{3}{216}$ &c.)
$= (6 - 3) : (6 - 1) = \frac{3}{5}$.

Sit $n = 3$, $m = 7$; erit $\int(\frac{4}{7} + \frac{4}{49} + \frac{4}{343}$ &c.)
$= (7 - 3) : (7 - 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 3$, $m = 8$; erit $\int(\frac{5}{8} + \frac{5}{64} + \frac{5}{512}$ &c.)
$= (8 - 3) : (8 - 1) = \frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n = 4$, $m = 8$; erit $\int(\frac{4}{8} + \frac{4}{64} + \frac{4}{512}$ &c.)
$= (8 - 4) : (8 - 1) = \frac{4}{7}$.

Sit $n = 4$, $m = 9$; erit $\int(\frac{5}{9} + \frac{5}{81} + \frac{5}{729}$ &c.)
$= (9 - 4) : (9 - 1) = \frac{5}{8}$.

Sit $n = 4$, $m = 10$, erit $\int(\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$ &c.) $= (10 - 4) : (10 - 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. &c. &c.

PROBLEMA CL.

338. *Invenire ſummam fractionum infinitarum, quarum communis eſt numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $= m$; denominator fractionis primæ $= a$; denominator rationis $= n$; erit ſeries ſummanda $\frac{m}{a} + \frac{m}{na} + \frac{m}{n^2a} + \frac{m}{n^3a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in Problematibus præcedentibus, modo reperitur ſumma $m : (na - a) + m : a = (m + mn - m) : (na - a) = mn : (na - a) = mn : a(n - 1)$.

Sit ex. gr. $m = 5$, $a = 6$, $n = 2$; erit $\int(\frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{24}$ &c.) $= 10 : 6(2 - 1) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Sit $m = 3$, $a = 5$, $n = 4$; erit $\int(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{3}{320}$ &c.) $= 12 : 5(4 - 1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Sit $m = 1$, $a = 7$, $n = 2$; erit $\int(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56}$ &c.) $= 2 : 7(2 - 1) = \frac{2}{7}$.

SCHOLION.

339. *Hoc Problema univerſalitate ſua antecedentia omnia complectitur. Sit enim* $n = a$ *&* $m = n - l$, *qui eſt caſus Problematis præcedentis: ſubſtitutis hiſce valoribus in formula præſente, prodit* $(n^2 - ln) : n(n - 1) = (n - l) : (n - 1)$, *quæ eſt formula Problematis præcedentis. Similiter ſit* $n = a$, $m = n - 1$, *erit ſumma* $= (n^2 - n) : (n^2 - n) = 1$, *ut ſupra* (§. 335). *Denique ſi* $m = 1$, $n = a$; *erit ſumma* $= n : (n - 1)n = 1 : (n - 1)$, *ut ſupra* (§. 334).

PROBLEMA CLI.

340. *Invenire rationem ſummæ progreſſionis arithmeticæ ſimplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ &c.) *ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Termi-

Terminus primus = 1, numerus terminorum = n, differentia = 1. Ergo ultimus = n, & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 *part.* 1) & $\int n = n^2$. Cum n ſit infinitus numerus, atque (§. 66 *Arith.*) $1:n = n:n^2$; erit n^2 ipſo n infinities majus, adeoque n reſpectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), conſequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Eſt itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c. in infinit.$) : \int n = \frac{1}{2}n^2 : n^2 = 1:2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa ſeriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ eſt ad ſummam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA CLII.

341. *Invenire rationem ſummæ progreſſionis arithmeticæ, ſive finitæ, ſive infinitæ, cujus terminus primus eſt* 0, *ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus = 0, ultimus = v, numerus terminorum = n; erit ſumma progreſſionis = $\frac{1}{2}nv$ (§. 107 *part.* 1), ſumma vero totidem maximo æqualium nv. Eſt ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc eſt, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIII.

342. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit ſumma quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 *part.* 1). Eſt vero $1:n = n^2:n^3$ (§. 66 *Arithm.*). Ergo, quia 1 infiniteſima ipſius n, *per hypoth.* erit etiam n^2 infiniteſima ipſius n^3; conſequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, reſpectu ipſius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Eſt ergo ſumma infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium ſumma eſt n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ *ad* n^3, hoc eſt, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIV.

343. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad ſummam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit ſumma cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1.). Sed eodem modo, quo in Problemate præcedente, oſtenditur $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, reſpectu ipſius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evaneſcere. Erit ergo ſumma infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed ſumma totidem cuborum maximo æqualium eſt n^4. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc eſt, ut 1 ad 4 (§ 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLV.

344. *Invenire rationem, quam habet ſumma omnium potentiarum cujuſcunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad ſummam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti, reſpectu ſuperioris, evaneſcunt (id quod eodem modo, quo in Probl. 153 oſtenditur), ſumma omnium potentiarum ab 0 in infinitum continuatarum eſt $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part.* 1) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in caſu infiniti, ob 1 = 0, reſpectu n. Sed potentia maxima eſt n^m adeoque ſumma totidem maximæ æqualium n^{m+1}.

 Ergo

Ergo ſumma illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1} \times n^{m+1}$ ad n^{m+1}, conſequenter ut 1 ad $m+1$ (§. 124 *part.* 1).

Ex. gr. Sit $m = 2$; erit ſumma quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit ſumma cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit ſumma potentiarum ſeptimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

345. *In infinitum continuari revera non aliud ſignificat, quam eo uſque continuari, donec quantitates quædam reſpectu aliarum evaneſcant* (l). *Nam ex. gr.* (§. 342) *in ſumma quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2$ *&* $\frac{1}{6}n$ *continuo creſcit. Unde non mirum, ſi ratio poſteriorum tandem adeo exigua evadat, ut aſſignari amplius nequeat. Eſt enim primus ad ſecundum* $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124 *part.* 1). *Quare creſcente n, ratio ipſius 2n ad 3 continuo creſcit* (§. 203 *Arithm.*). *Similiter terminus primus eſt ad tertium ut* $\frac{1}{3}n^3$ *ad* $\frac{1}{6}n$ *hoc eſt, ut* $2n^2$ *ad 1* (§. 124 *part.* 1). *Quare creſcente n, ratio ipſius* $2n^2$ *ad 1 multo magis creſcit, quam in caſu priore* (§. 203 *Arithm.*). *In eo igitur caſu, in quo terminus ſecundus reſpectu primi fit inaſſignabilis, tertius multo magis inaſſignabilis eſſe debet.*

SCHOLION II.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum Theoremata inveniri poſſunt, ſi utamur iis, quæ in Analyſi finitorum* (§. 210 & ſeqq.) *de numeris figuratis demonſtrata ſunt.*

SCHOLION III.

347. *Uſum Arithmeticæ infinitorum in Geometria oſtenderunt* (m) WALLISIUS *inventor, & qui eam magis excoluit,* Iſmael BULIALDUS (n). *Enimvero cum per calculum* LEIBNITII *ſummatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius, ſed & plurima huic inſuperabilia inveniri poſſint; e re noſtra non eſſe judico, ut de ejus uſu multa proferamus. Sufficerit igitur pauca eam in rem attuliſſe.*

CAPUT II.

De uſu Arithmeticæ infinitorum in Geometria.

PROBLEMA CLVI.

Tab. III. Fig. 40. 348. *Invenire rationem trianguli* ACB *ad parallelogrammum* AEFB *ſuper eadem vel æquali baſi* AB, *& ejuſdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter ſe æquales diviſa; triangulum ACD reſolvetur in parallelogrammula, quorum baſes ſunt ordinatæ trianguli Mm, Nn, Oo &c. altitudines infiniteſimæ ipſius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter ſe & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe baſes baſi trianguli AB

(l) Vid. *Ontologia* noſtra §. 823. & ſeqq.

(m) In *Arithmetica infinitorum*, quæ extat in Vol. I. *Oper. Mathem.*

(n) In *Opere novo ad Arithmeticam infinitorum.*

Tab. III. *Fig.* 40. AB ſigillatim æquales ſunt. Parallelogrammula itaque, ſeu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum Mm, Nn, Oo &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatæ vero ſunt ut abſciſſæ CP, CQ, CR (*§. 396 Geom.*); &, quoniam altitudo in partes æquales diviſa, abſciſſæ creſcunt in progreſſione arithmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ergo elementa trianguli conſtituunt progreſſionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Eſt adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA CLVII.

Tab. II. *Fig.* 28. 349. *Invenire rationem ſpatii parabolici externi* AKLPA *nec non interni* ANLPA, *ad rectangulum* AKLN *ſuper eadem baſi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si ſpatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula reſolvantur, ut in Probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales diviſa; elementa parabolici progrediuntur ut ſemiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem reſpondent maximo, cujus baſis KL, æqualia. Quodſi parameter parabolæ fuerit a, AH $=1$, AQ $=2$, AK $=3$ &c. erit HI $= 1 : a$, QP $= 4 : a$, KL $= 9 : a$ &c. (§. 391 *part.* 1), hoc eſt baſes elementorum, adeoque elementa ipſa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abſciſſarum, hoc eſt, ut 0, 1, 4, 9 &c. Eſt ergo ſpatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342), adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3. Tab. II. *Fig.* 28.

PROBLEMA CLVIII.

350. *Invenire rationem ſpatii paraboloidici cujuſcunque* AKLPA *&* ANLPA *ad rectangulum* AKLN.

Si abſciſſæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuſcunque, erunt ſemiordinatæ HI, QP, LK ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part.* 1). Quare, cum etiam ſpatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo reſpondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1 + m$ (§. 344); conſequenter ANLPA ad idem rectangulum NK, ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc eſt, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, ſeu ut m ad $1 + m$ (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIX.

351. *Invenire rationem Pyramidis & Coni ad Priſma & Cylindrum ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis.* Tab. III. *Fig.* 41.

Si Pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales diviſa; in priſmata reſolvitur, quæ inter ſe ſunt ut baſes (*§. 573 Geom.*), hoc eſt, ut plana ſimilia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum priſmatum ſunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipſa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis reſpondeant in priſmate ſuper eadem baſi & ejus-

 dem

Tab. III. *Fig.* 41. dem altitudinis totidem maximo æqualia; Pyramis ad Priſma eſt ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodſi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipſis reſpondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis eſt ut 1 ad 3 (§. 342).

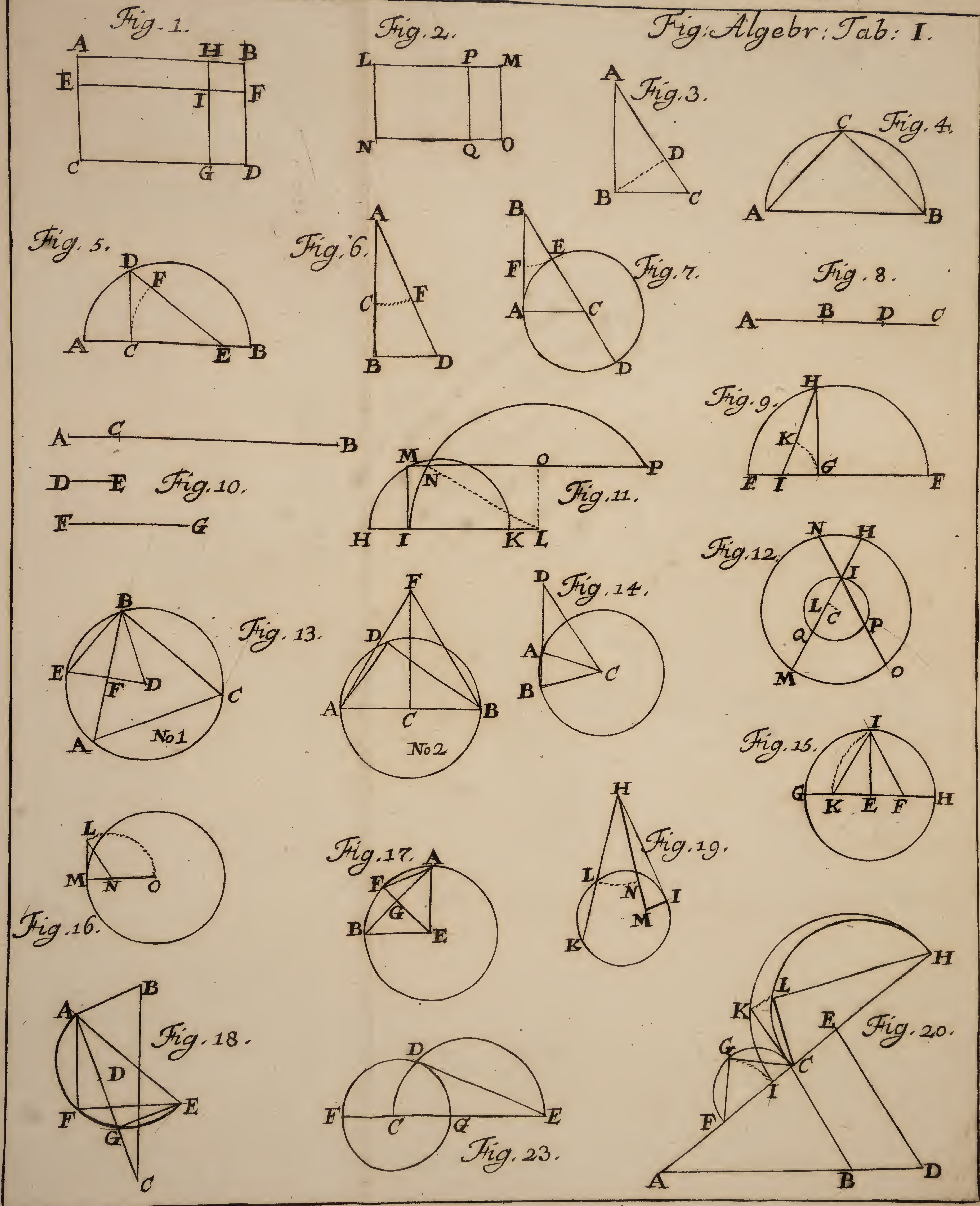
PROBLEMA CLX.

352. *Invenire rationem Conoidis parabolici, ex rotatione Parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti, ad Cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.* Tab. III.

Conſtat ex ſuperioribus (§. 197), *Fig.* 42. altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales diviſa, Conoides reſolvi in cylindrulos, quorum baſes ſunt circuli radiis PM, QN, SR deſcripti, quique adeo ſunt ut iſti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodſi AP = 1, AQ = 2, AR = 3; erit PM = 1, QN = $\sqrt{2}$, SR = $\sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) adeoque circuli ſunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 408 *Geom.*). Quare cum iisdem reſpondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri ſunt ut 1 ad 2 (§. 341).

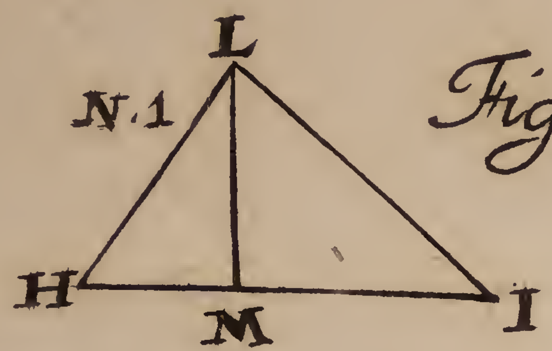
FINIS Analyſeos infinitorum, & Tomi Primi.

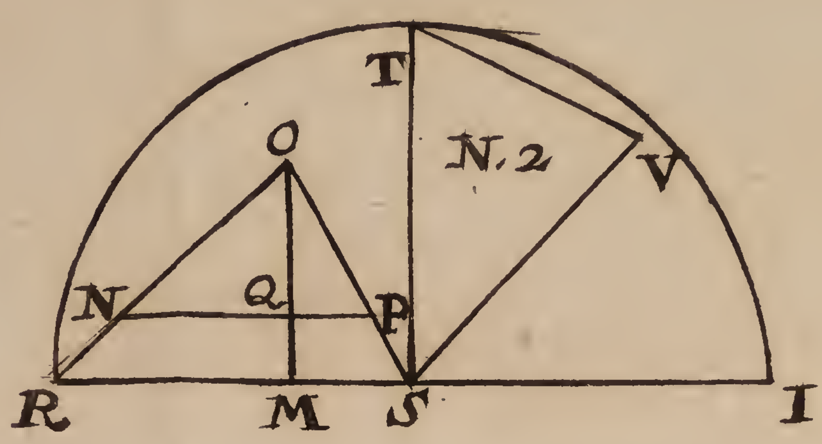
Fig: Algebr: Tab: I.



Figur: Algebr: Tab: II.

Fig. 21.





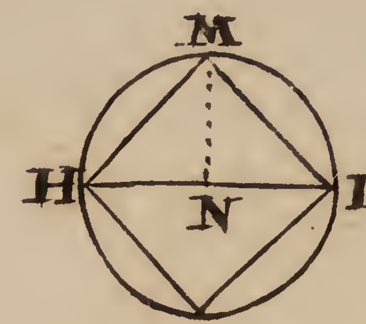


Fig. 29.

Fig. 22.

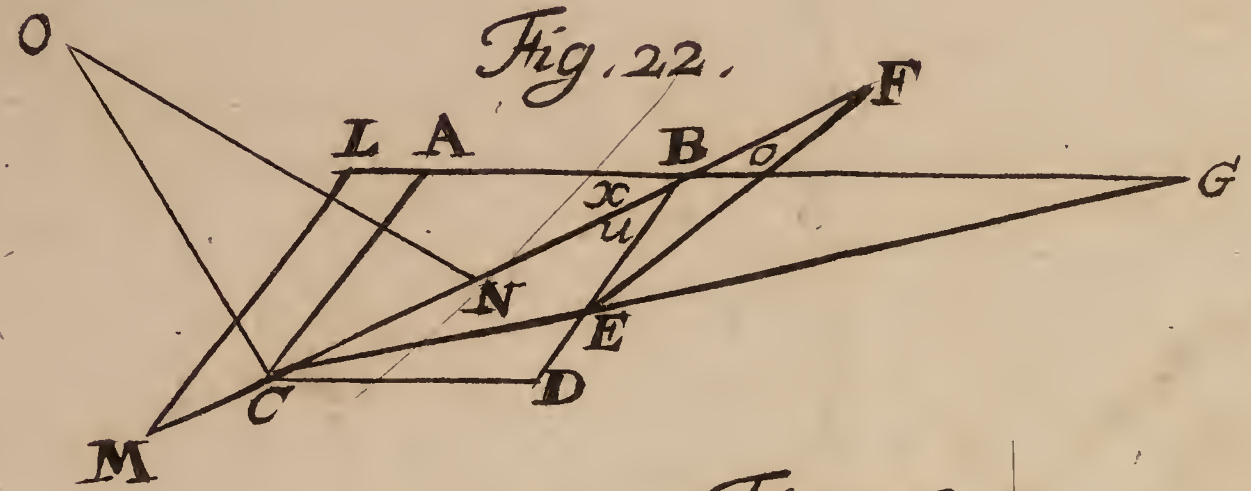


Fig. 24.

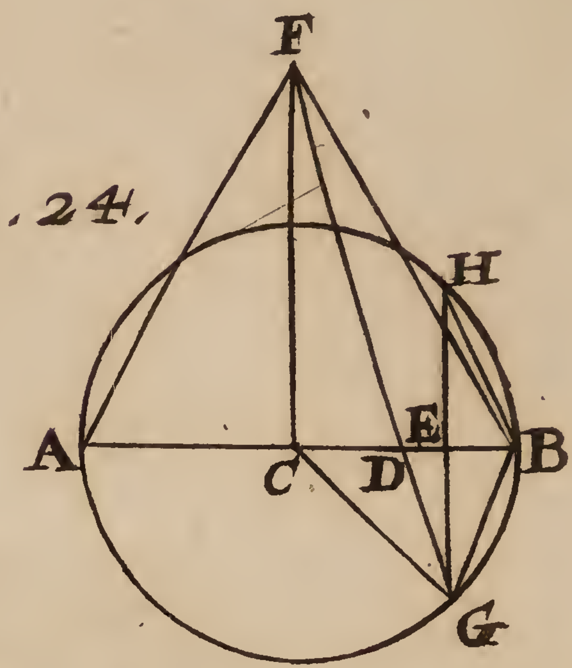


Fig. 26.

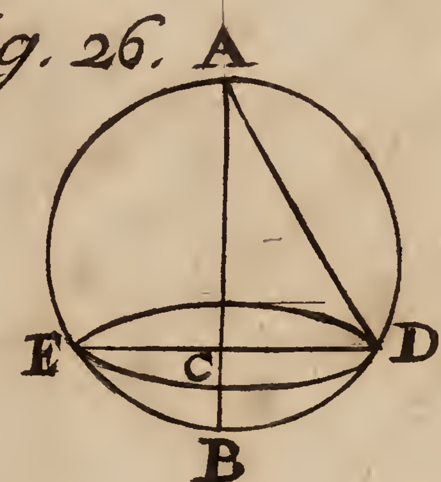
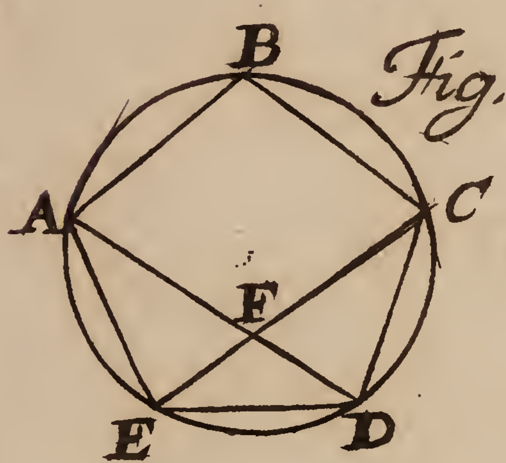


Fig. 25.



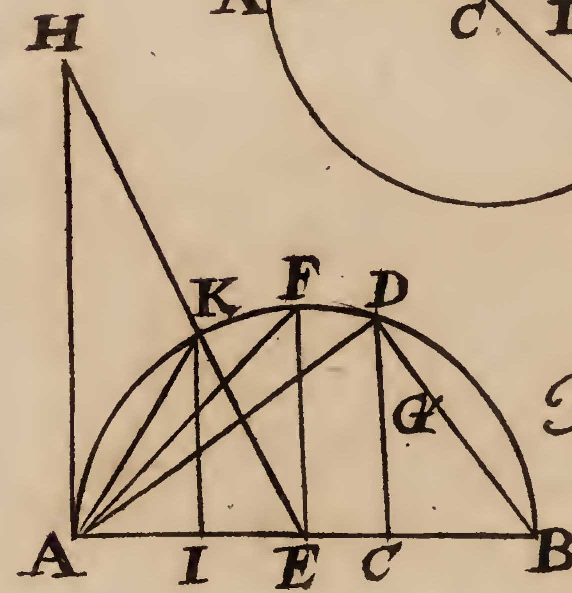


Fig. 27.

Fig. 28.

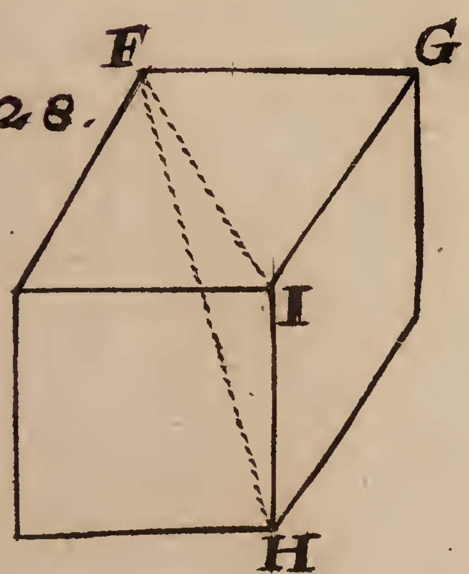
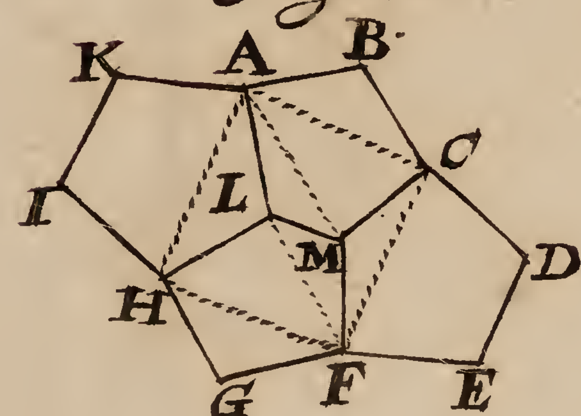


Fig. 30.



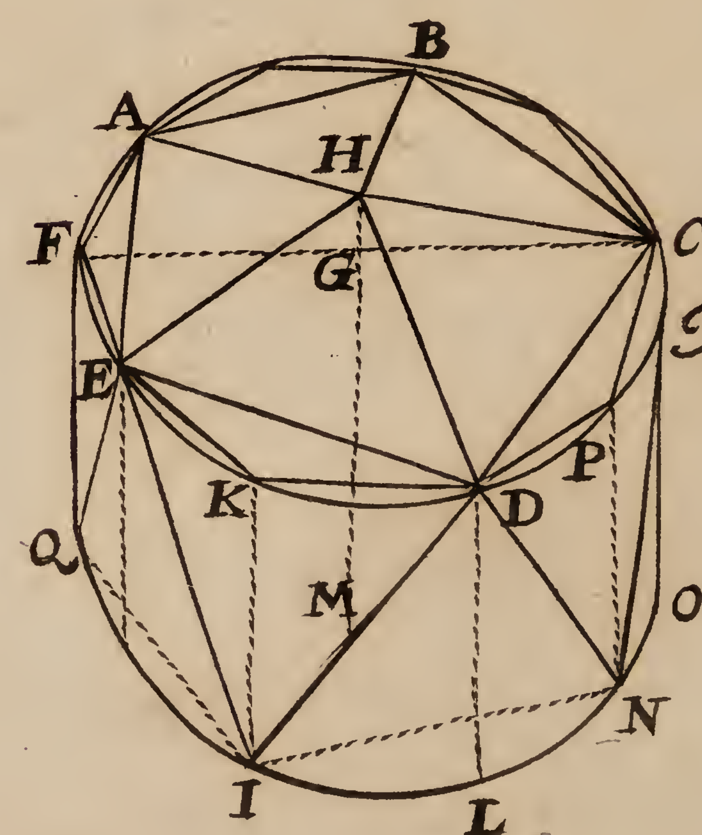


Fig. 31.

Fig. 32.

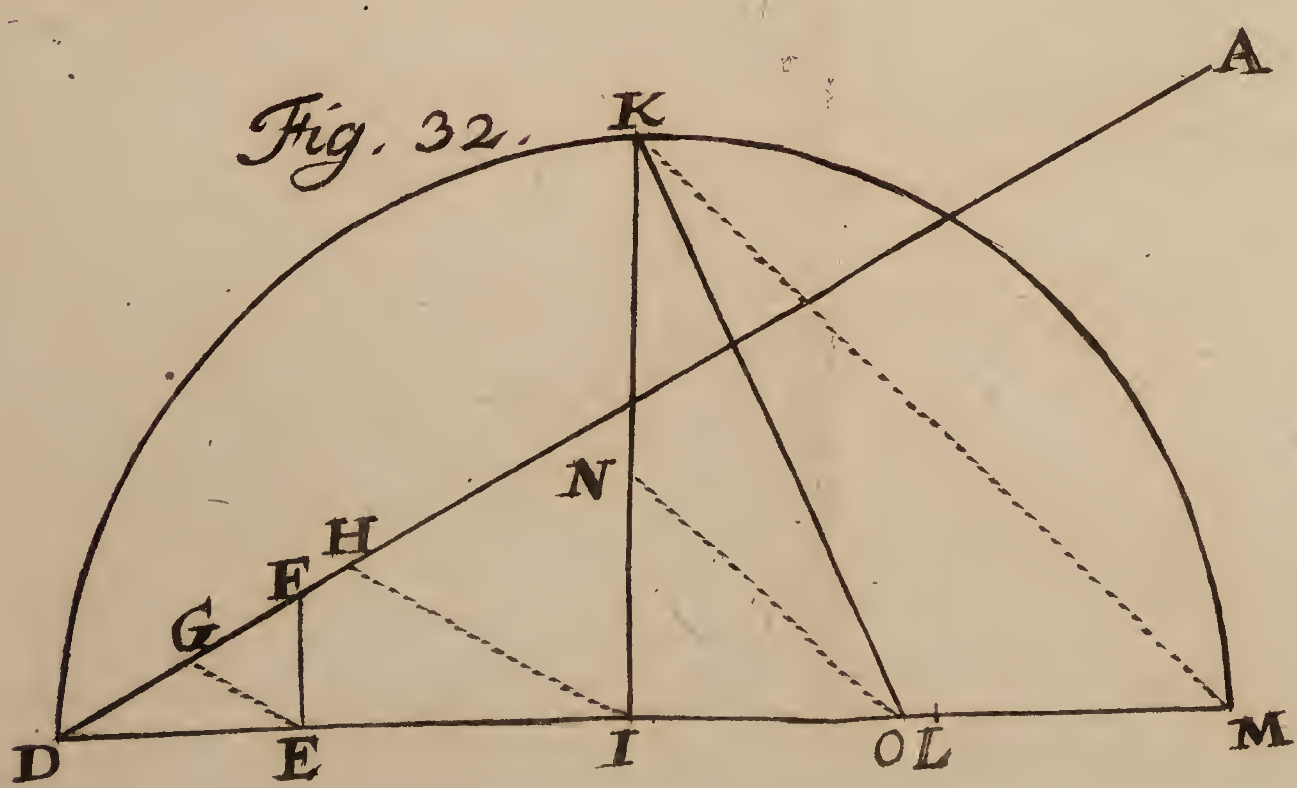


Fig. 34.

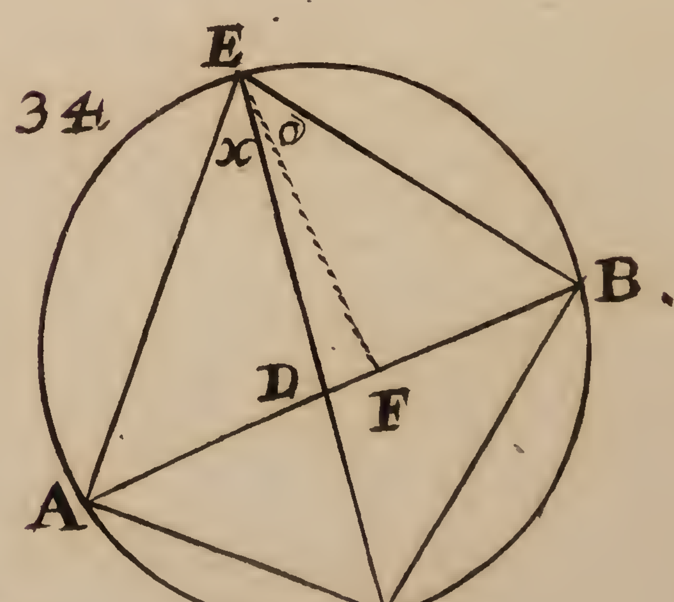


Fig: Algebr: Tab. III.

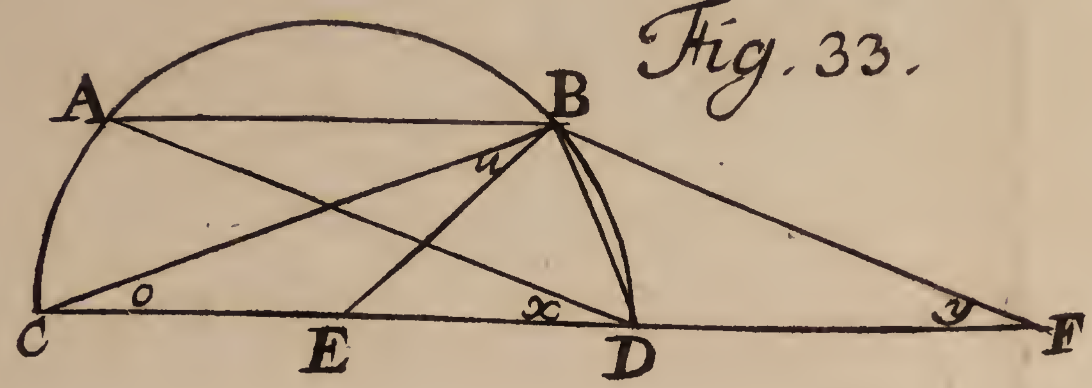


Fig. 33.

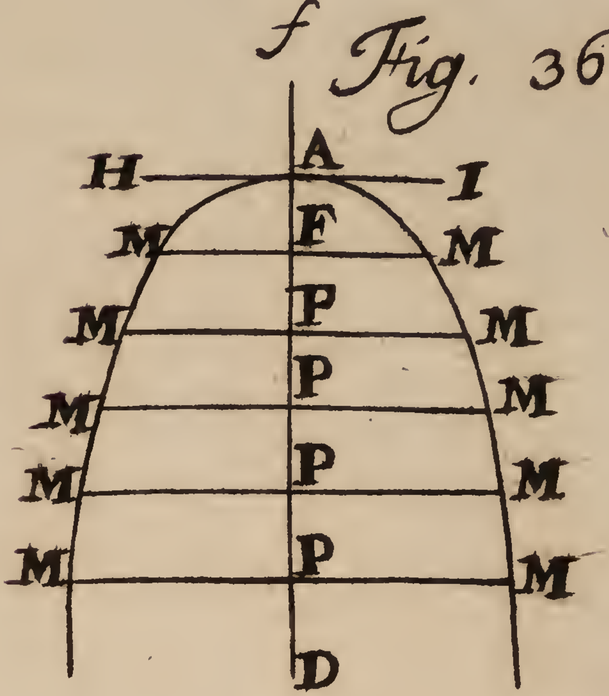


Fig. 36.

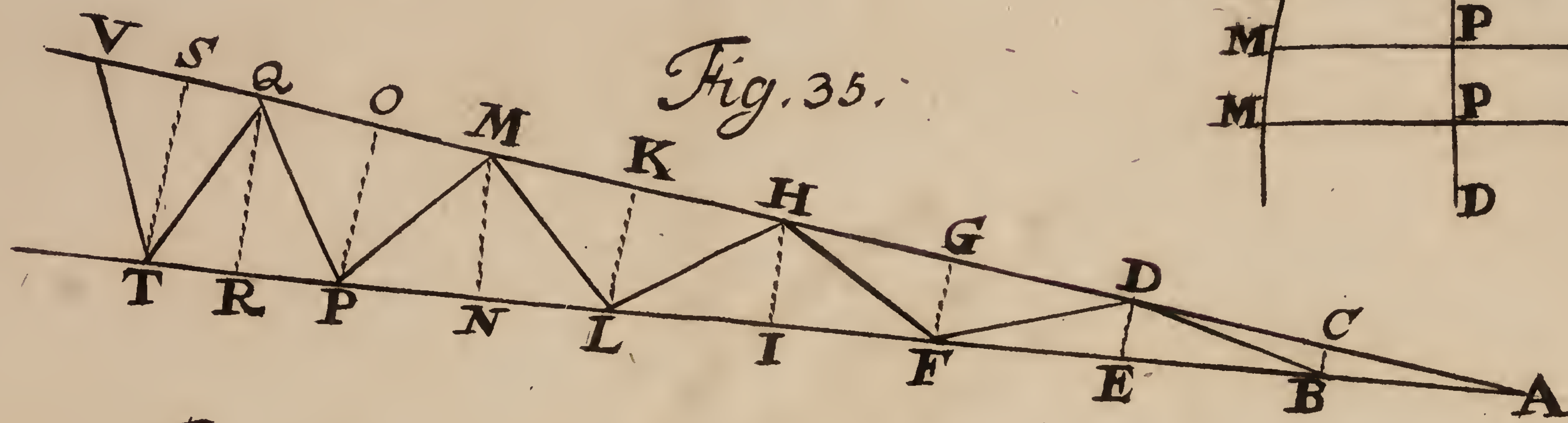


Fig. 35.

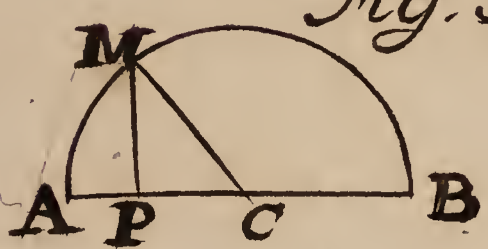


Fig. 38.

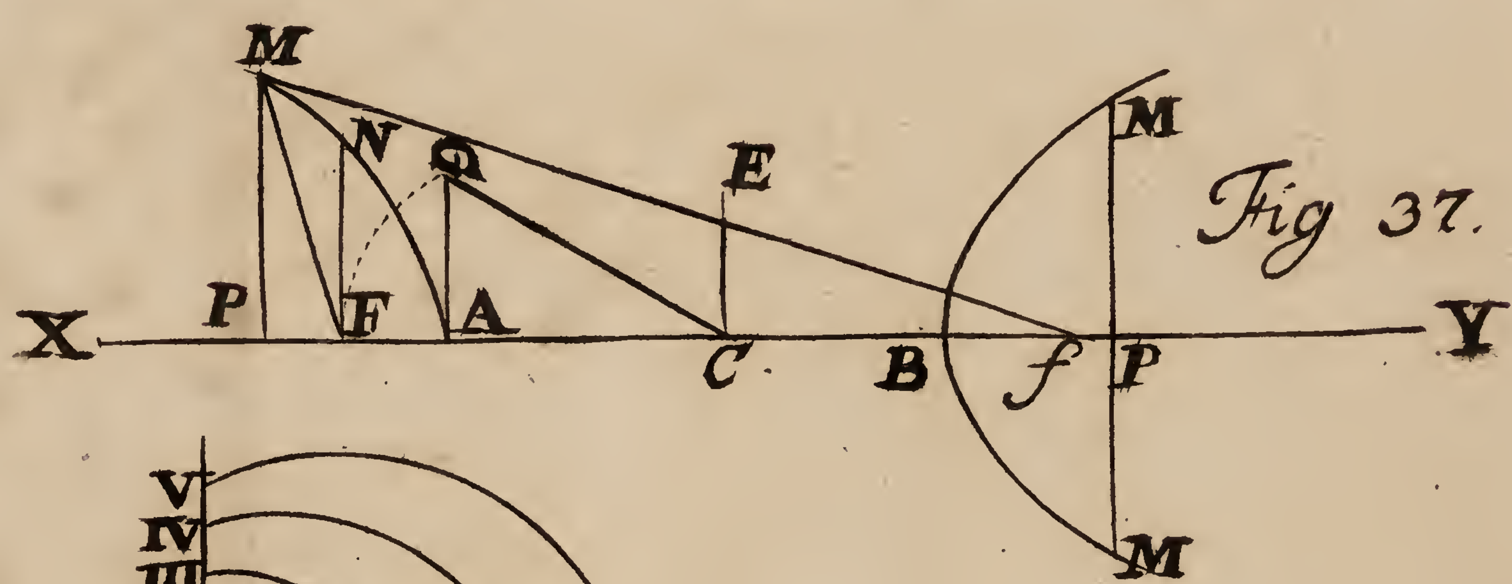


Fig. 37.

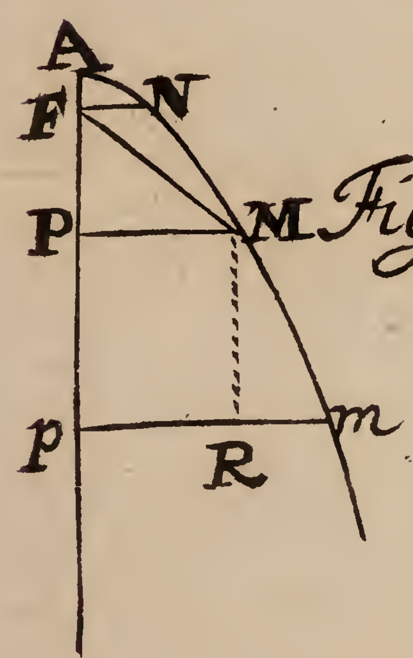


Fig. 40.

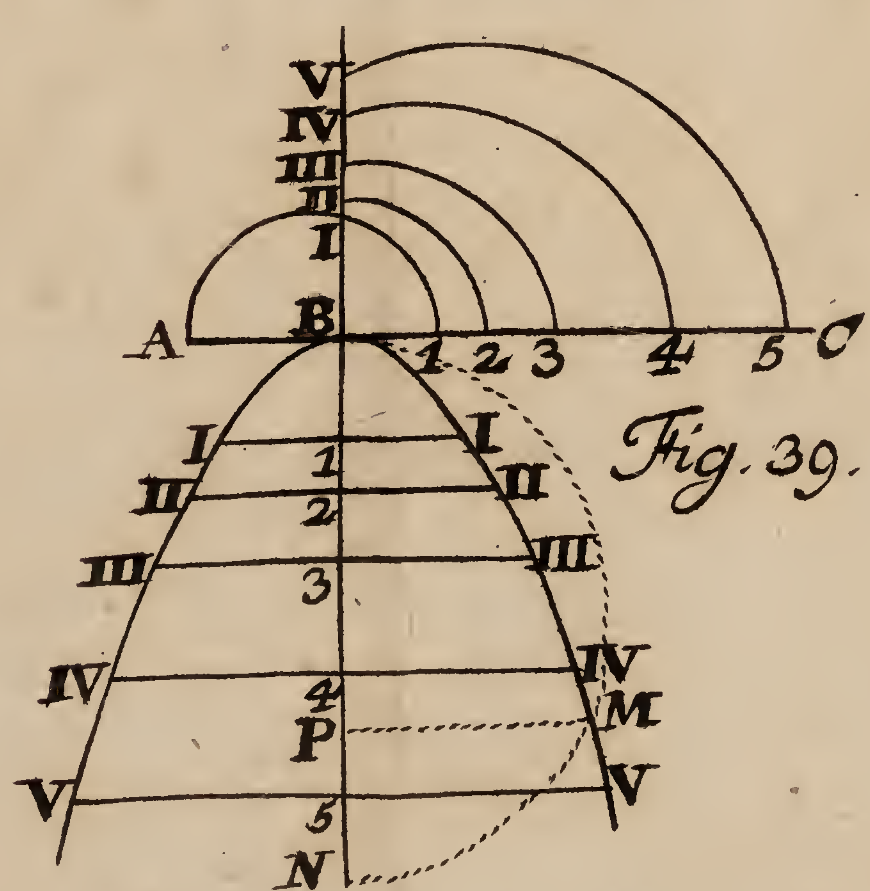


Fig. 39.

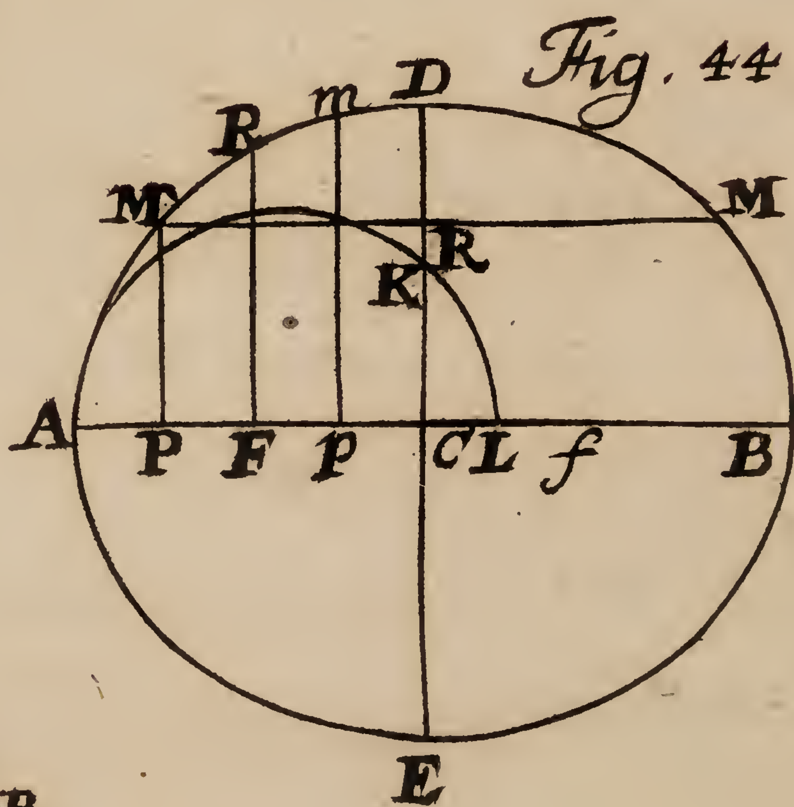


Fig. 44.

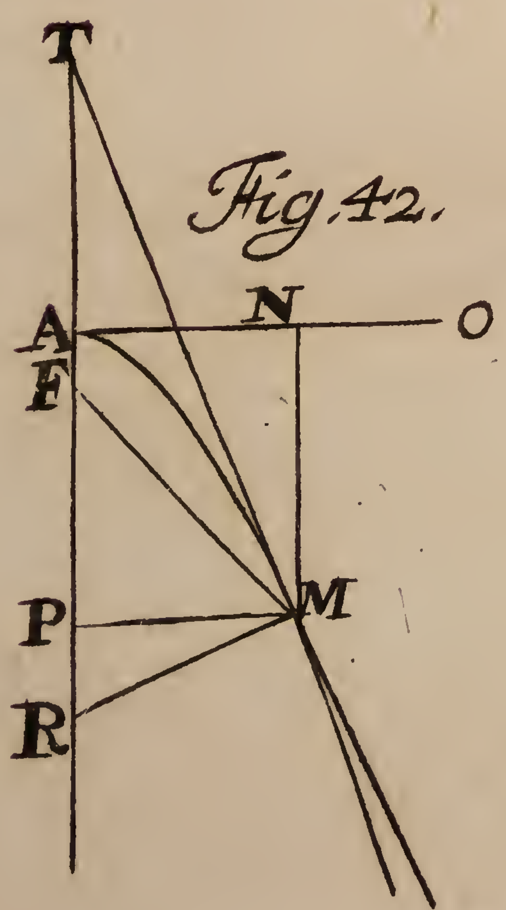


Fig. 42.

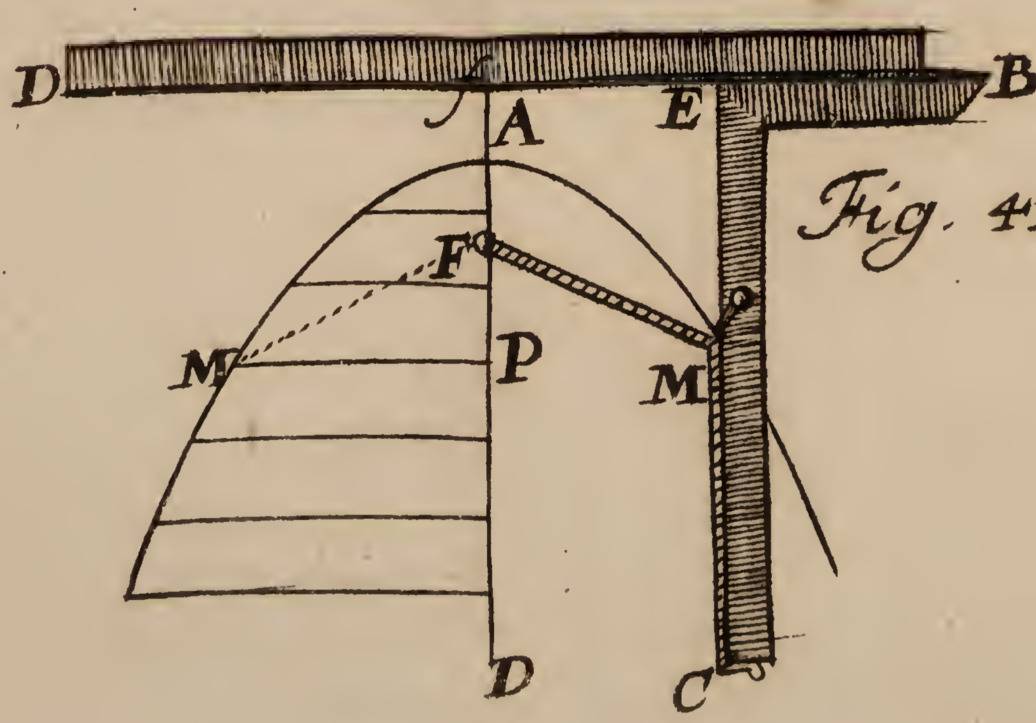


Fig. 41.

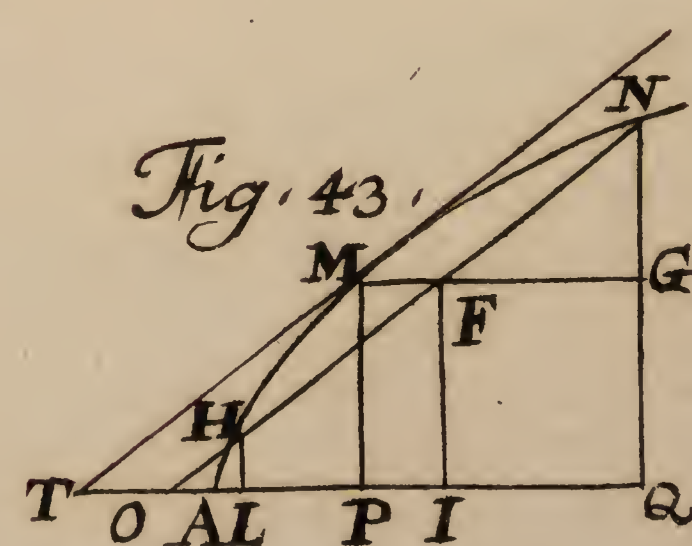


Fig. 43.

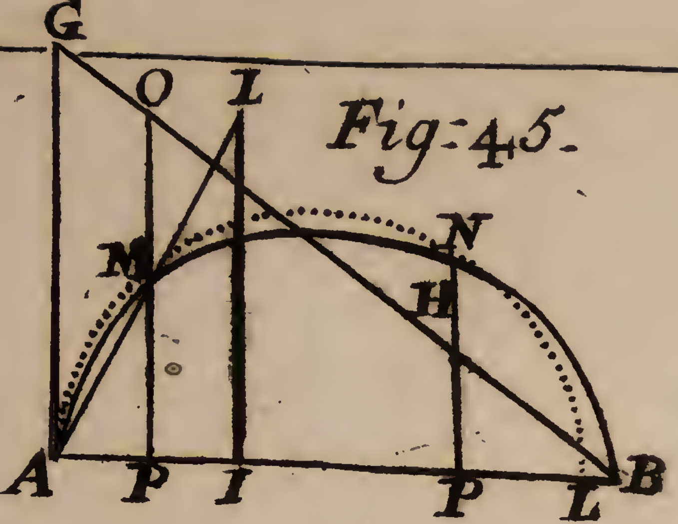


Fig: 45.

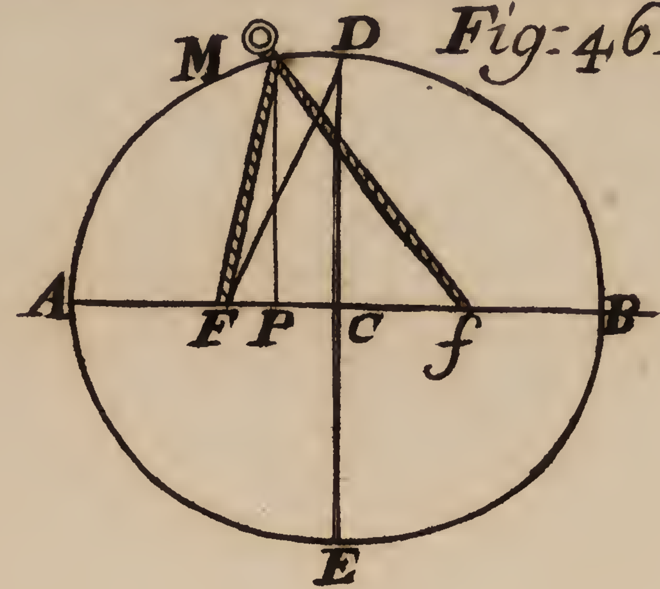


Fig: 46.

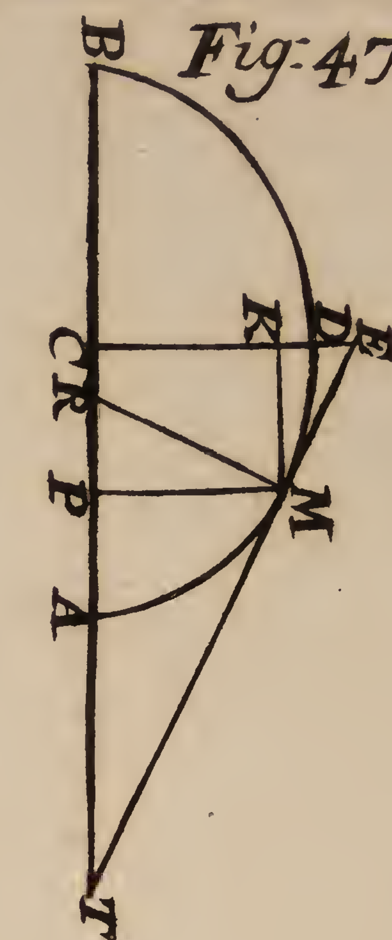


Fig: 47.

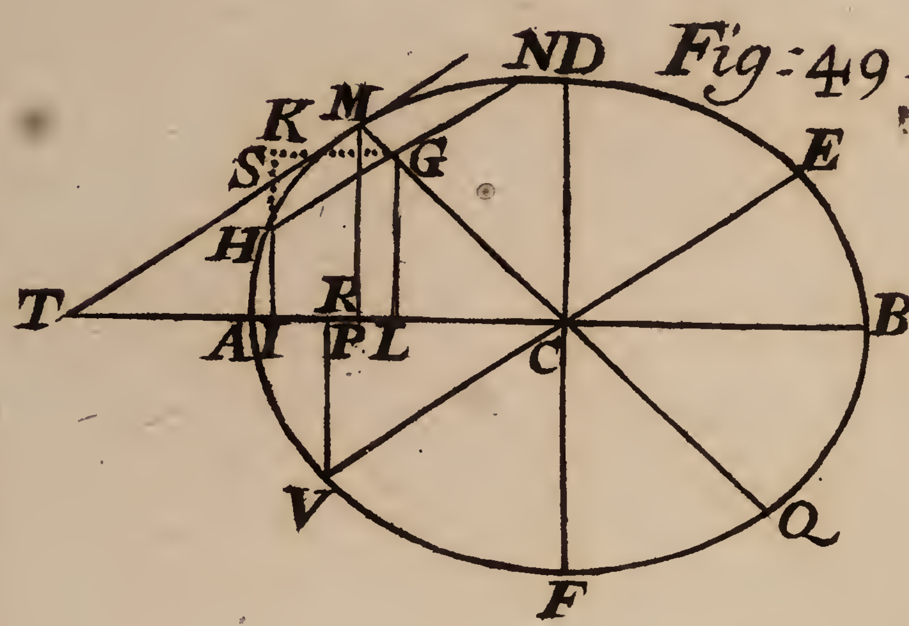


Fig: 49.

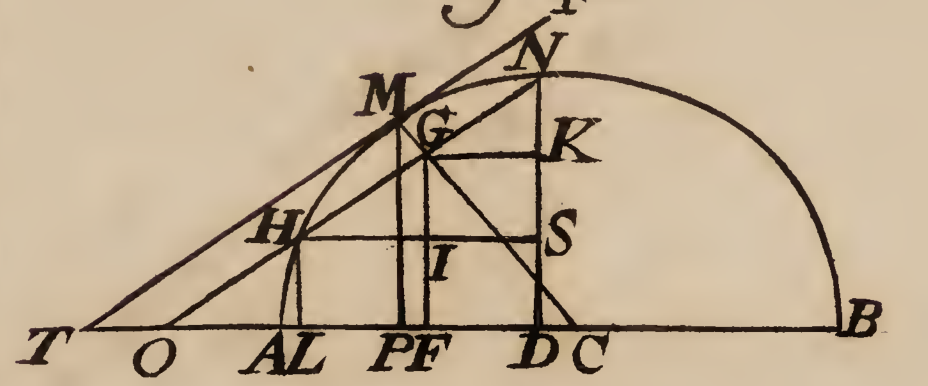


Fig: 48.

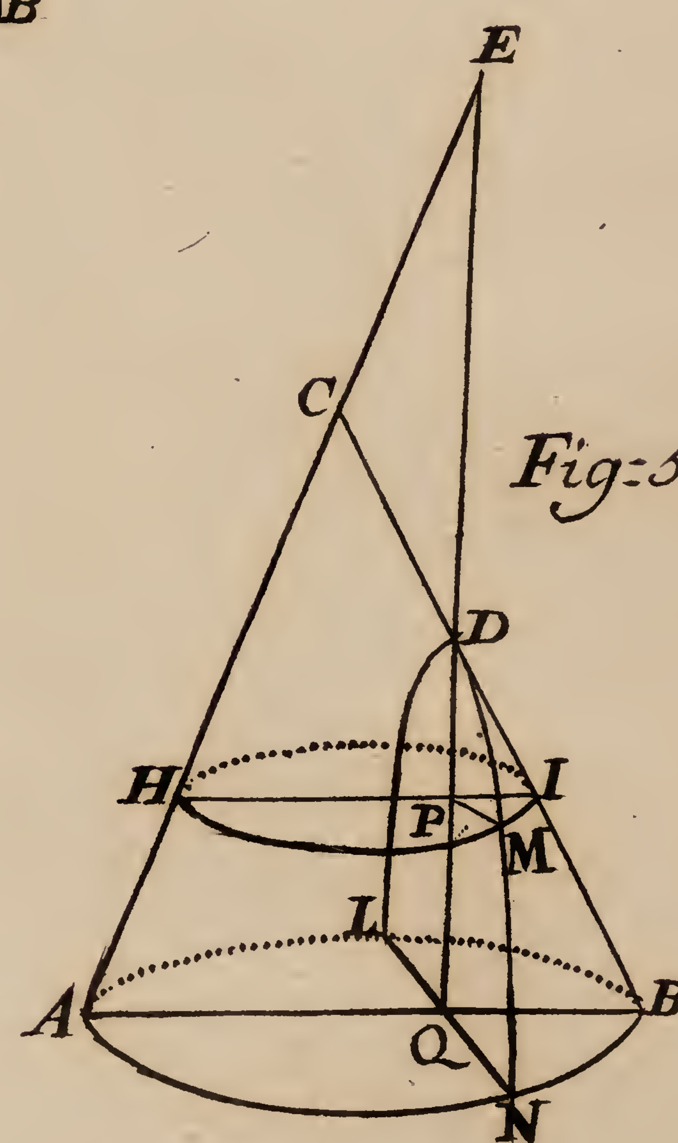


Fig: 57.

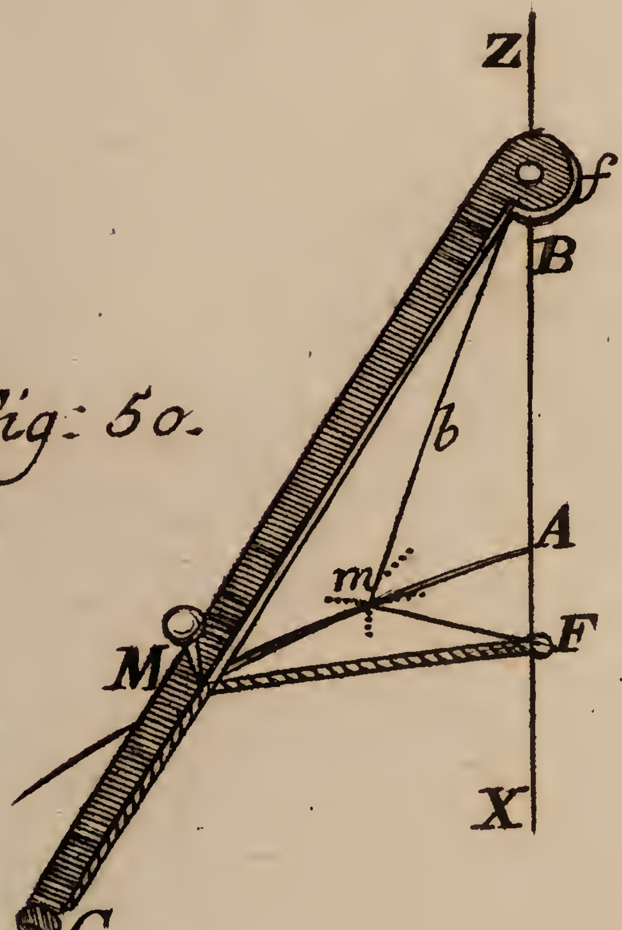


Fig: 50.

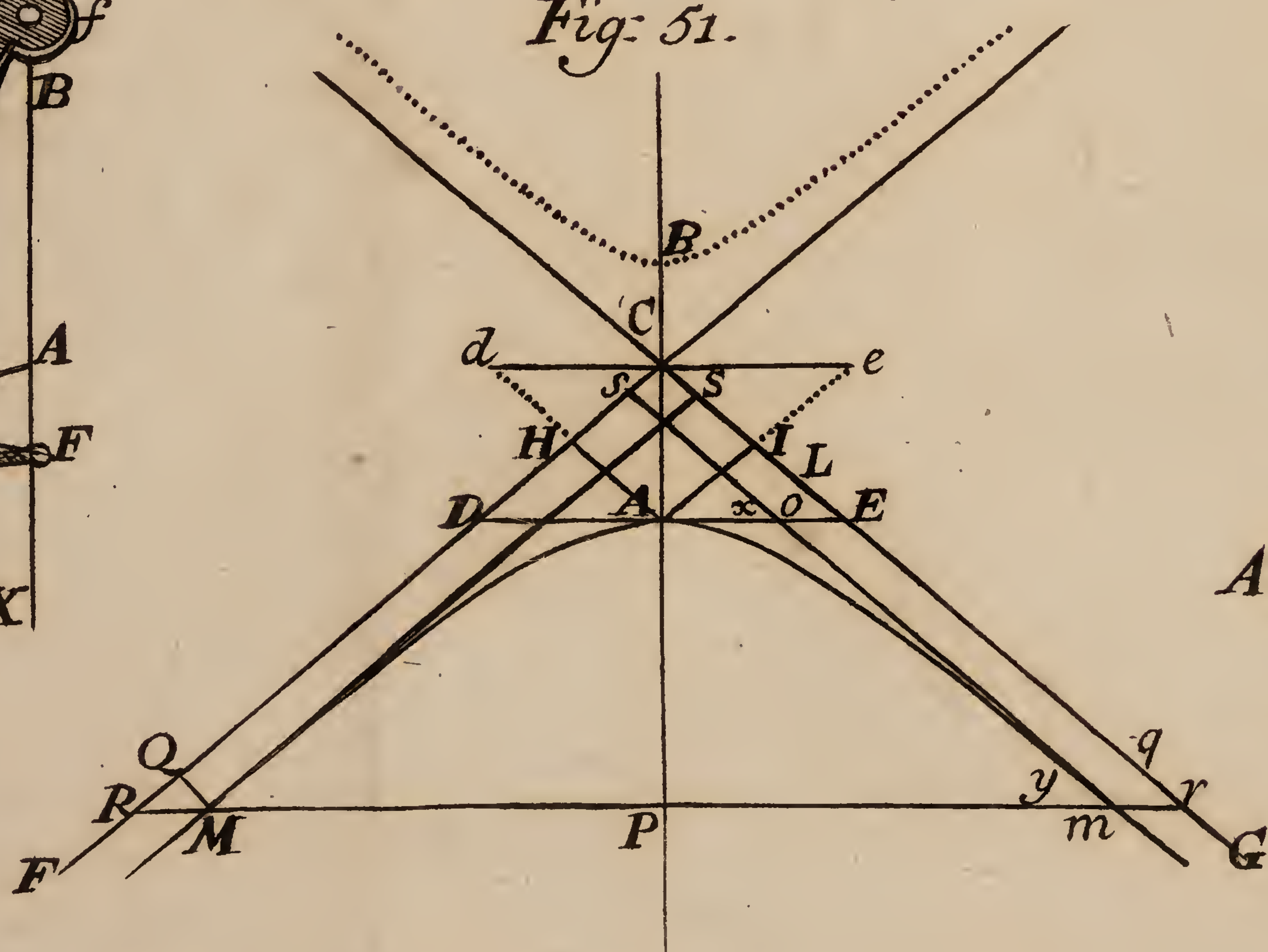


Fig: 51.

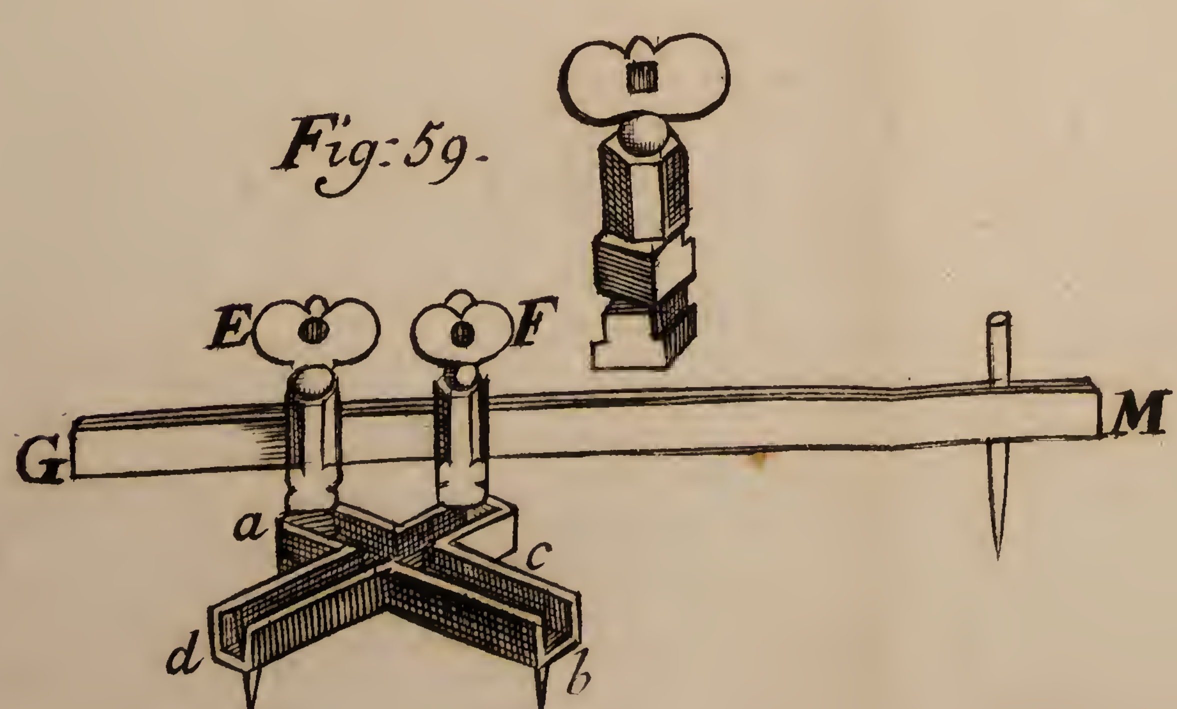


Fig: 59.

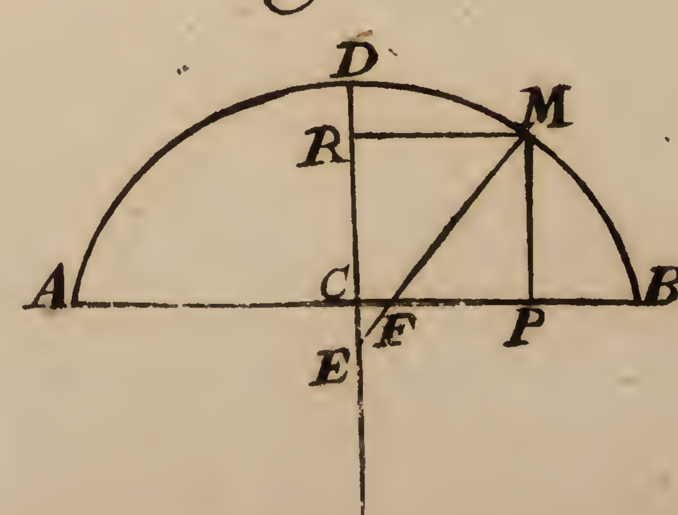


Fig: 58.

Fig: Algebr. Tab: V.

Fig: 52.

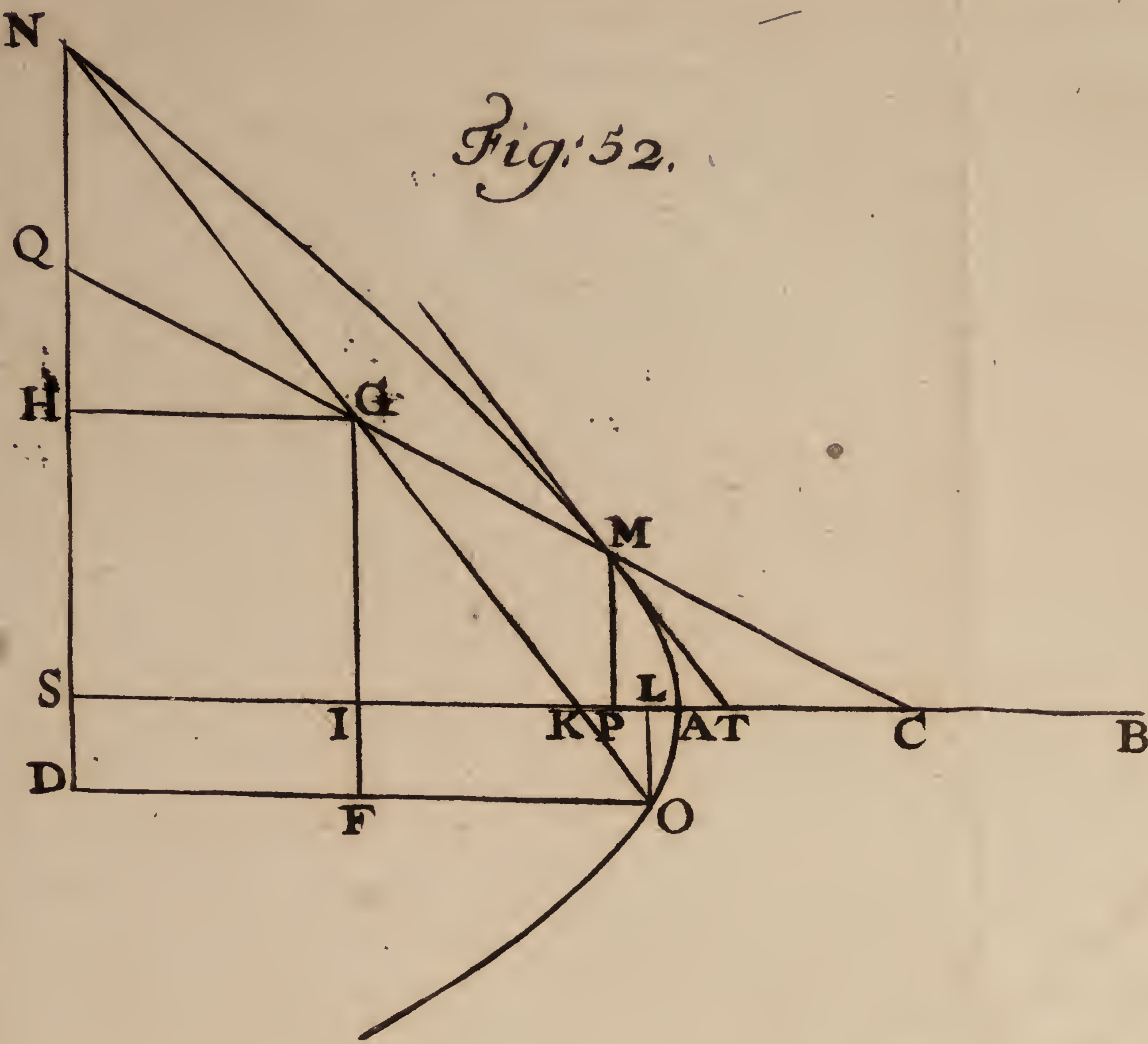


Fig: 53.

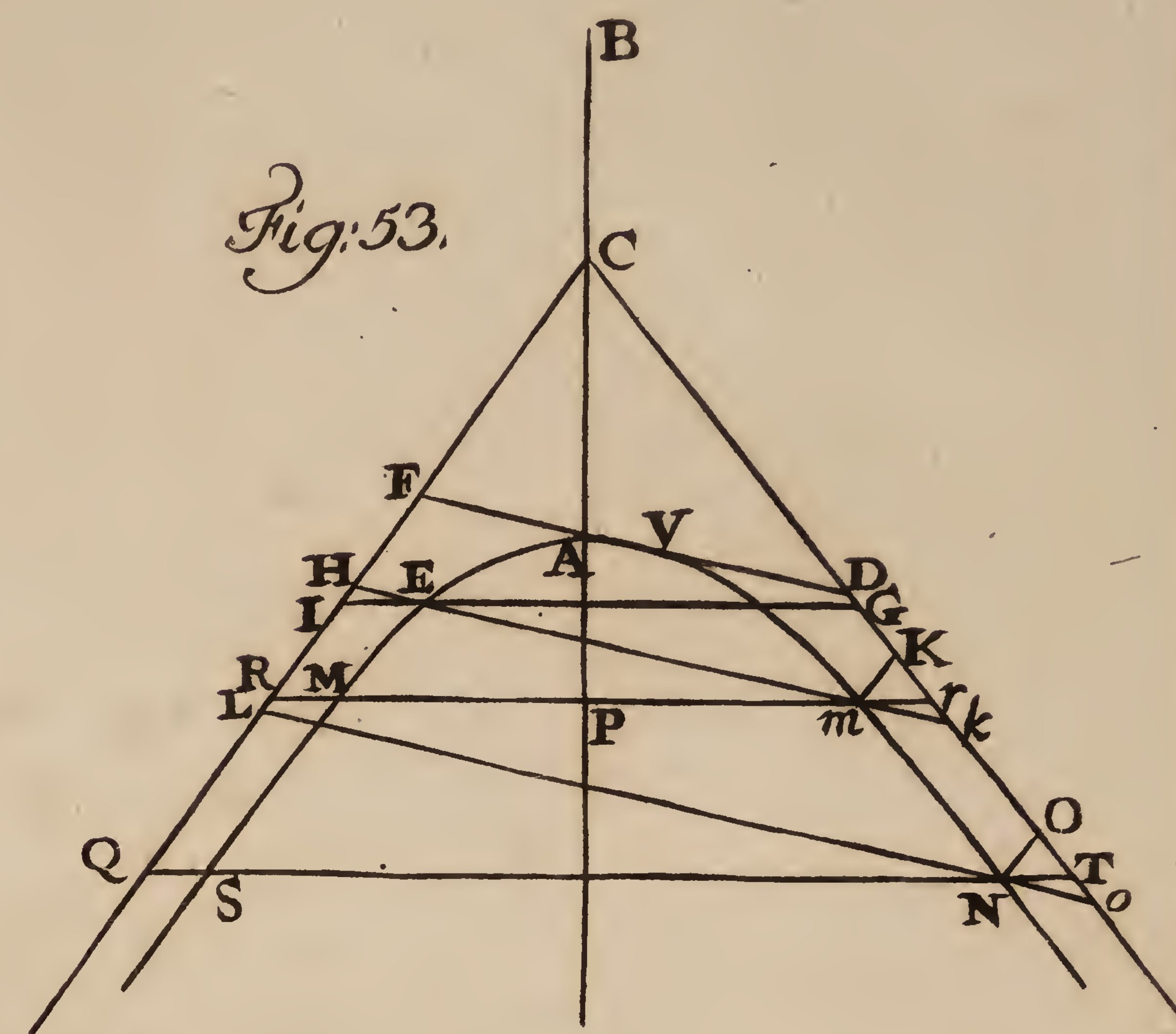


Fig: 54.

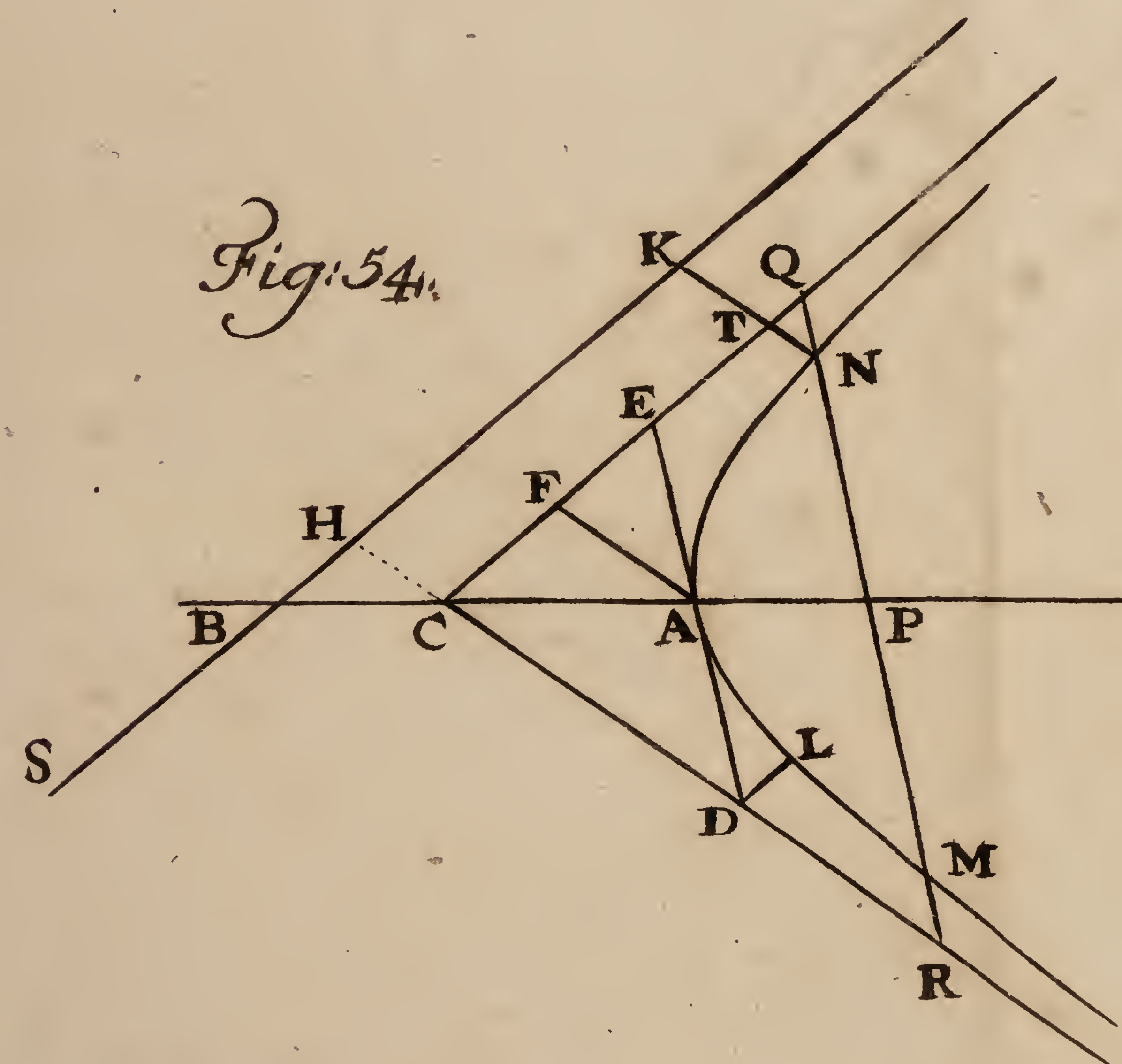


Fig: 55.

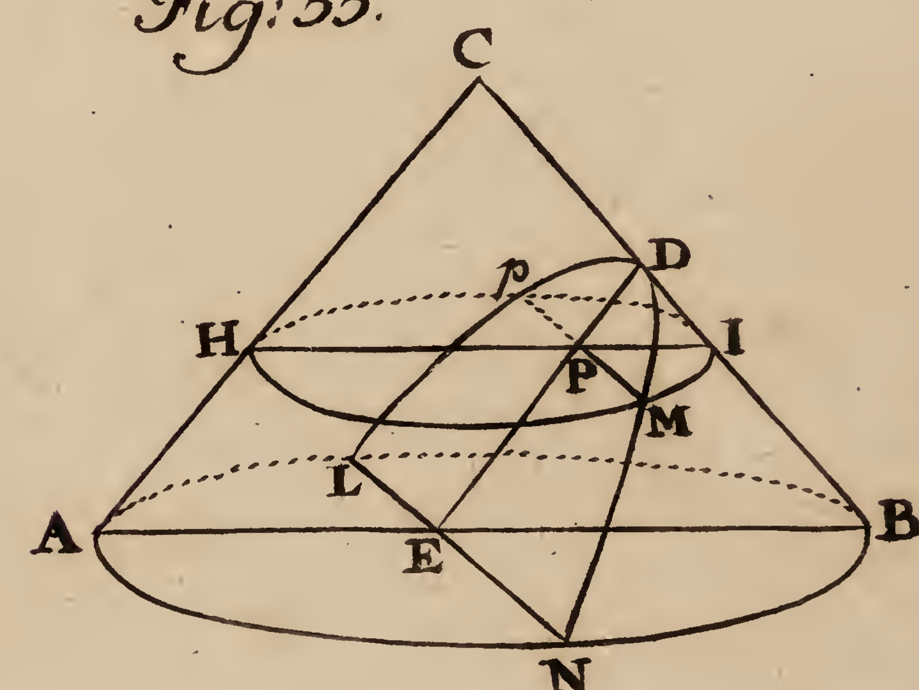


Fig: 56.

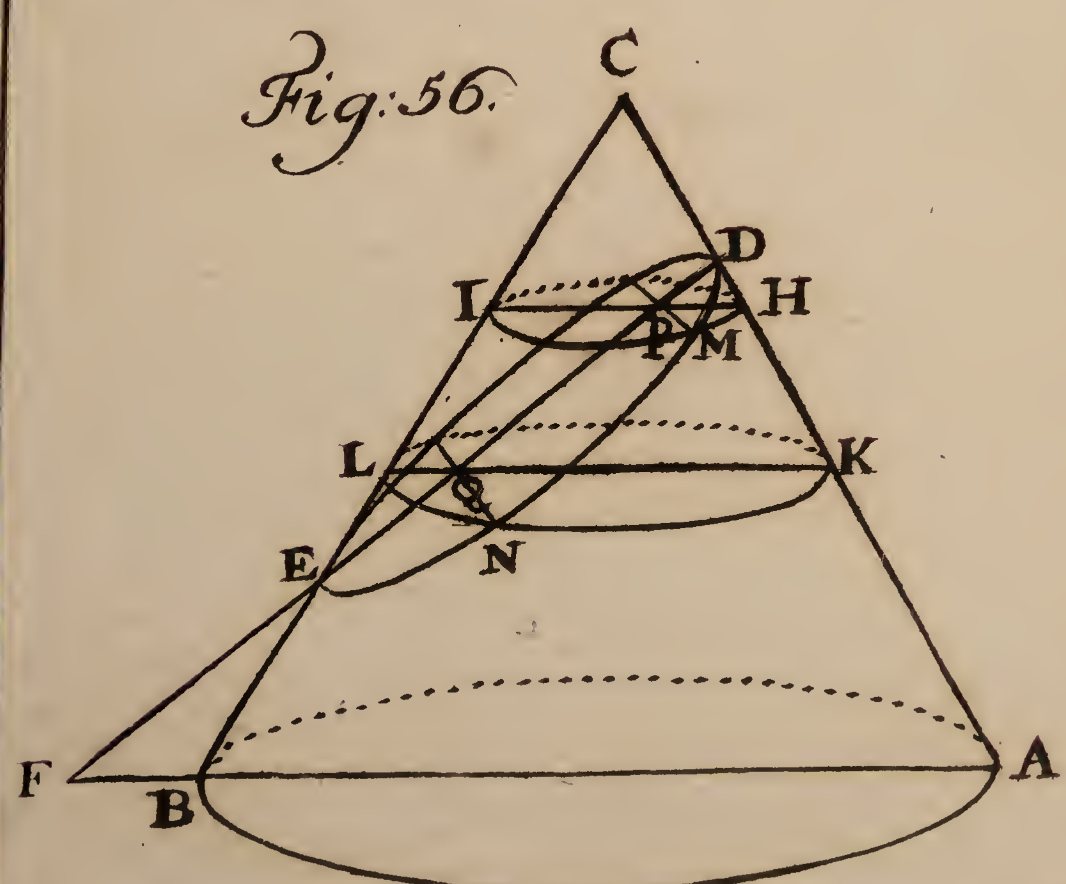
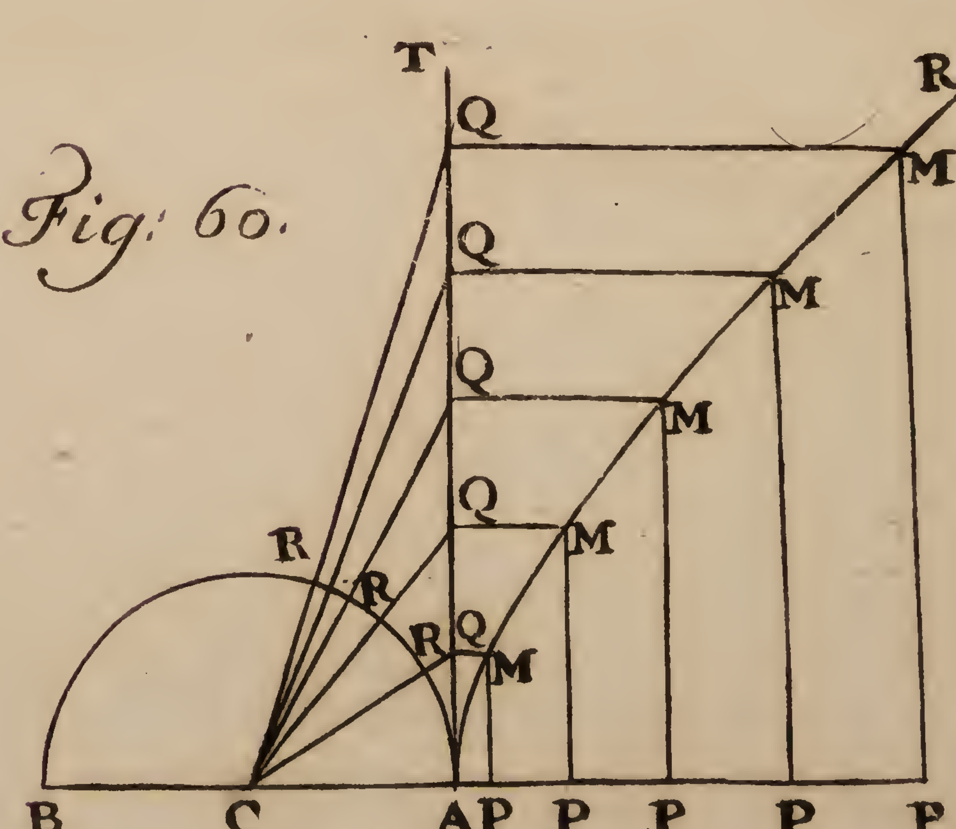


Fig: 60.



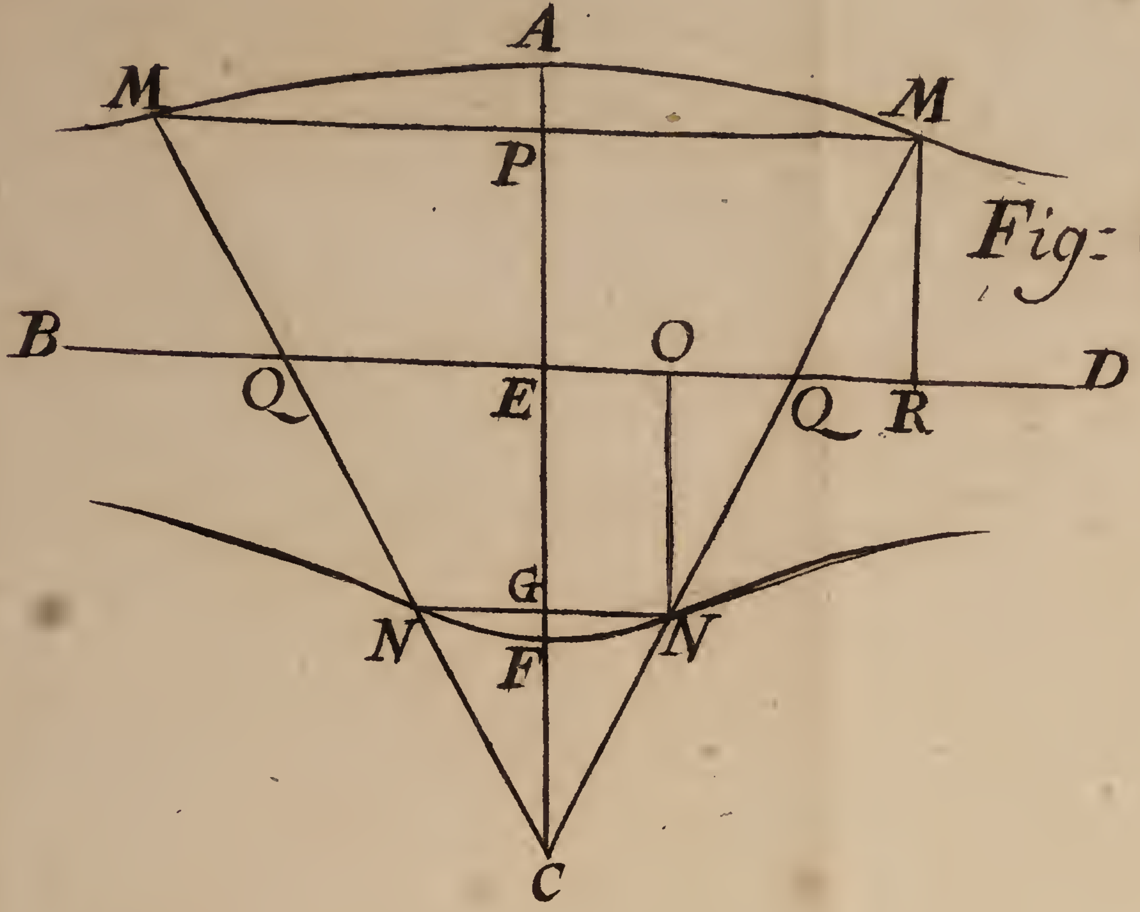


Fig: 61.

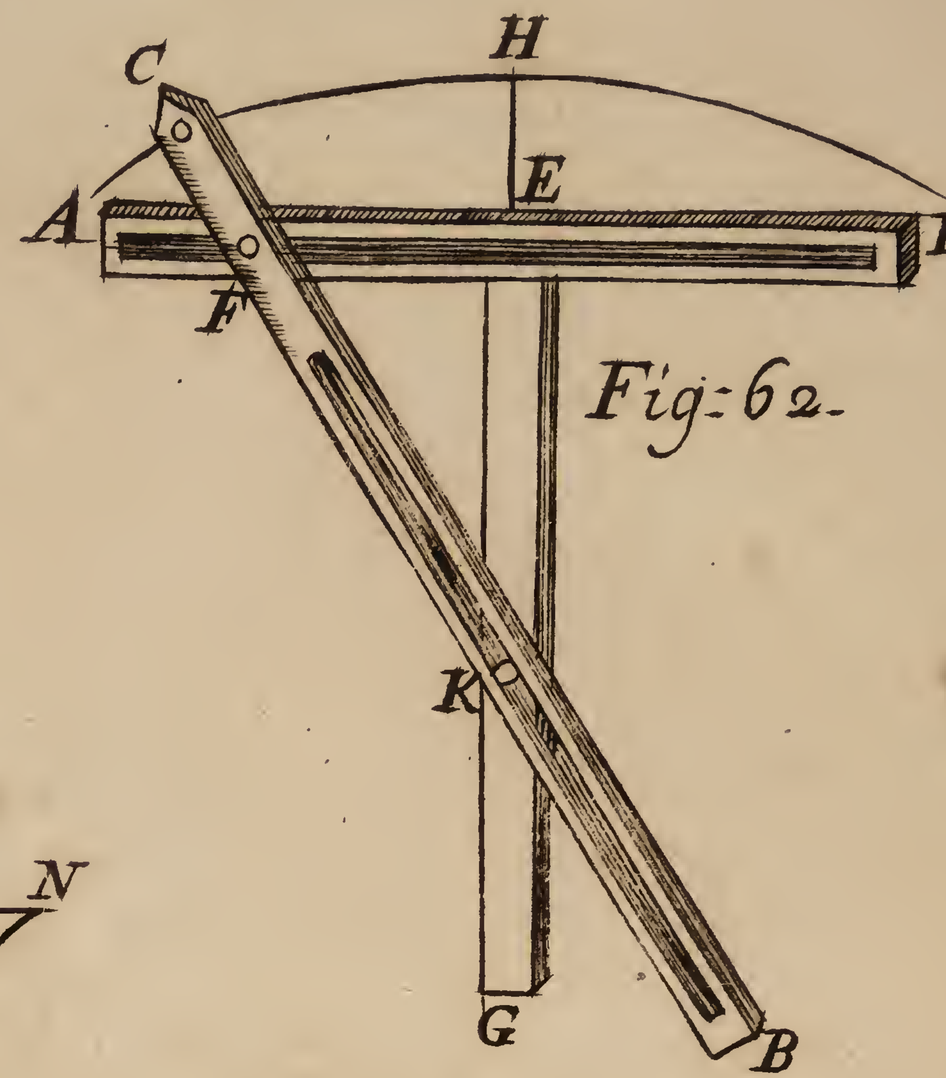


Fig: 62.

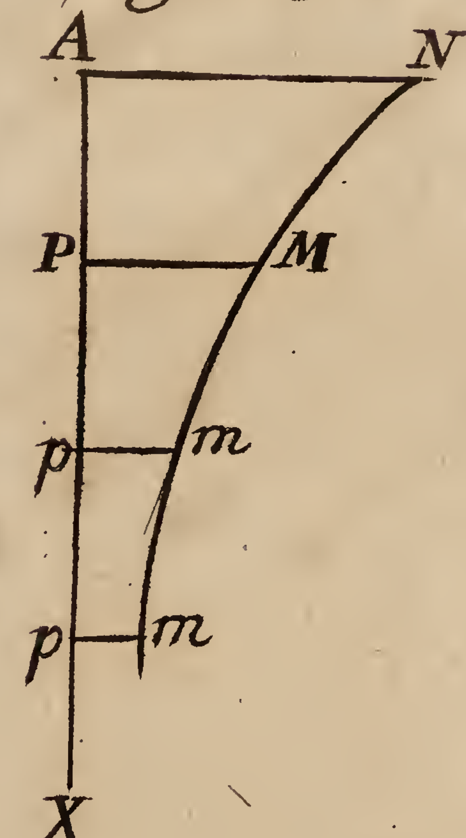


Fig: 64.

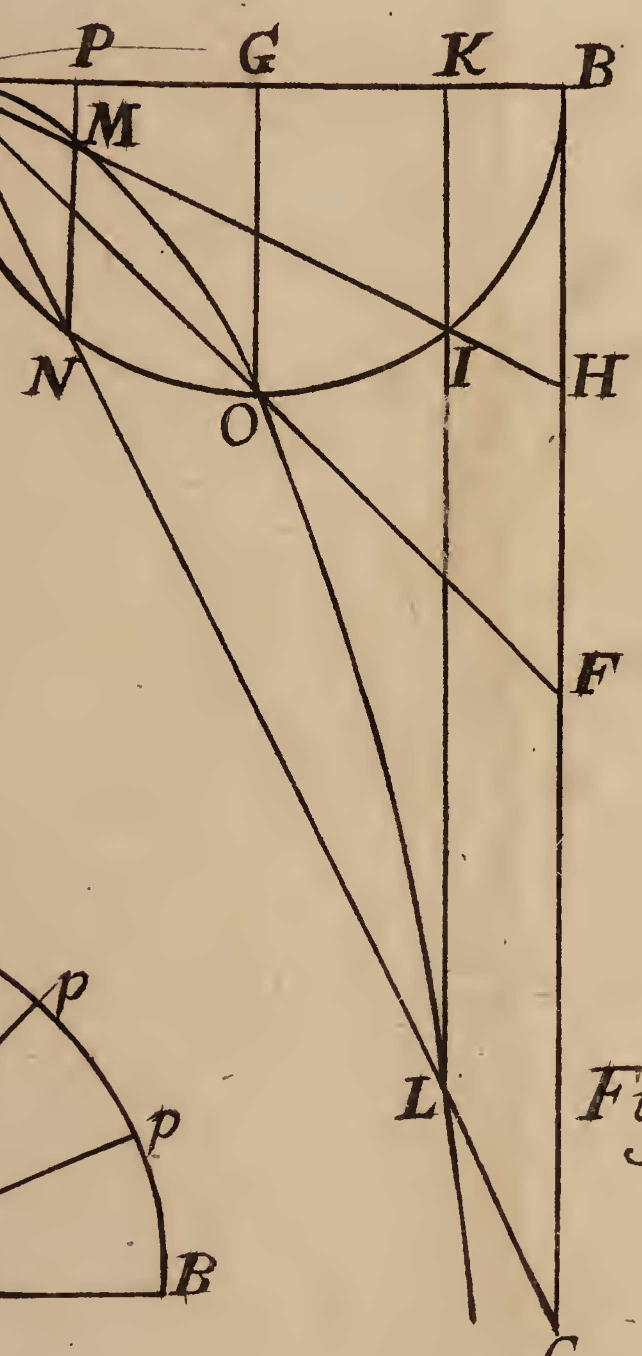


Fig: 63.

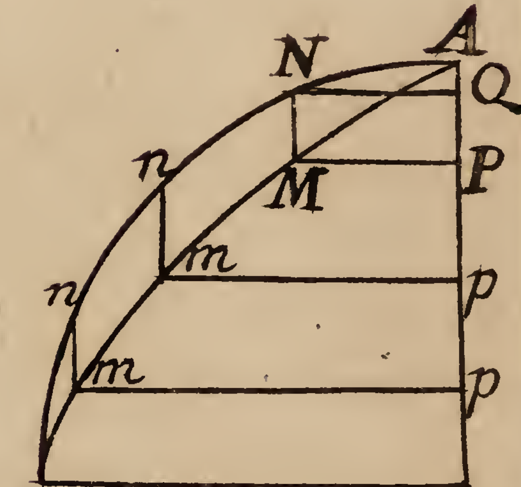
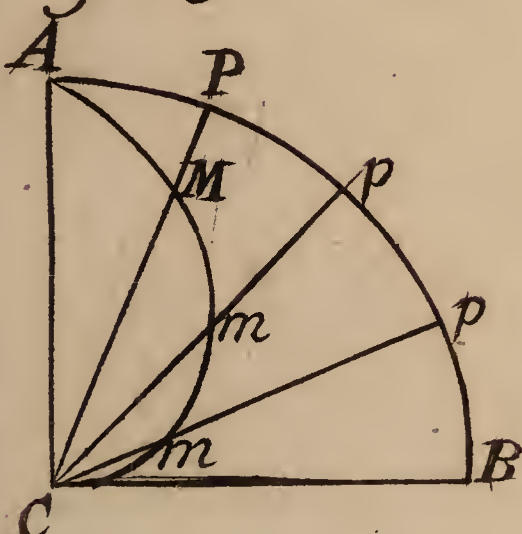


Fig: 68.

Fig: 65.



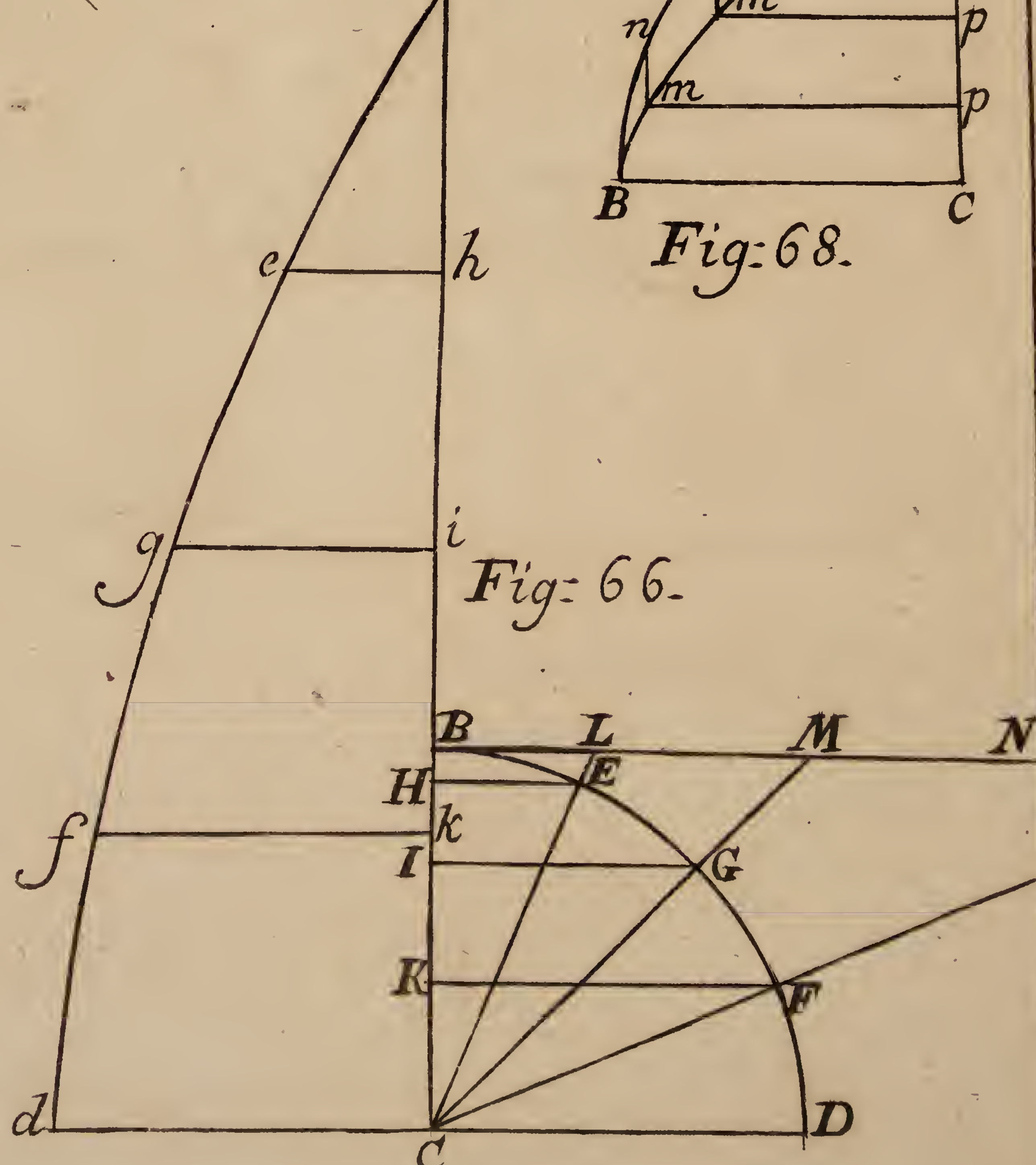


Fig: 66.

Fig: 67.

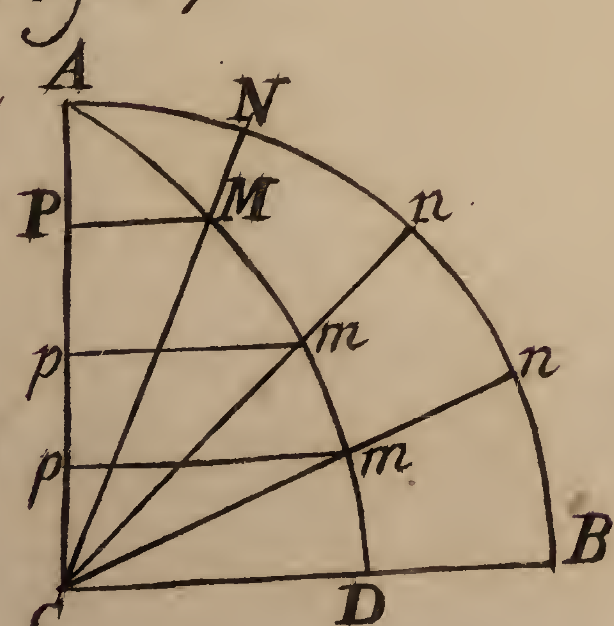


Fig. Algebr. Tab. VII.

Fig. 69.

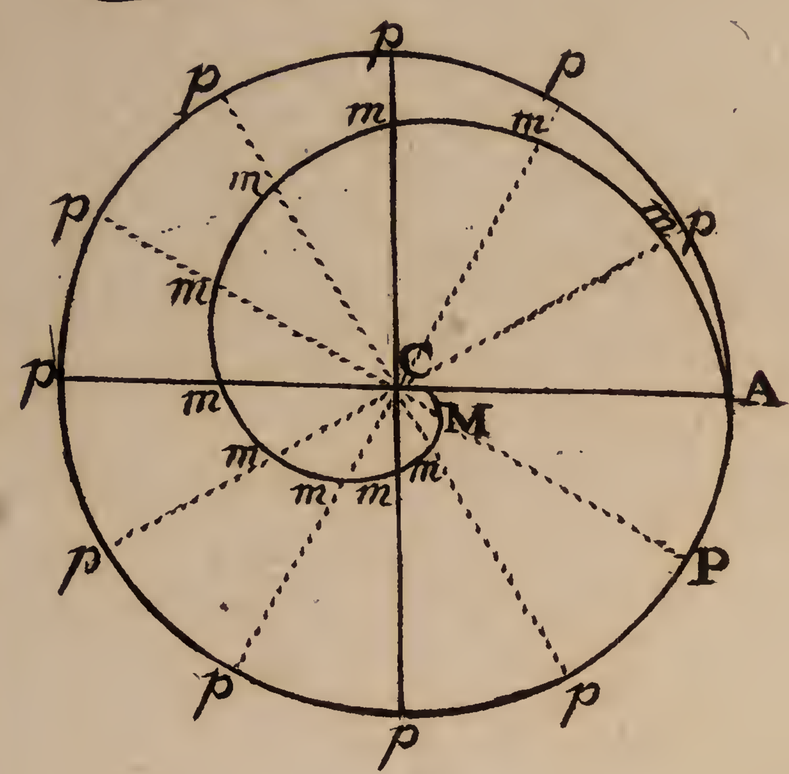


Fig. 70.

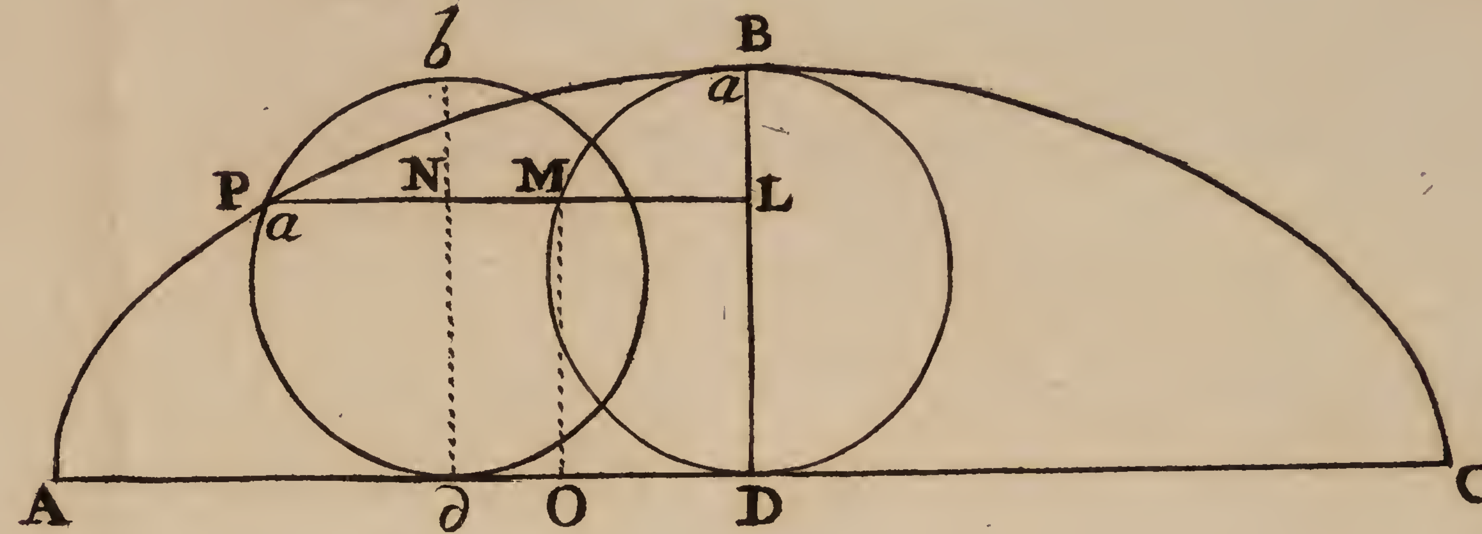


Fig. 71.

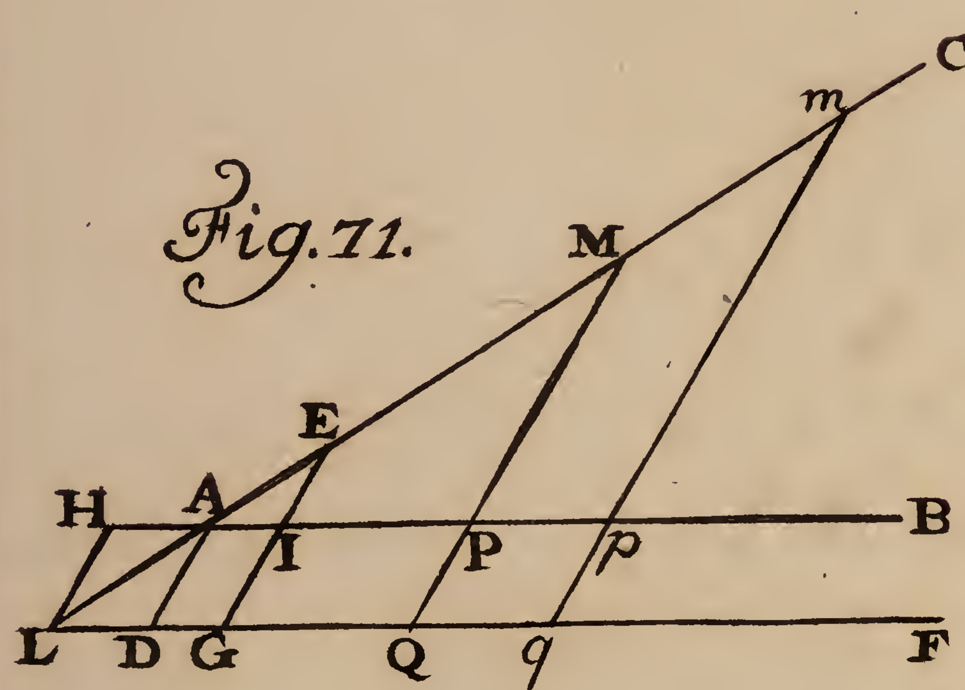


Fig. 72.

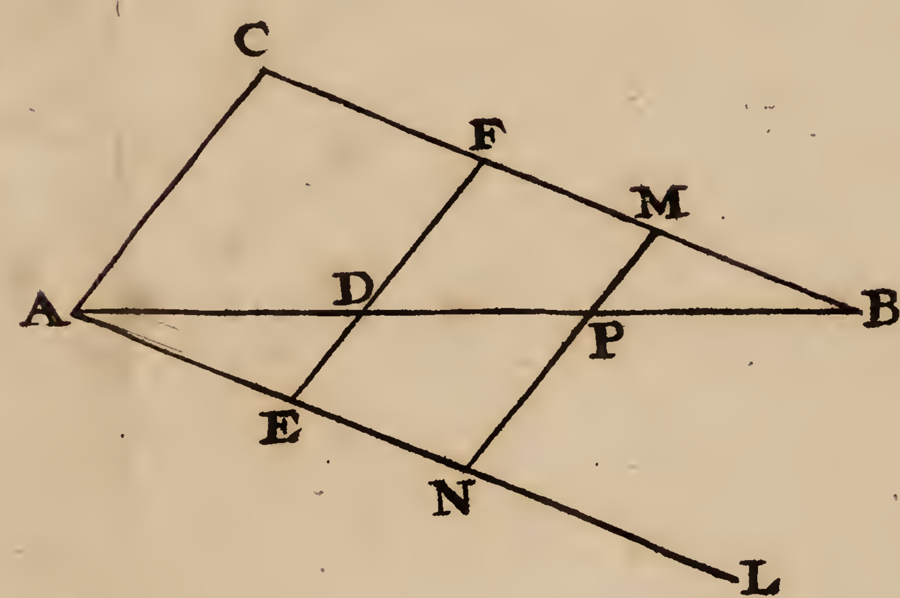


Fig. 73.

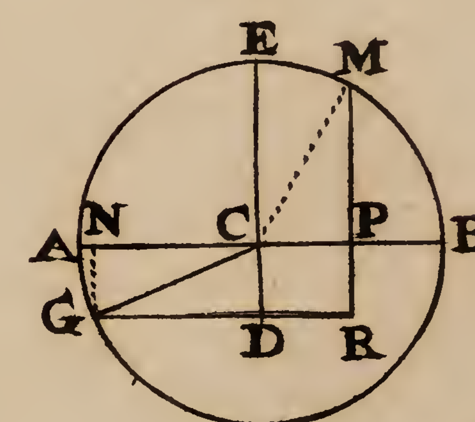


Fig. 74.

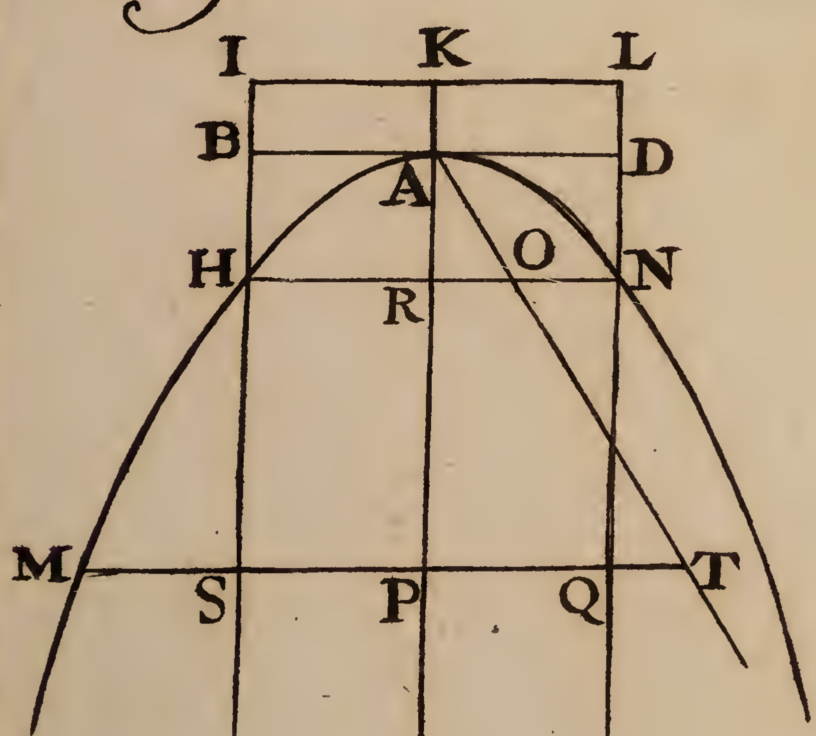


Fig. 75.

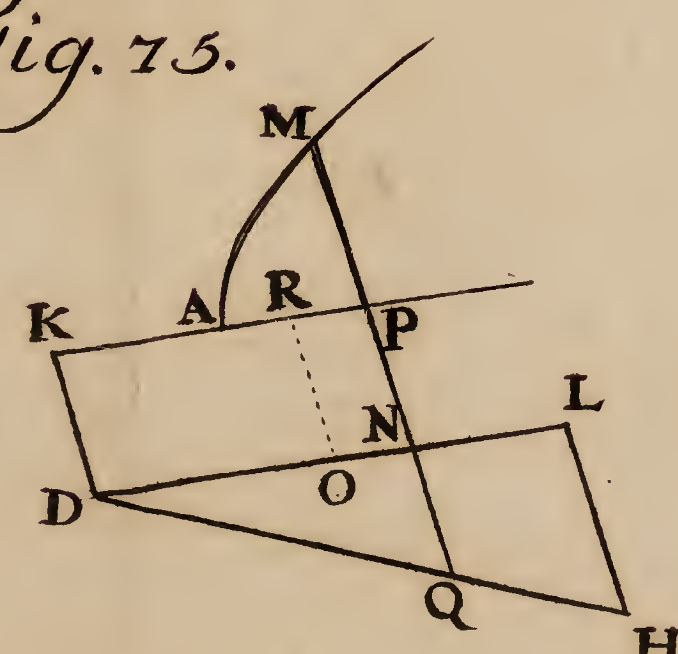


Fig. 76.

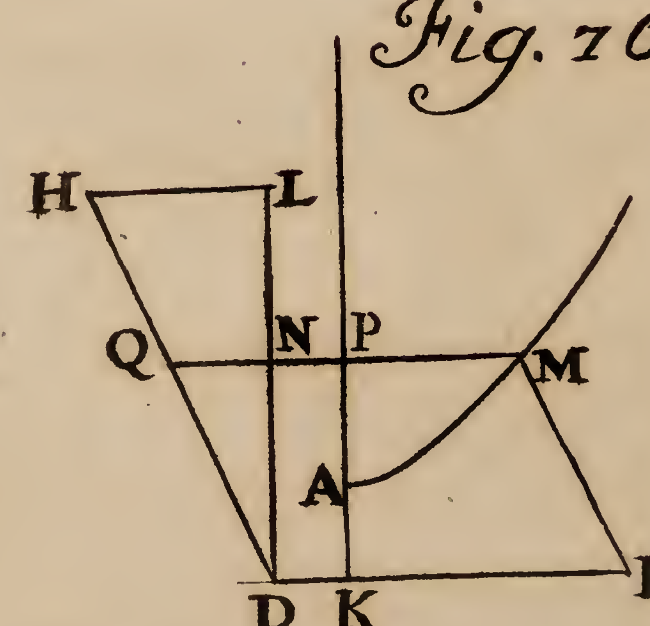


Fig. 77.



Fig. 78.

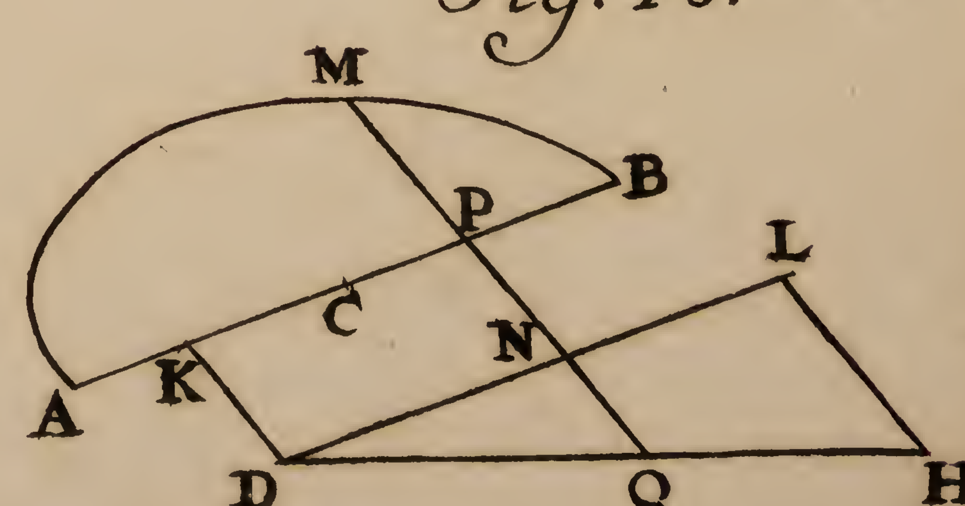


Fig. Algebr. Tab. VIII

Fig. 79.

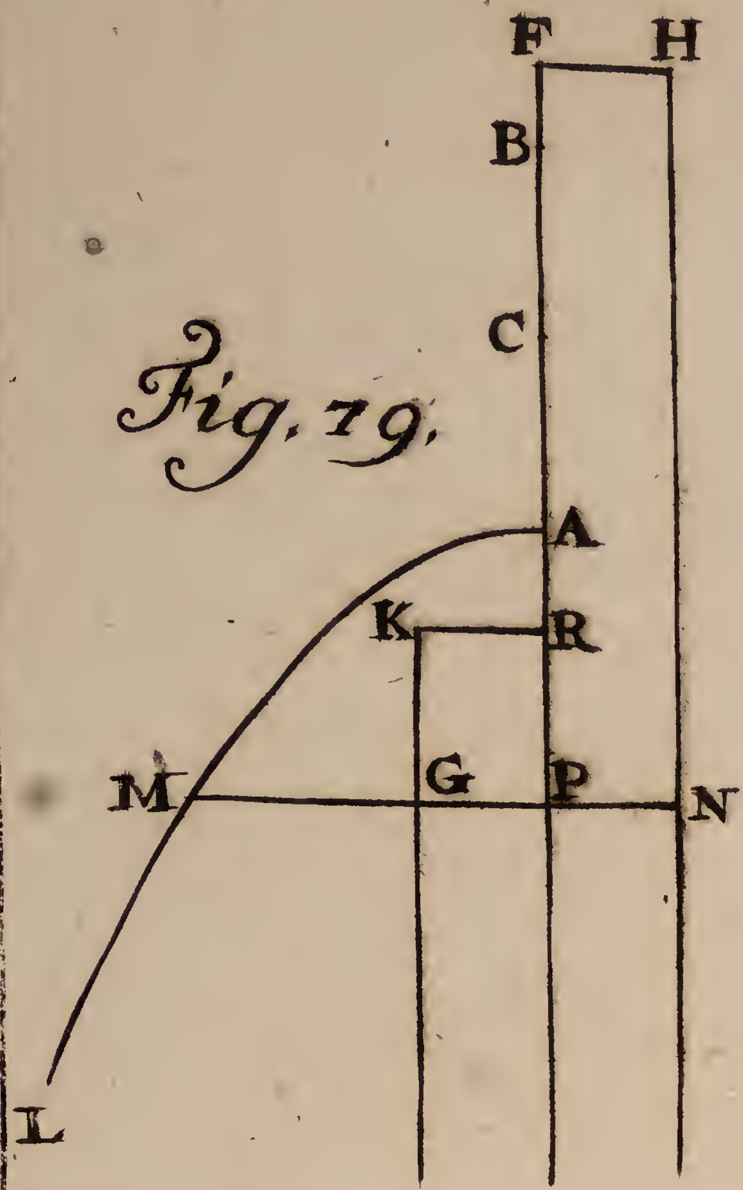


Fig. 80.

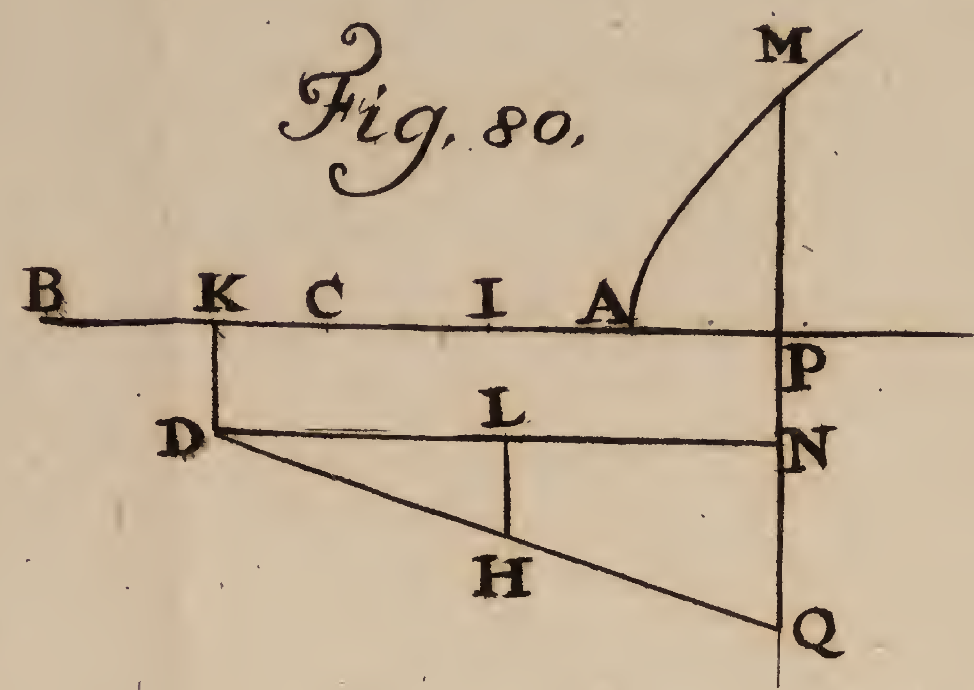


Fig. 81.

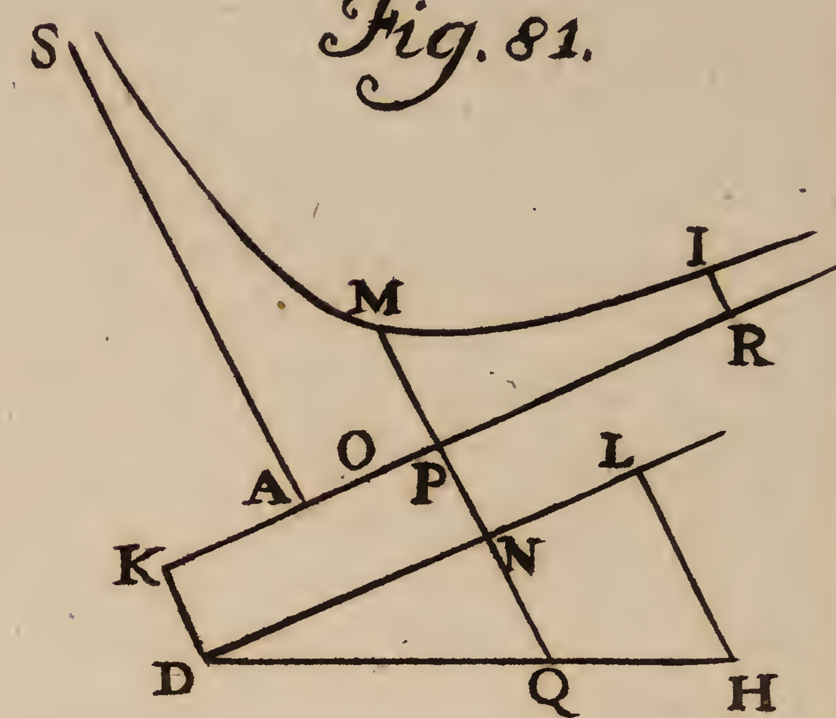


Fig. 82.

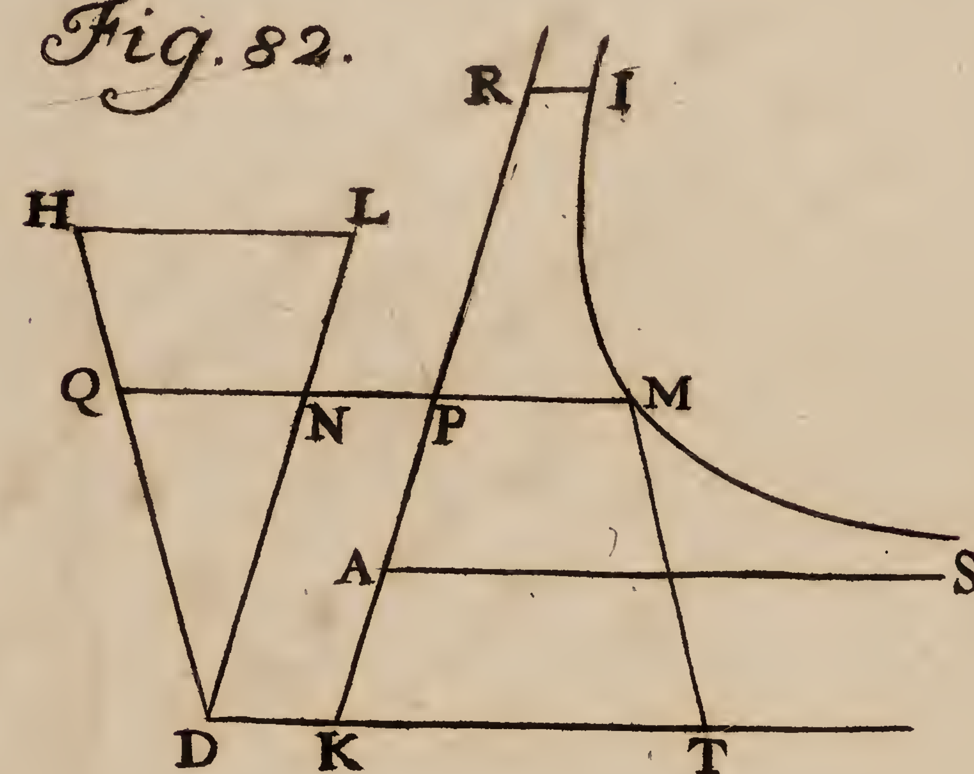


Fig. 83.

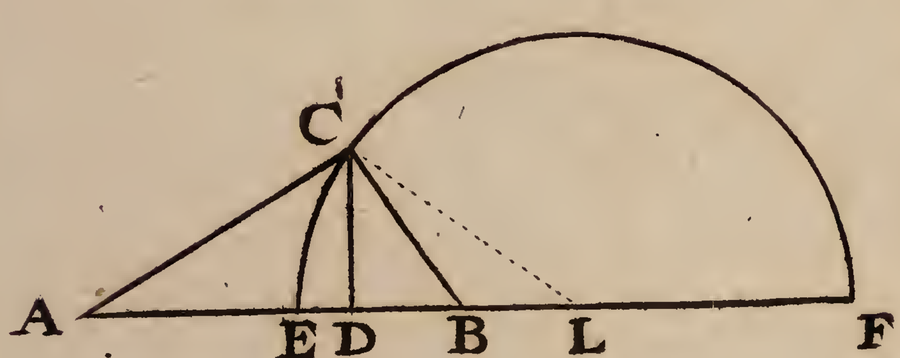


Fig. 84.

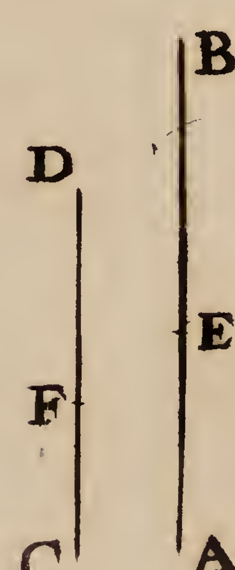


Fig. 85.

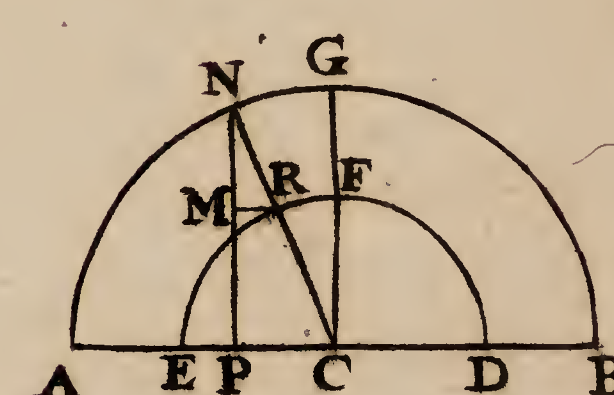


Fig. 86.

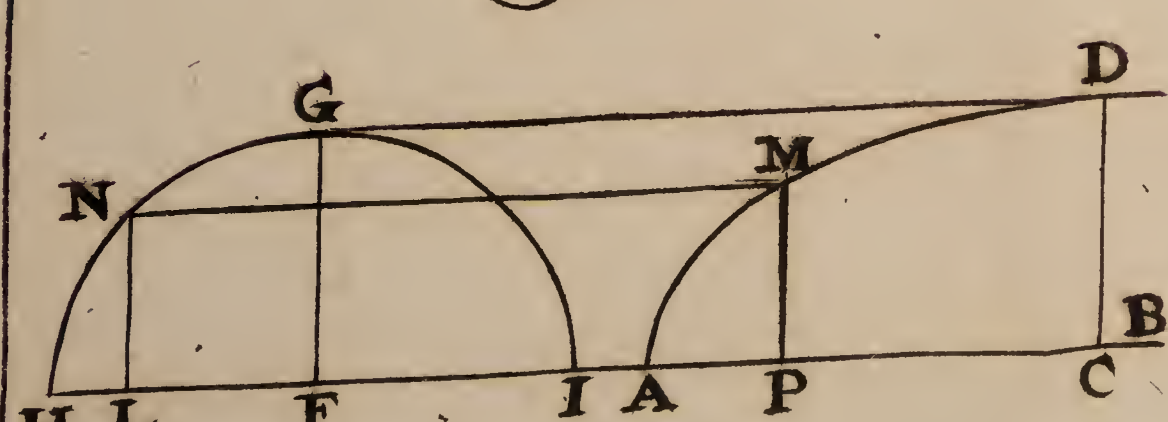


Fig. 87.

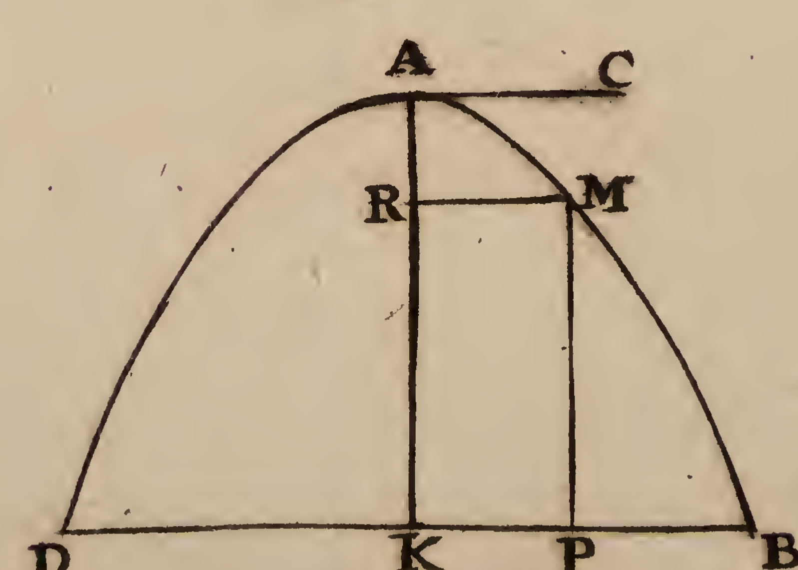


Fig. 88.

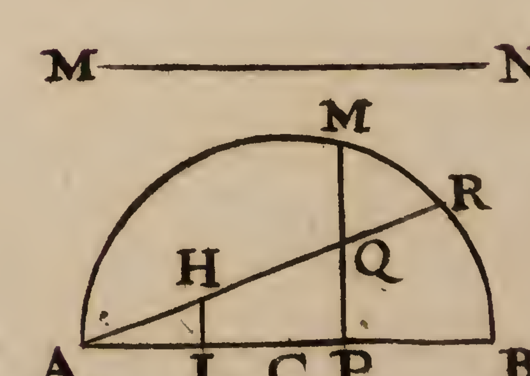


Fig: 89.

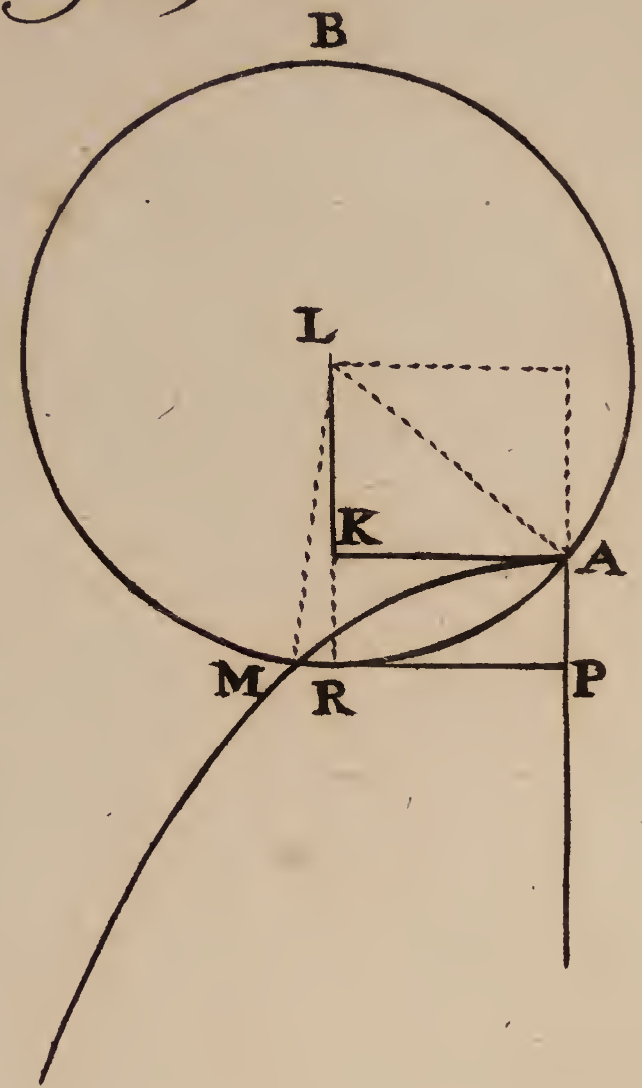


Fig: 90.

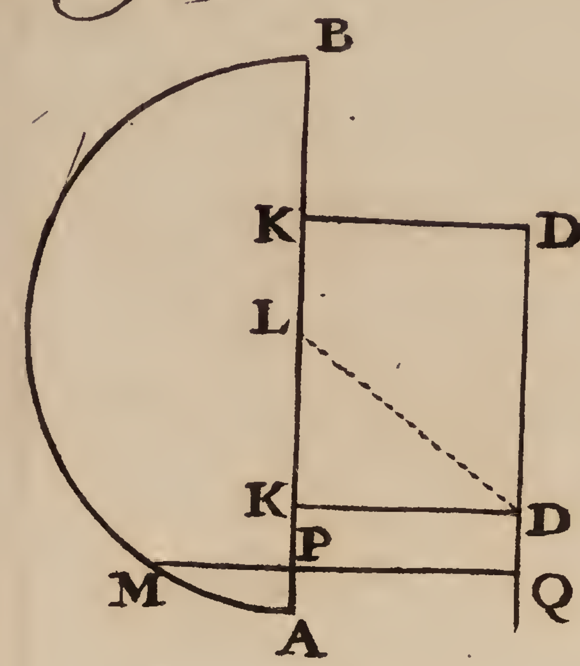


Fig: 91.

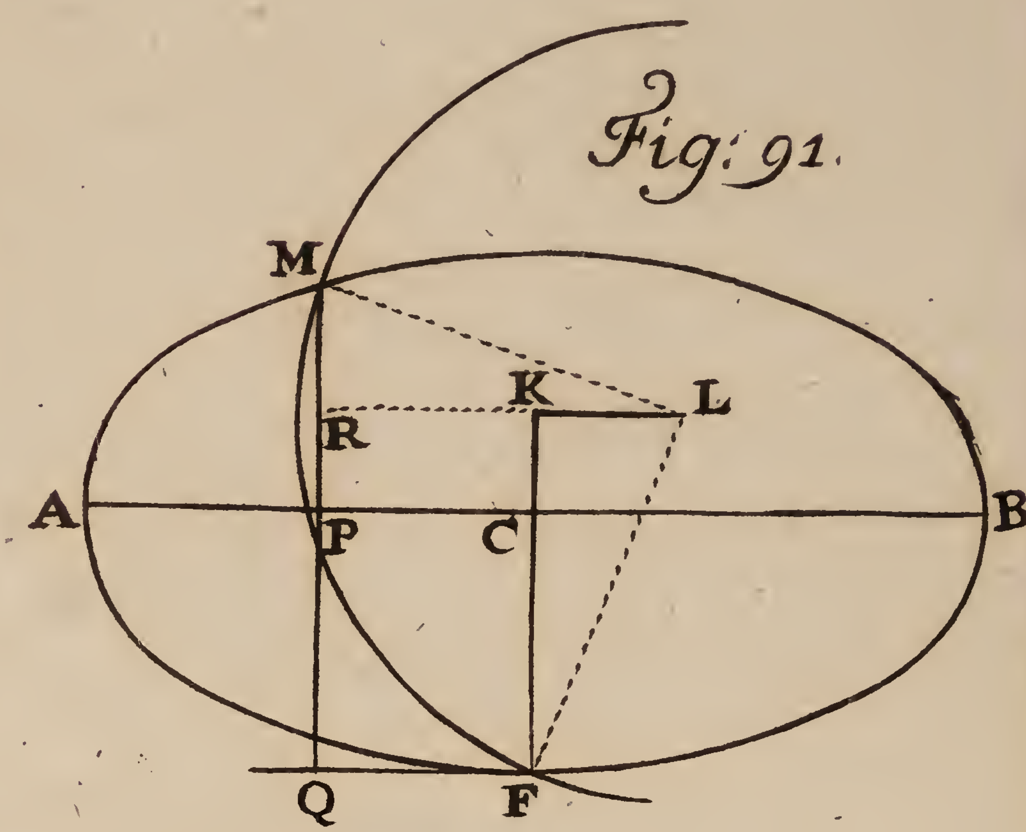


Fig: 92.

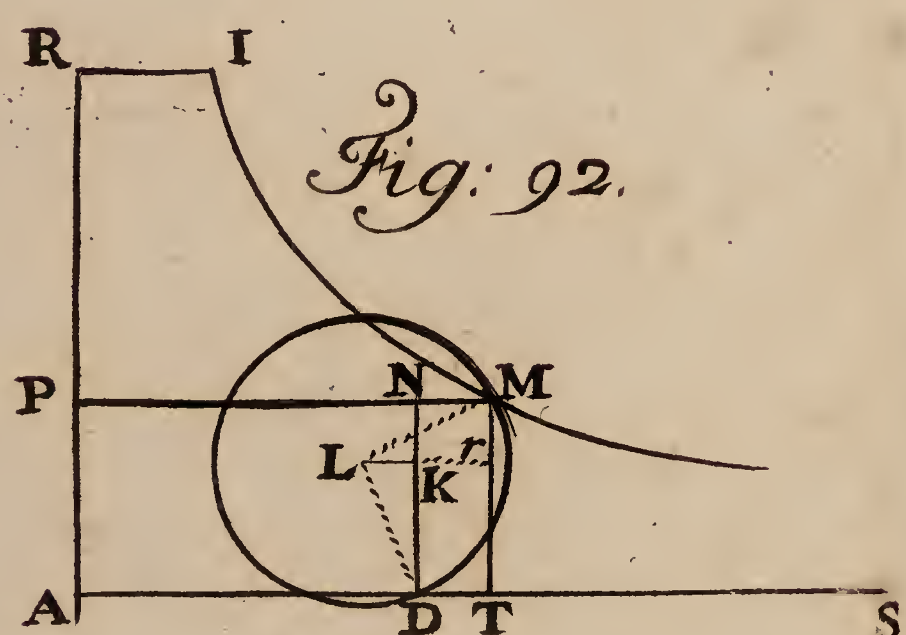


Fig: 93.

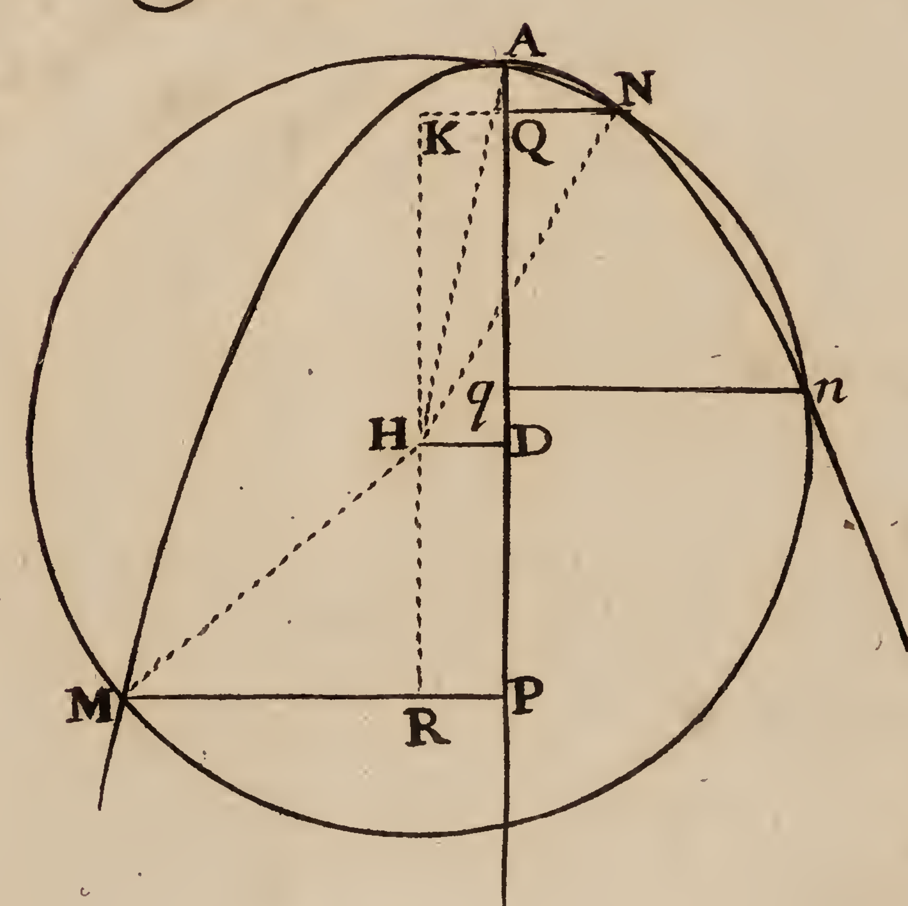


Fig: 94.

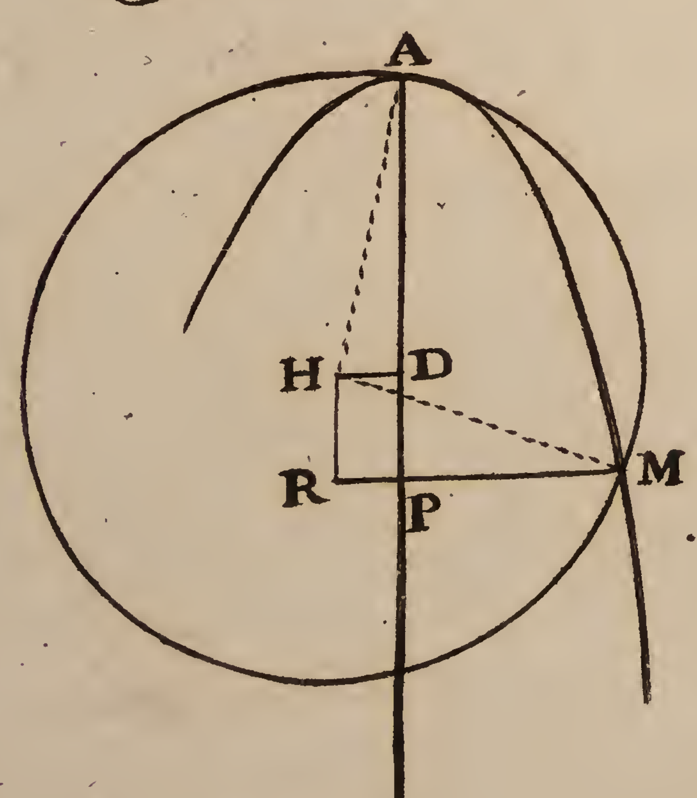


Fig: 95.

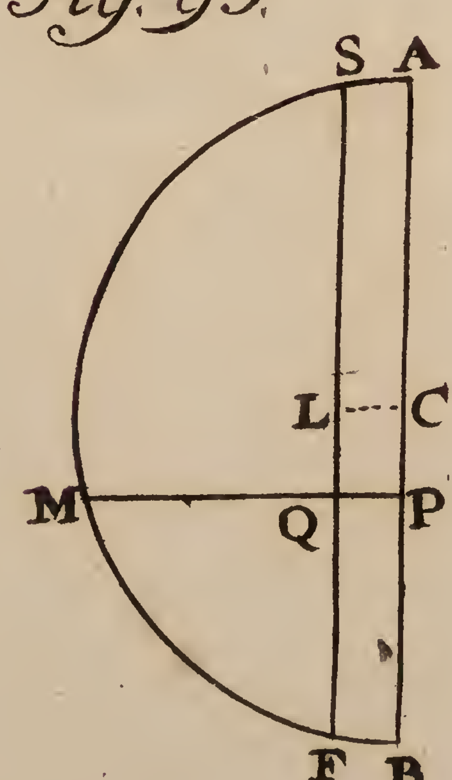


Fig: 96.

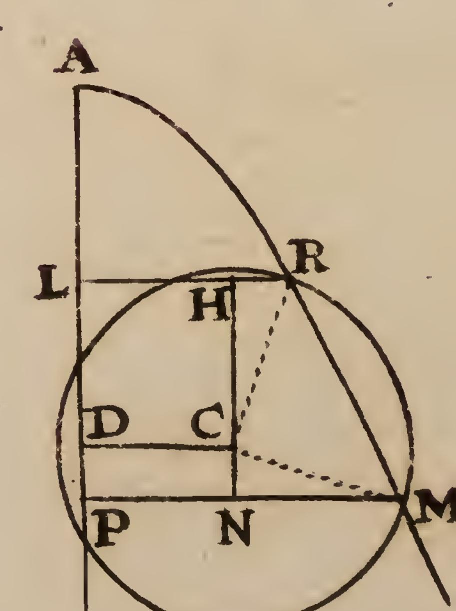


Fig: 97.

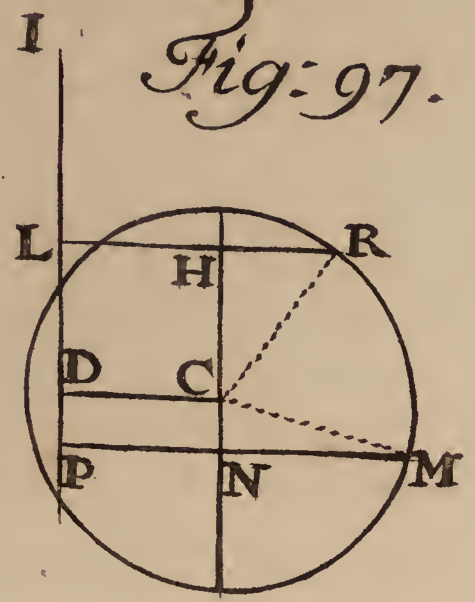


Fig: 98.

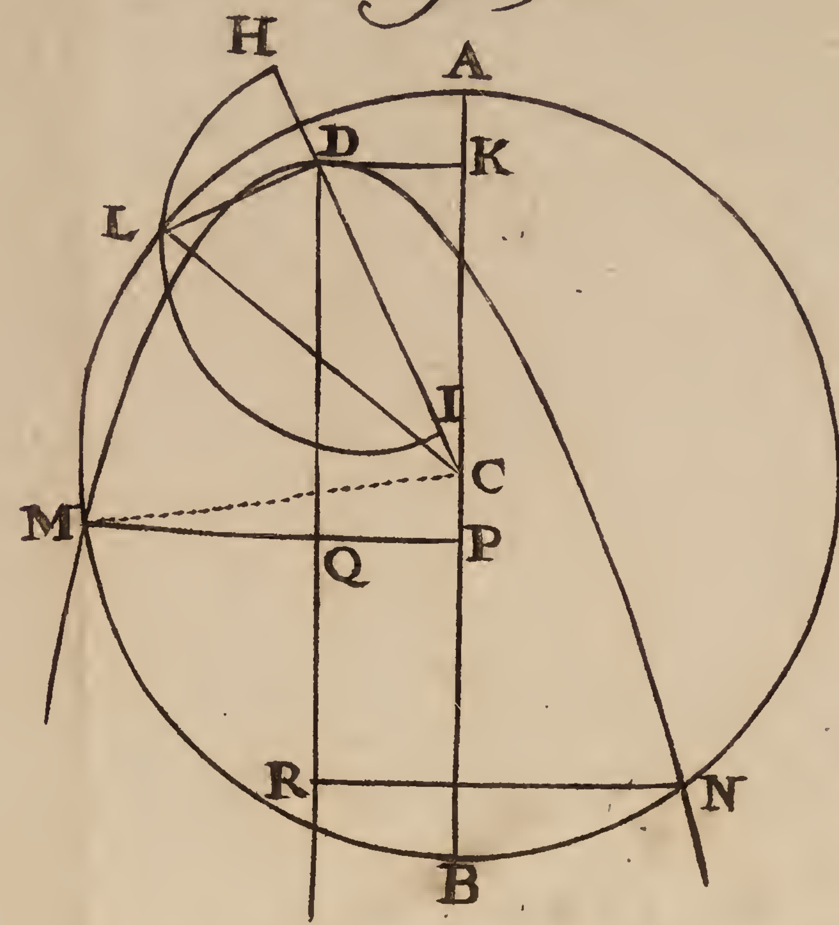


Fig: 99.

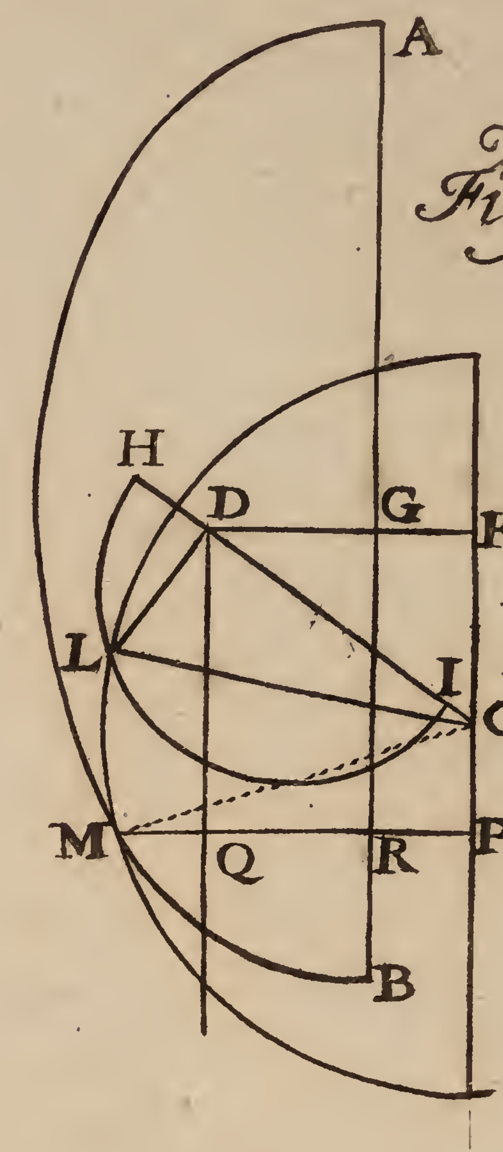


Fig: 100.

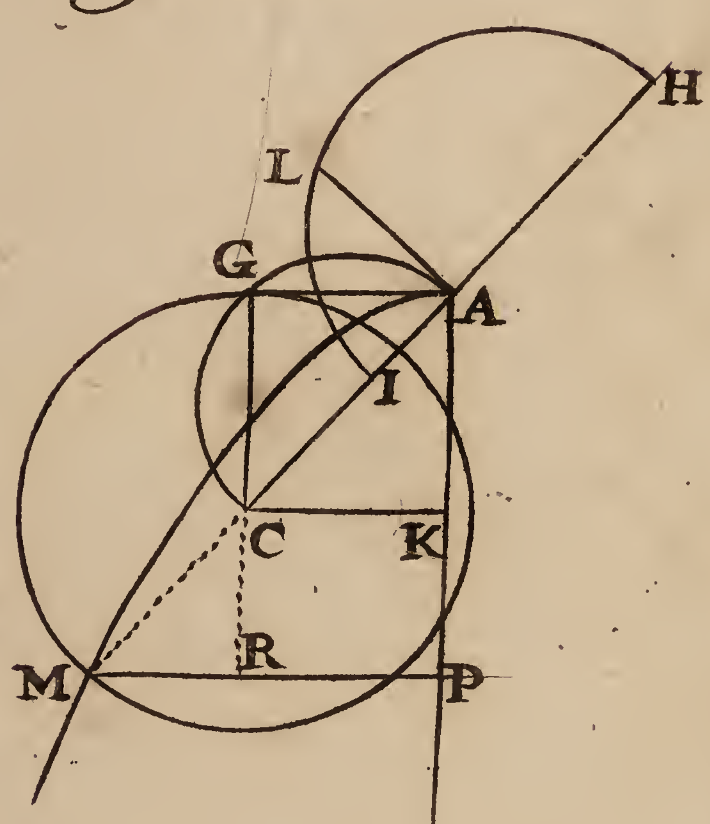


Fig: 101.

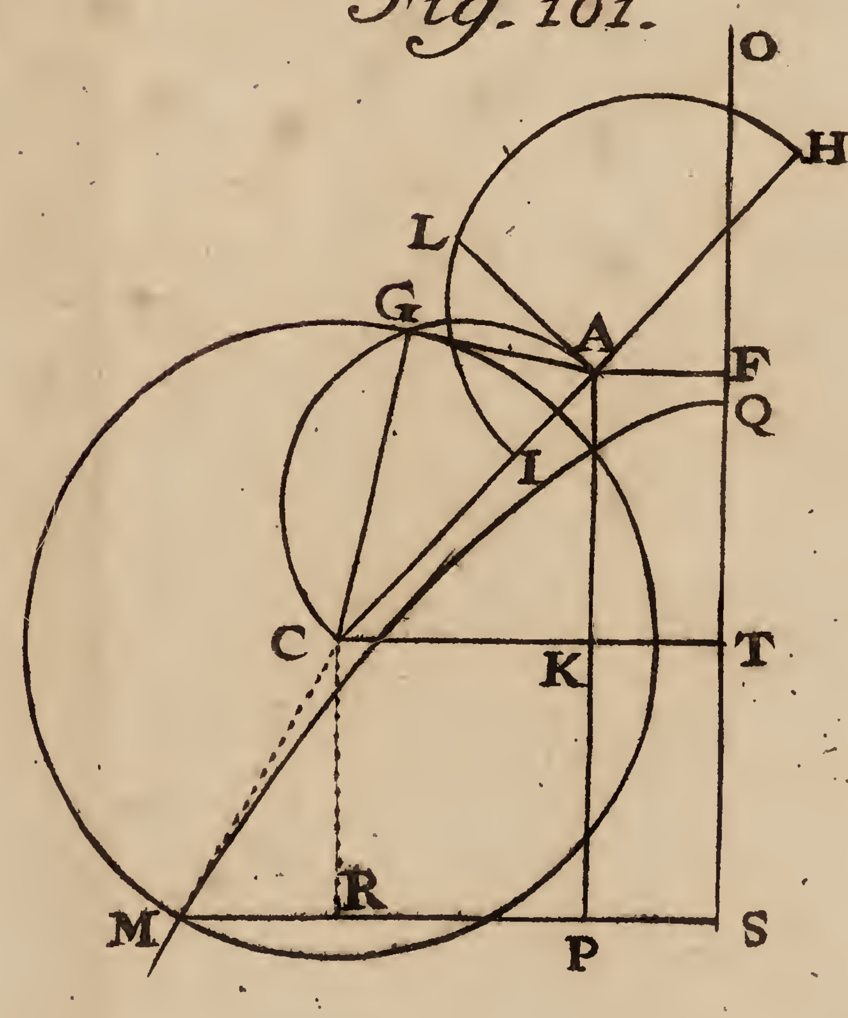


Fig: 102.

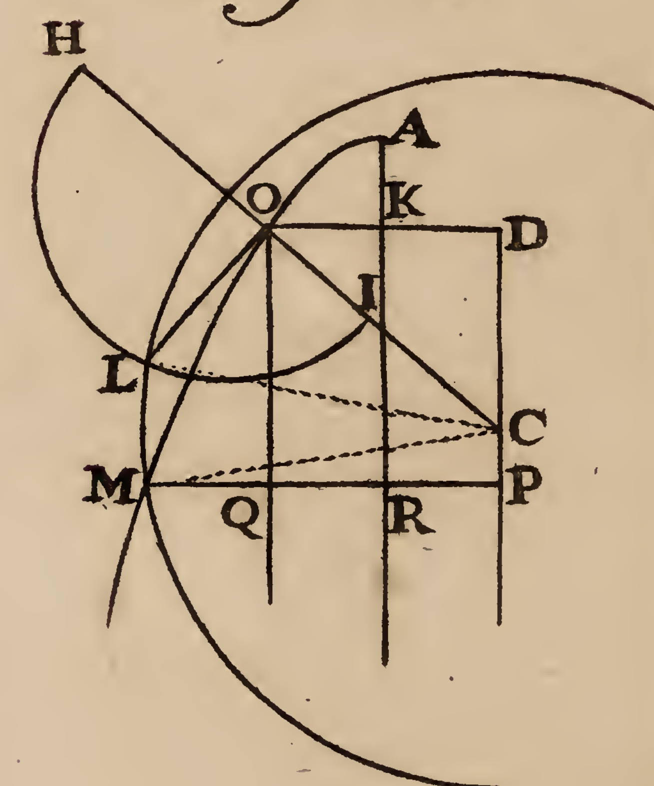


Fig: 103.

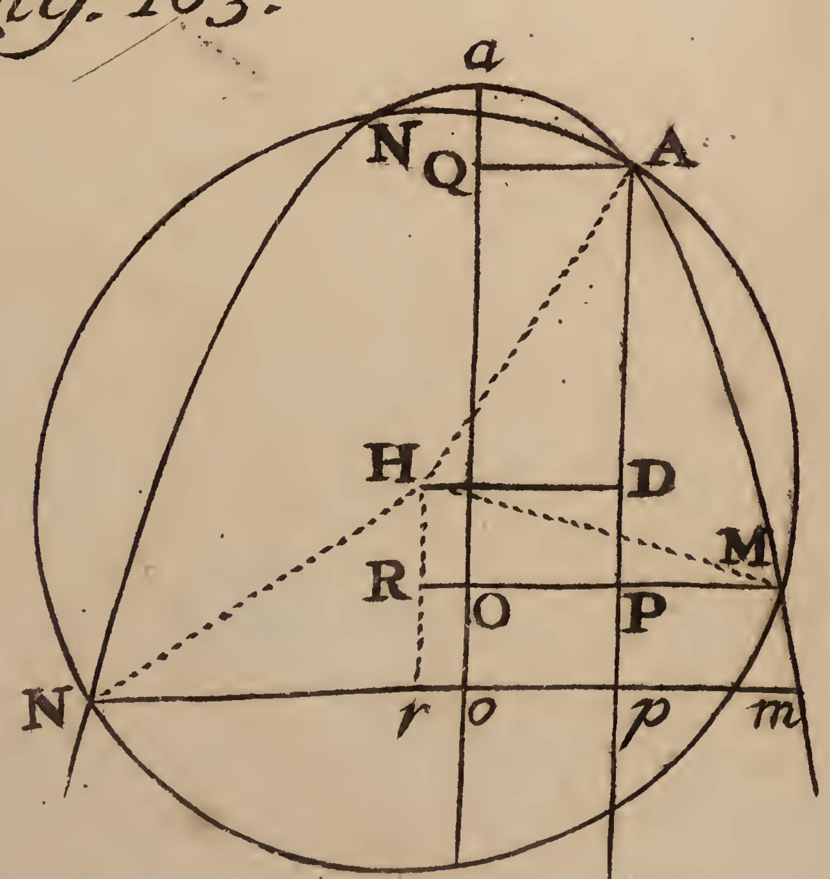


Fig: 104.

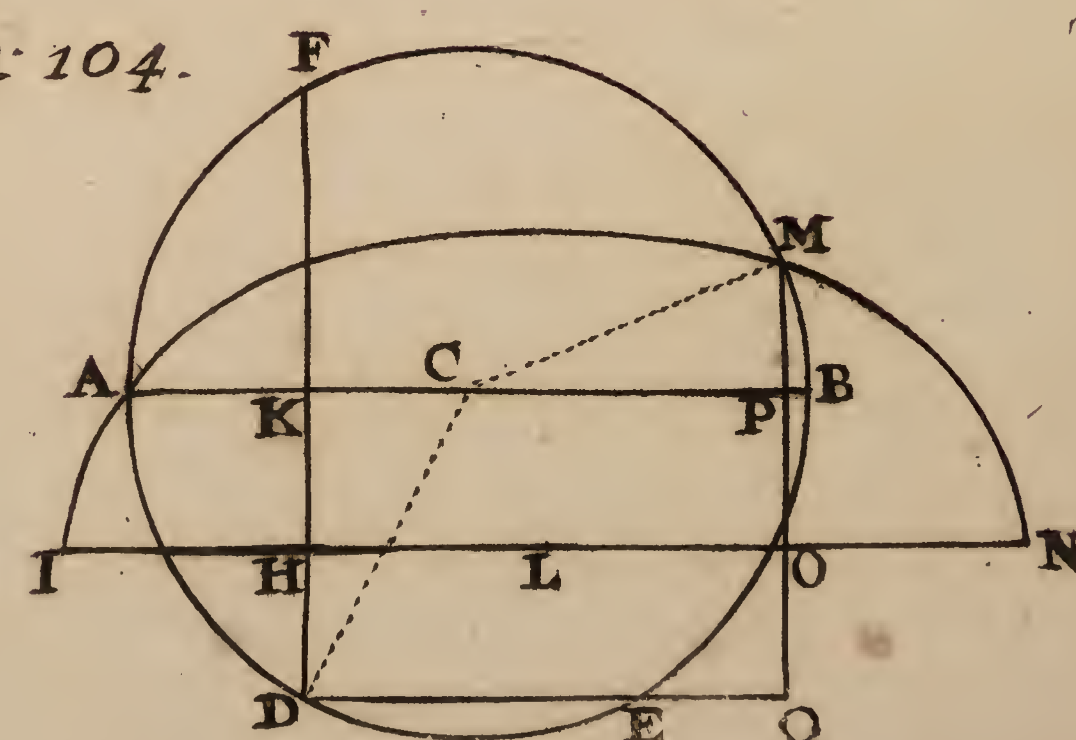


Fig: 105.

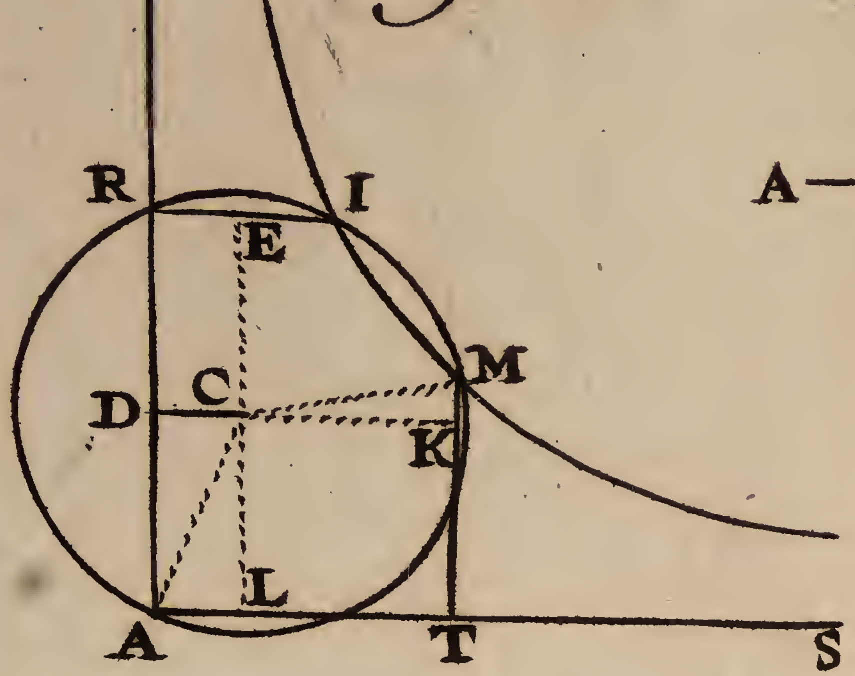


Fig: 106.



Fig: 107.

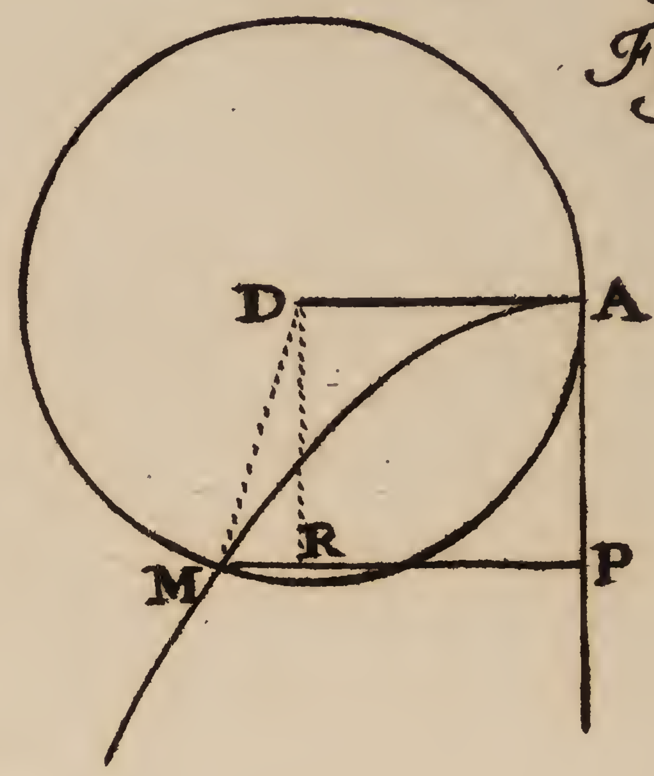


Fig: 108.

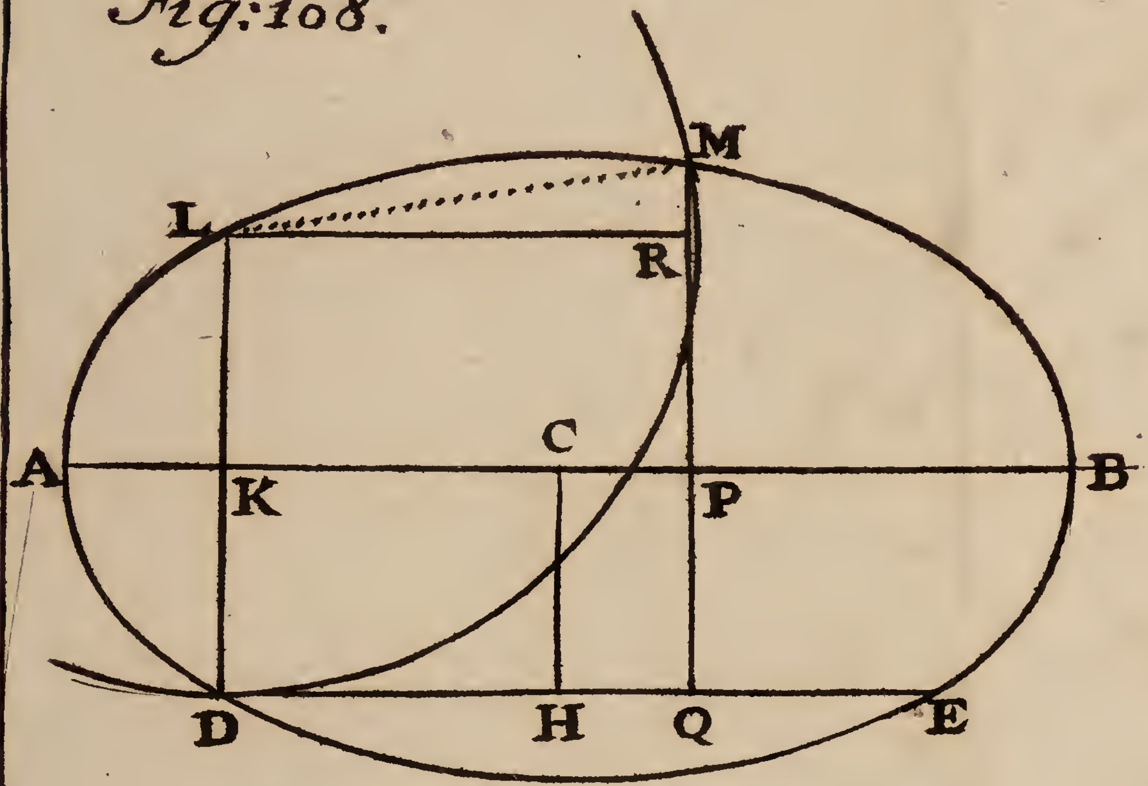


Fig: 109.

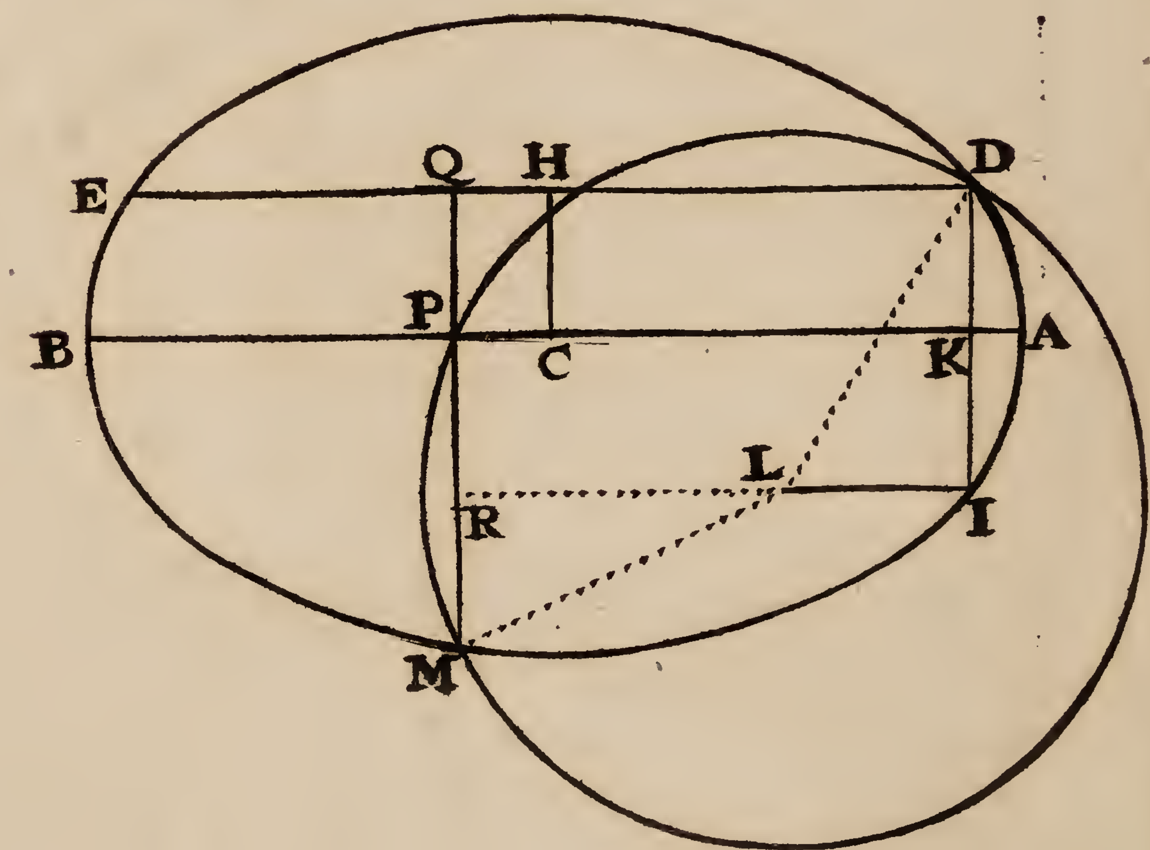


Fig: 110.

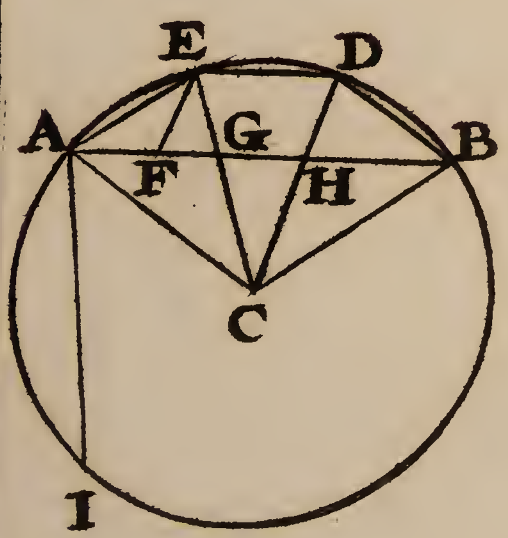


Fig: 111.

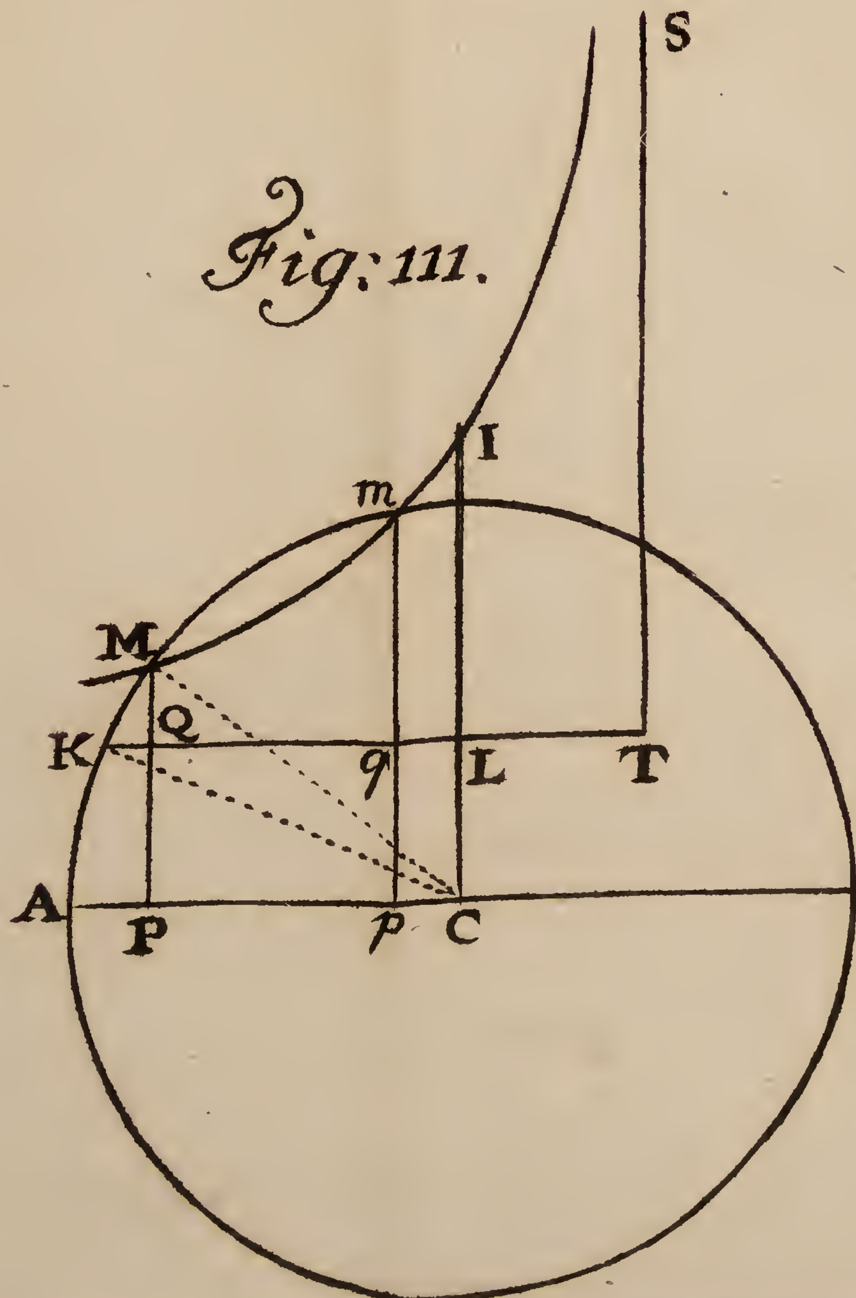


Fig: 112.

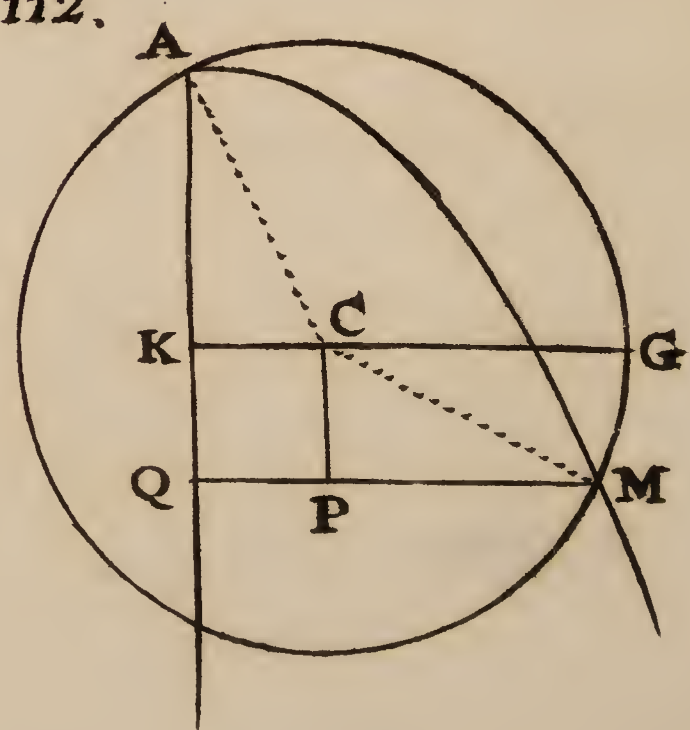


Fig. Algebr. Tab. XII.

Fig. 113.

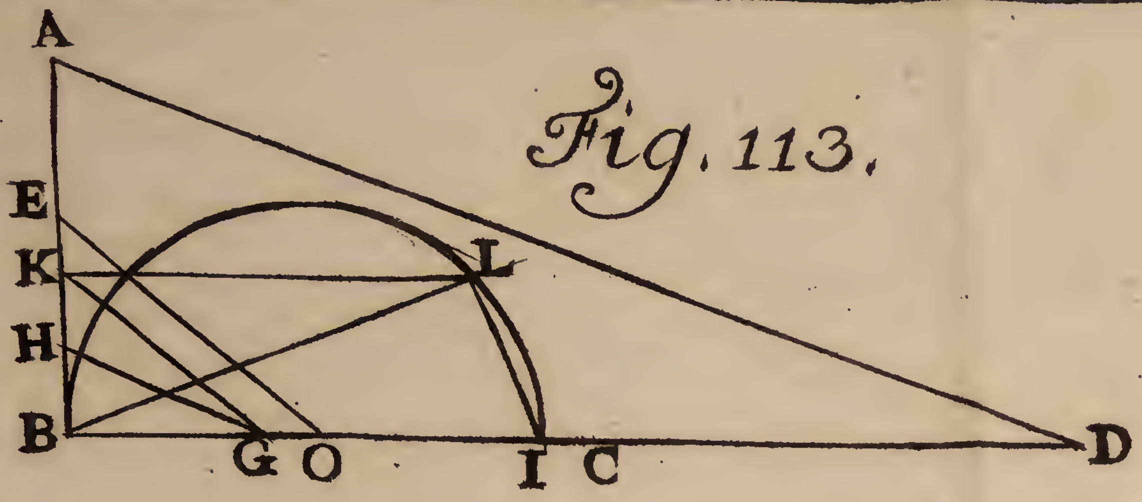


Fig. 115.

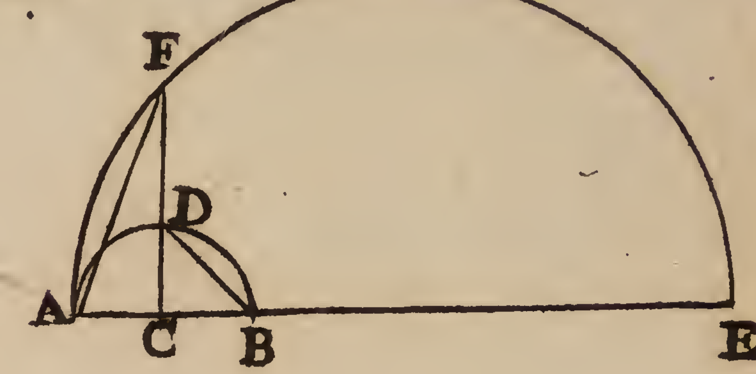


Fig. 114.

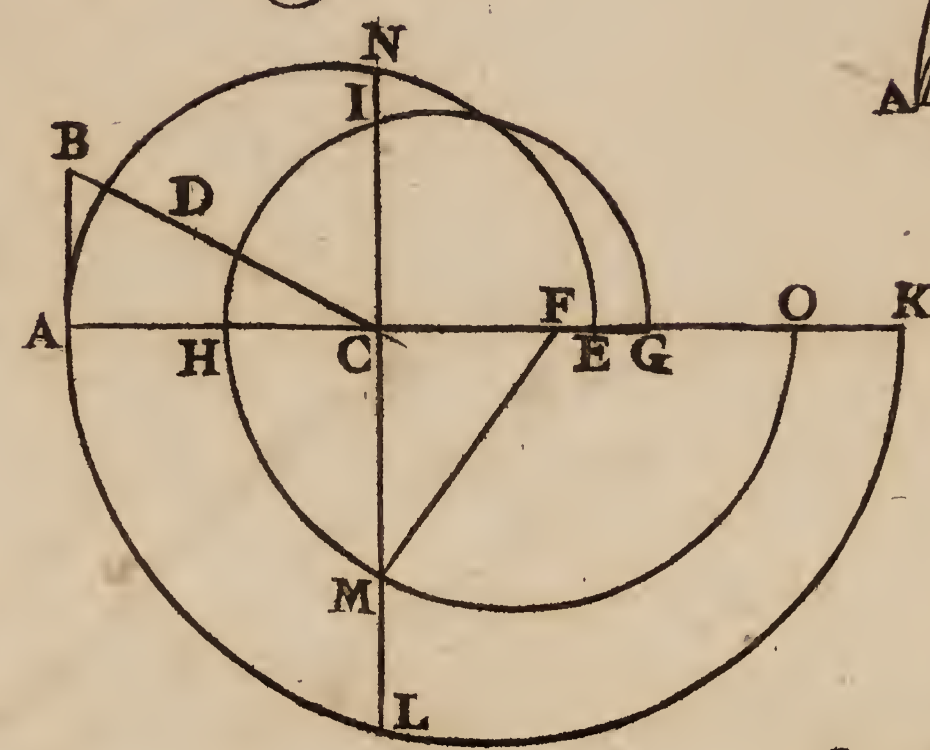


Fig. 116.

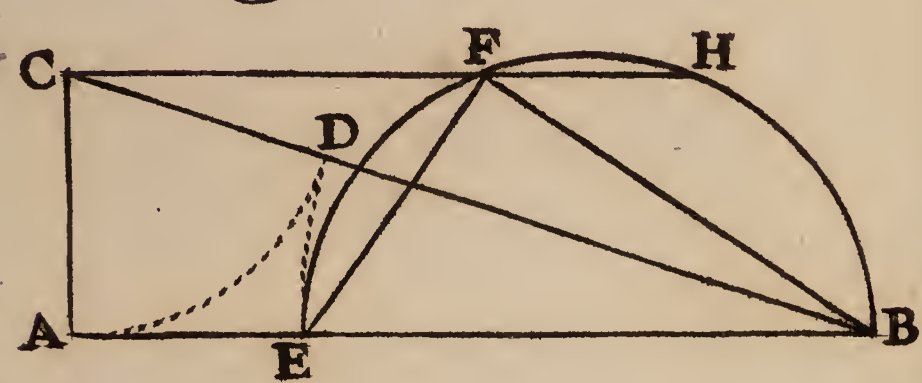


Fig. 118.

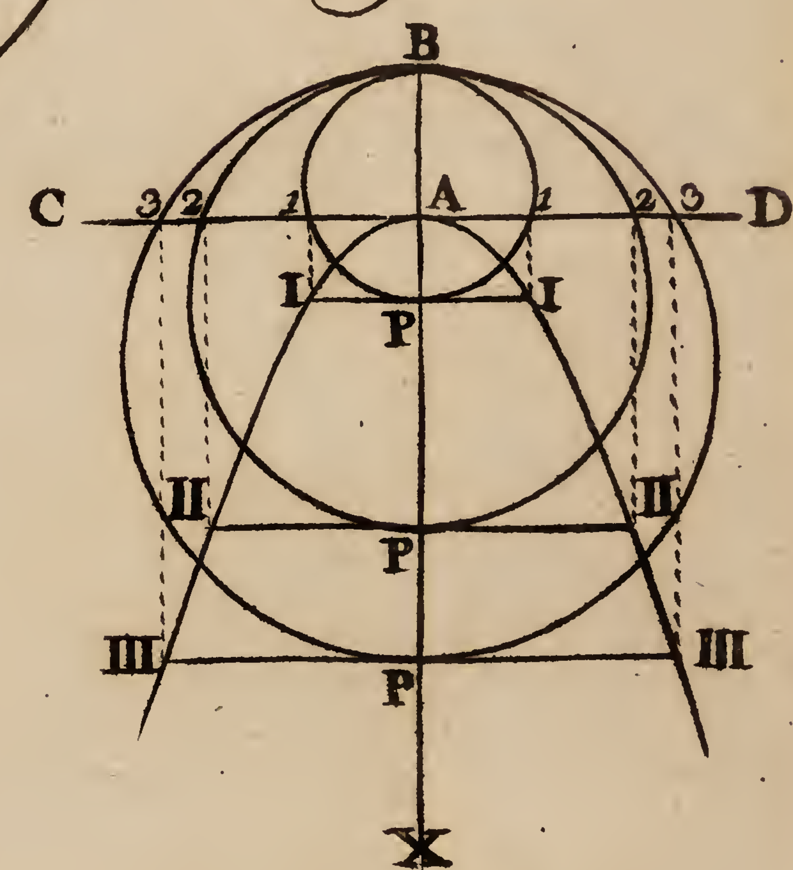


Fig. 117.

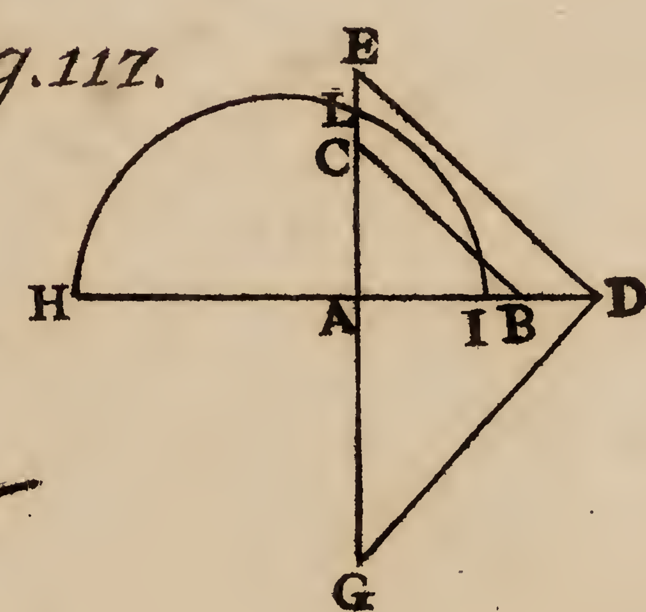


Fig. 119.

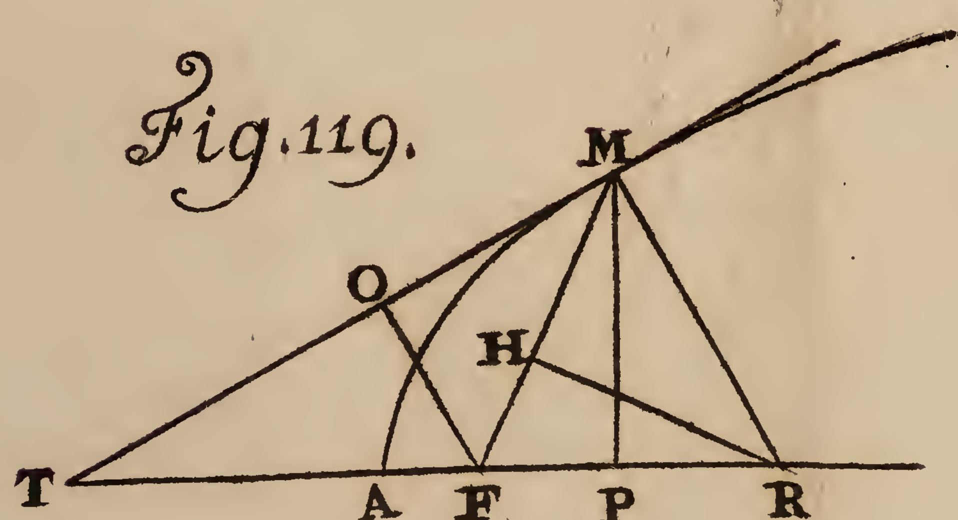


Fig. 121.

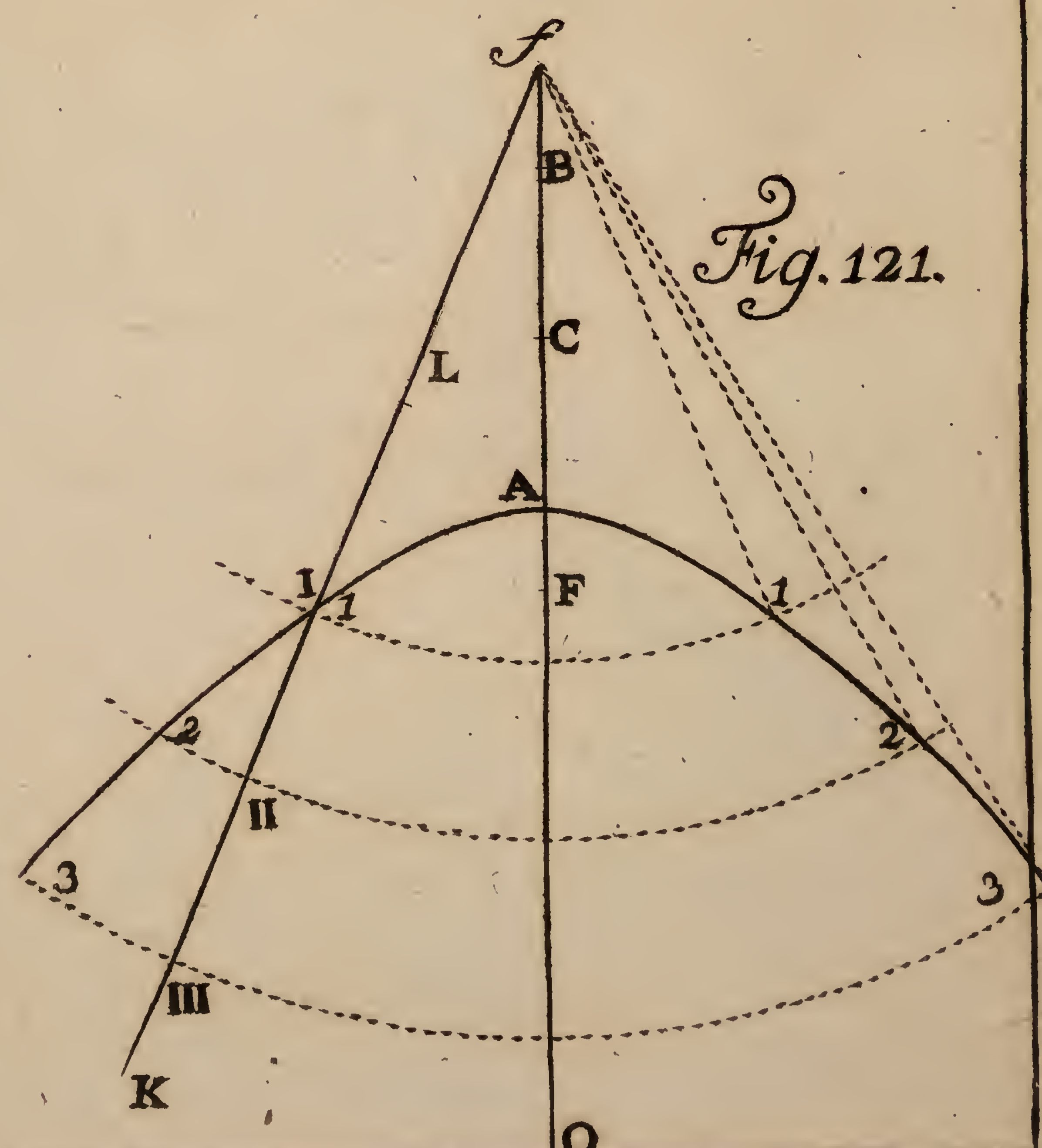


Fig. 120.

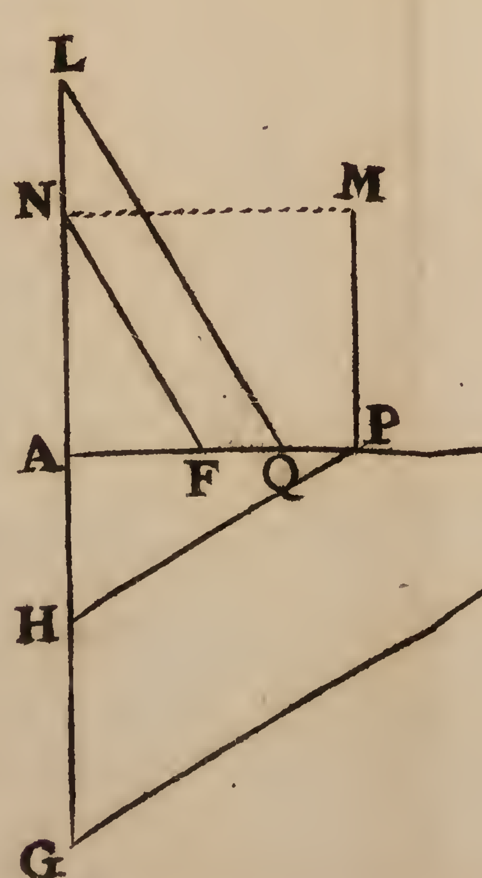


Fig. Algebr. Tab. XIII.

Fig. 122.

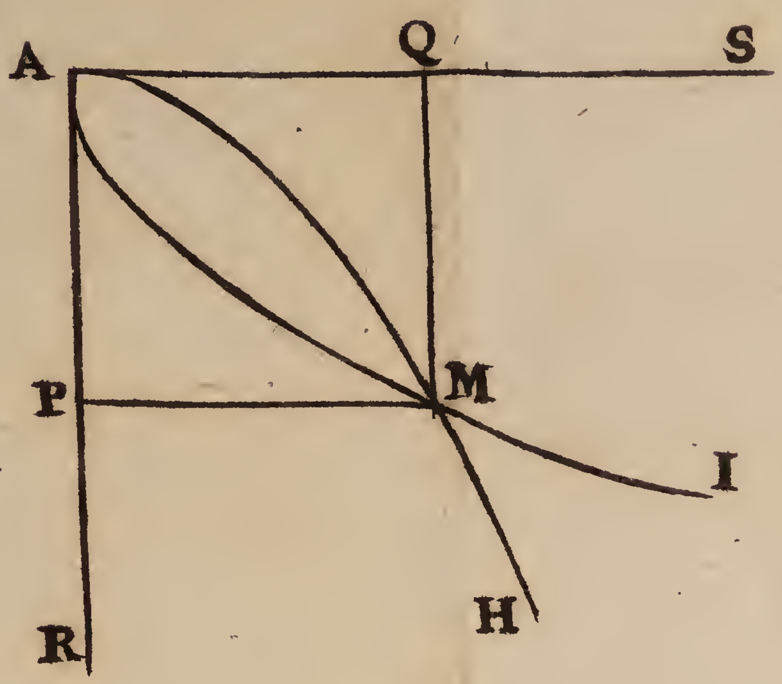


Fig. 123.

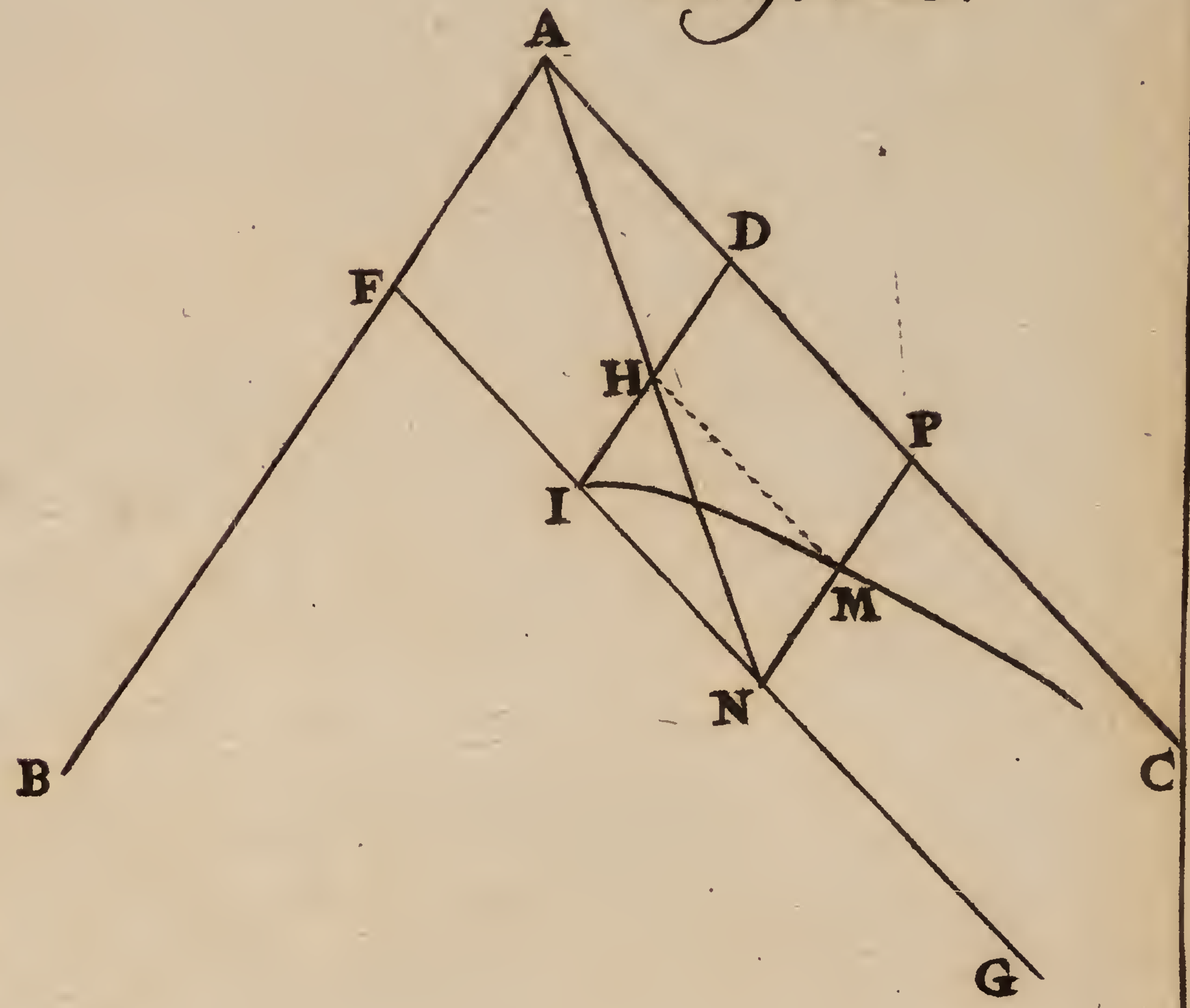


Fig. 124.

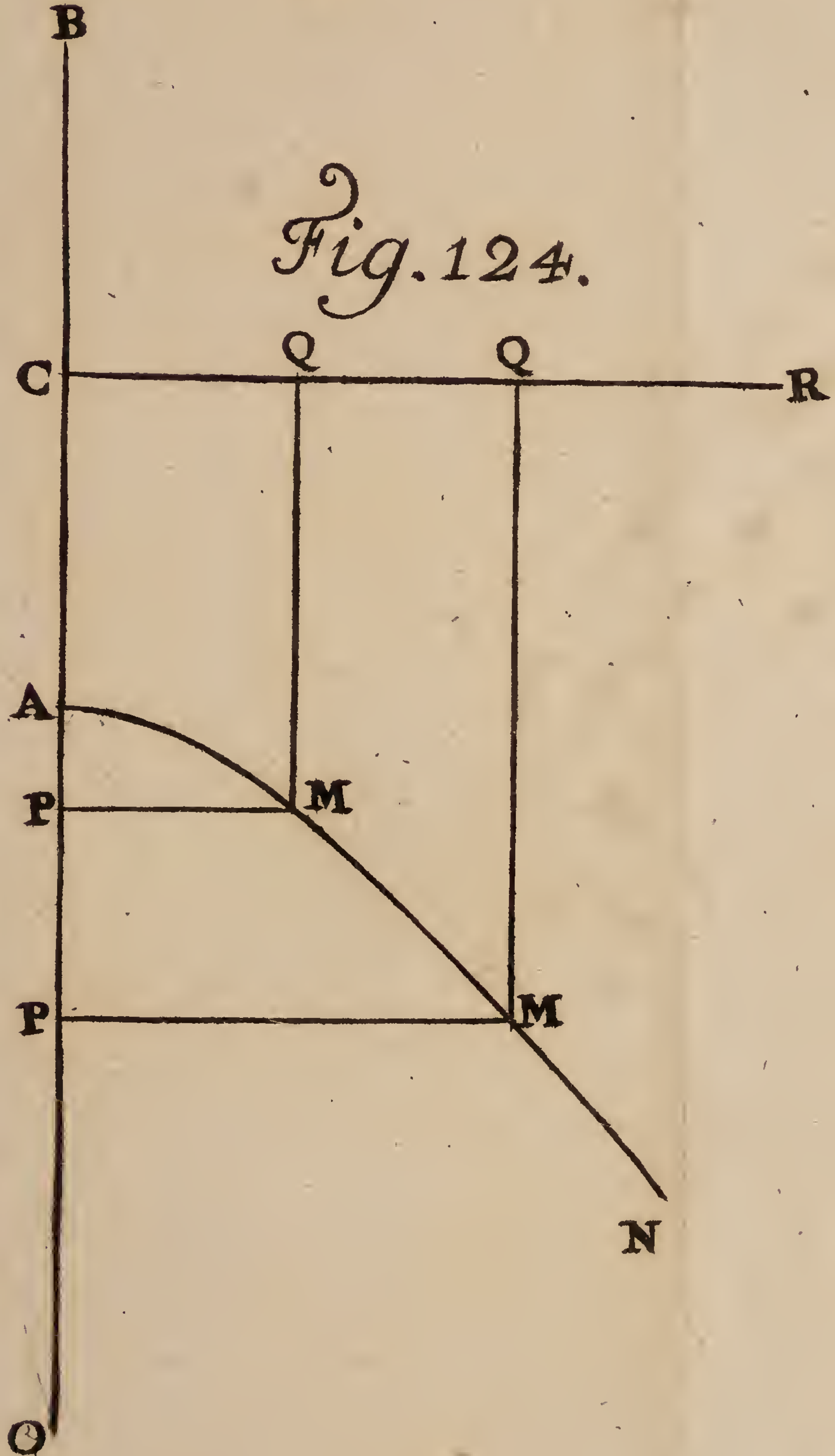


Fig. 125.

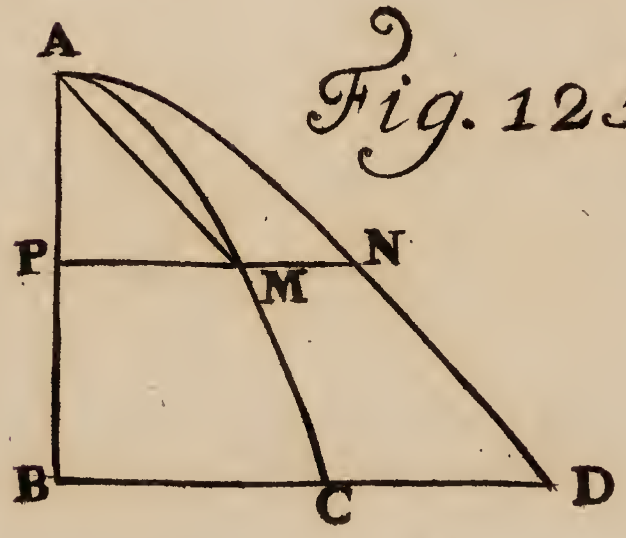


Fig. 126.

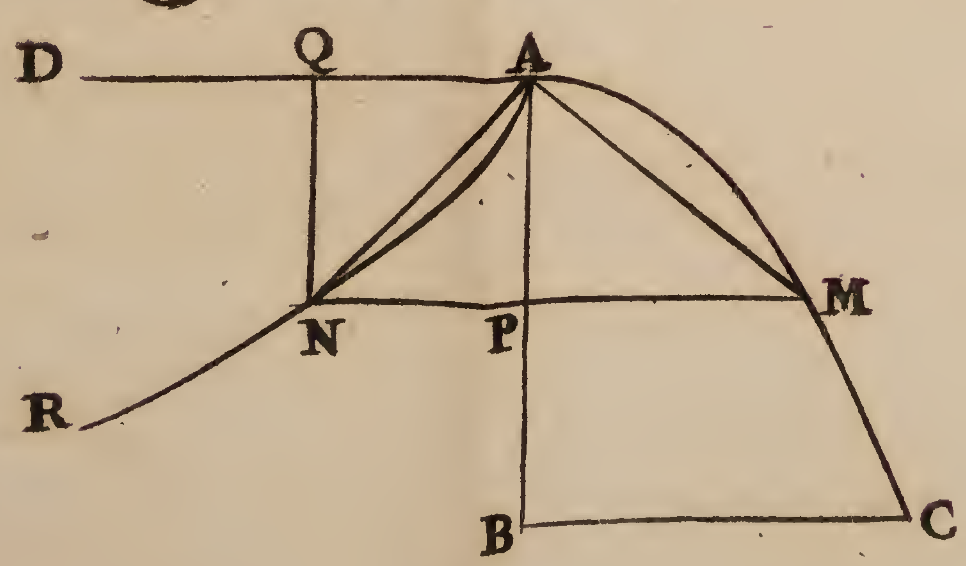


Fig. 127.

